MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE

TOME VI



PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER

QUAI DES AUGUSTINS, 55

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉE 1823.

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT,
IMPRIMEUR DU ROI ET DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 24.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANNÉE 1823.

TOME VI.



PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS, LIBRAIRES,
RUE JACOB, N° 24.

1827.



TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

Qui est le sixième *de la collection des Mémoires de l'Académie des Sciences, depuis l'ordonnance du* 21 *mars* 1816.

16

TABLE

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences, pendant l'année 1823.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences, pendant l'année 1823.

PARTIE PHYSIQUE,

ERRATA.

Au lieu de la feuille 53 page 441, *lisez :* feuille 56.

Histoire. Au lieu xxxiv, *lisez :* page lxxxiv.

Page 571, ligne 11, au lieu de et conduisent, *lisez:* conduisent.

Page 573, ligne 16, au lieu de $f(n\omega)$, *lisez :* $\frac{1}{2}f(n\omega)$.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1823.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

PAR M. LE BARON FOURIER, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

GÉOMÉTRIE.

DANS le tome V de la Mécanique céleste on s'est proposé d'offrir le tableau historique des travaux des géomètres sur le système du monde. L'auteur de ce grand ouvrage, M. le marquis DE LA PLACE, en publiant successivement les livres qui composent cette dernière partie, y joint les résultats des recherches qu'il a faites plus récemment sur le même sujet. Les livres XI et XII, dont nous avons fait mention dans notre rapport précédent, traitent, l'un de la figure de la terre et de son mouvement autour de son axe, l'autre de

l'attraction ou répulsion des sphères et des lois de l'équilibre ou du mouvement des fluides aériformes. Le livre XIII, qui vient d'être publié, a pour objet une des questions les plus importantes et les plus difficiles de l'astronomie physique, celle des oscillations des fluides qui recouvrent les planètes. Le chapitre premier contient un exposé rapide des vues principales et des découvertes des géomètres sur le flux et le reflux de la mer, depuis NEWTON jusqu'à M. DE LA PLACE.

L'origine de cette théorie serait fort ancienne, si elle remontait aux temps où l'on a commencé à entrevoir que les mouvements périodiques de l'Océan sont dus à l'action de la lune et du soleil. Mais le point capital de cette question consistait à reconnaître distinctement les rapports multipliés de l'oscillation des eaux avec le cours des deux astres. NEWTON discerna, avec une pénétration admirable, les caractères généraux de ces grands phénomènes et en assigna les véritables causes, qui sont l'action attractive de la lune et celle du soleil. Il expliqua ainsi les variations périodiques des hauteurs des marées et des intervalles de leurs retours. A la vérité plusieurs de ces explications sont incomplètes, quelques-unes même inexactes, mais les conséquences générales sont incontestables et dès-lors la théorie était fondée. On trouvera dans le livre que nous citons, l'esposé succinct des travaux ultérieurs de DANIEL BERNOULLI, MACLAURIN, EULER et D'ALEMBERT; et la notice des principales recherches de l'auteur de la Mécanique celeste. Aucune branche de l'histoire des sciences n'offre plus d'intérêt que ce tableau des progrès de l'analyse mathématique dans une des plus grandes questions de la philosophie naturelle. Il appartient surtout aux inven-

teurs des principales théories d'en montrer l'origine, les difficultés et les points vraiment importants. L'histoire de la géométrie ancienne ne nous a rien transmis de plus exact et de plus précieux que le peu de mots qui servent de préface aux livres d'Archimède.

On ne pouvait point, dans les premières recherches, considérer à la fois tous les éléments d'une question aussi composée que celle des oscillations de la mer et de l'atmosphère produites par l'action de la lune et du soleil. Les géomètres ont d'abord simplifié cette recherche en faisant abstraction de plusieurs conditions qu'il était très-difficile de soumettre au calcul. On a examiné en premier lieu l'effet résultant d'un seul astre décrivant l'équateur d'un mouvement uniforme et à une distance invariable de la terre supposée en repos; et l'on a cherché à connaître les changements de figure que produirait la présence de l'astre dans une masse liquide comparable au globe terrestre. On a ensuite réuni les effets des deux astres, et l'on a eu égard aux changements de déclinaison, et aux variations de la distance de la lune à la terre; enfin on a considéré l'effet du mouvement de la rotation de la terre, les ondulations du liquide, l'influence de la profondeur ou constante ou variable, et celle de la densité de la masse terrestre comparée à la densité de l'eau. Pour citer l'un des plus beaux résultats de cette recherche, nous rappellerons que M. de La Place a démontré la condition mathématique de la stabilité de l'équilibre des mers. Lorsque cet équilibre est troublé par les vents ou par des causes quelconques, il tend à se rétablir de lui-même, parce que la densité moyenne du globe surpasse celle des eaux. Si cette dernière condition n'avait pas lieu, l'équilibre des mers cesserait

d'être stable dans plusieurs cas, c'est-à-dire que les oscillations ne seraient pas nécessairement contenues entre des limites rapprochées; les forces qui dérangent la situation de l'équilibre pourraient occasionner des déplacements immenses de la masse des eaux.

Nous avons dit qu'après avoir envisagé la question dans ses rapports les plus simples, on a successivement rétabli des conditions que l'on avait d'abord omises. Il faut ajouter que plus on s'est rapproché de la question physique en réunissant ainsi ses éléments naturels, plus on a trouvé d'accord entre les résultats observés et ceux du calcul, en sorte qu'il n'y a aucun des faits généraux de cet ordre dont on ne possède aujourd'hui l'explication mathématique.

Quelque générale que fût cette théorie, elle ne pouvait comprendre une multitude de circonstances accessoires et extrêmement variées qui influent dans chaque lieu sur la hauteur des marées, et sur les intervalles de leur retour. En effet, l'étendue de la mer, la forme des côtes, celle même des rivages opposés, la figure du bassin, l'adhérence des molécules liquides, la situation du port, modifient beaucoup les résultats du calcul où ces éléments n'entrent point. Mais des éléments aussi variés ne peuvent être tous connus, et d'ailleurs les effets qui en résultent sont trop composés pour qu'on puisse les déduire directement de la théorie. Toutefois au milieu de tant de variétés locales, et en quelque sorte arbitraires, il existe des rapports certains qui ne dépendent point des circonstances accessoires, mais seulement des causes générales. Or l'analyse mathématique peut saisir ces rapports et les développer: c'est un des plus grands avantages que l'on retire de cette science, et la question des marées en

offre un exemple très-remarquable. La comparaison attentive des expressions analytiques avec un assez grand nombre d'observations faites dans des circonstances convenables, démontre clairement que le mouvement périodique des eaux, et ses variations, sont des conséquences nécessaires des attractions de la lune et du soleil, et les lois mathématiques qui dérivent de cette cause se manifestent dans les effets observés, nonobstant les conditions locales auxquelles ces effets sont assujettis.

Nous ne pouvons point faire connaître ici les expressions que fournit l'analyse; nous indiquerons seulement les deux propositions générales qui servent à les former.

La première est le principe de la coexistence des petites oscillations qui s'applique à tous les phénomènes représentés par les équations appelées linéaires. Il s'ensuit que le mouvement général des eaux se compose d'une multitude de flux partiels dont chacun pourrait être produit par un astre mû uniformément dans le plan de l'équateur. La seconde proposition est un autre principe très-général et très-fécond dont voici l'énoncé: *si un système matériel est soumis à l'action indéfiniment prolongée d'une cause périodique, et si les résistances propres au système ont fait disparaître les conditions de son état primitif, l'effet subsistant est périodique comme la cause qui le produit.* Il restait à comparer aux observations les résultats déduits de ces deux principes. On avait recueilli à Brest un grand nombre d'observations des marées faites sur la proposition de l'Académie des Sciences, depuis 1711 jusqu'à 1716, et l'on vient de renouveler dans le même port ce même genre de mesures pendant seize années consécutives depuis 1807. L'une et l'autre série

de faits, et surtout la dernière qui est plus nombreuse, ont offert le moyen de vérifier la théorie et de reconnaître les rapports des phénomènes avec les causes générales. M. DE LA PLACE avait discuté les résultats des anciennes observations dans le tome II, livre IV de la Mécanique Céleste; il examine maintenant suivant les mêmes principes les observations récentes. En procédant à cette comparaison, on s'est proposé premièrement de compenser par la réunion d'un très-grand nombre de faits les irrégularités fortuites, afin d'obtenir les résultats dus aux seules causes constantes; secondement, de rapprocher les observations les plus propres à déterminer certains éléments en faisant évanouir presque entièrement l'influence des autres. Le procédé qui sert à combiner les observations de la manière la plus convenable pour le but que l'on veut atteindre se présente quelquefois de lui-même; et dans tous les cas, il est donné par des règles exactes puisées dans l'analyse des probabilités. La comparaison de la théorie des marées avec près de six mille observations exigeait des calculs immenses : on en est redevable à M. BOUVARD, dont les travaux précieux ont mérité depuis long-temps la reconnaissance des astronomes.

Sans énumérer tous les résultats de ses comparaisons, nous nous bornerons à dire qu'elles rendent manifestes les lois que le principe de la gravitation universelle assigne à ces phénomènes. Les conséquences déduites de la mesure des hauteurs des marées, et celles que fournit l'observation des heures de leurs retours, font reconnaître sans aucun doute l'influence des déclinaisons variables des deux astres, et celle de leur changement de distance à la terre; elles déterminent avec une exactitude suffisante l'intervalle de temps

qui s'écoule depuis la syzygie jusqu'à la plus haute marée, ou depuis la quadrature jusqu'au minimum des marées ; cet intervalle est, dans le port de Brest, d'un jour et demi à très-peu près. Nous indiquerons à ce sujet une des conséquences remarquables des nouvelles recherches de M. de La Place : elle consiste en ce que les termes divisés par la quatrième puissance de la distance de la lune à la terre produisent un flux partiel que des observations très-nombreuses ont en effet rendu sensible. Il en résulte une différence entre les marées des nouvelles lunes et celles des pleines lunes, ce qui n'aurait point lieu en vertu des seuls termes dépendants du cube de la distance. On voit ici une application de ce principe qu'on ne peut trop rappeler, savoir qu'en multipliant les observations on supplée en quelque sorte à la précision par le nombre, et que l'on parvient à reconnaître et à mesurer des quantités extrêmement petites beaucoup moindres que les écarts fortuits auxquels ces observations sont sujettes, et l'existence de ces effets presque insensibles peut être constatée avec le plus haut degré de vraisemblance. On déduit encore de ces mêmes observations des marées des valeurs numériques, relatives à deux phénomènes, dépendants des mêmes causes, savoir : la précession des équinoxes et la nutation de l'axe terrestre. On trouve $\frac{1}{75}$ pour le rapport de la masse de la lune à celle de la terre, et toutes ces valeurs sont conformes à celles qui dérivent des observations astronomiques. On arrive ainsi au même but par deux voies entièrement différentes. Ces coïncidences singulières dont nous avons déja cité des exemples dans nos rapports précédents, sont peut-être les témoignages les plus frappants de la perfection des théories modernes. Elles nous montrent spéciale-

ment que les phénomènes des marées sont calculés avec autant de certitude que les mouvements des astres. Tous ces effets sont du même ordre; ils sont soumis à la même analyse et dépendent d'un seul principe.

La question des marées offre dans son ensemble tous les caractères propres à fixer l'attention des géomètres; aucune ne réunit plus de considérations philosophiques; elle présente d'abord l'application de l'analyse à des problèmes dynamiques de plus en plus composés, dont la solution exacte indique clairement la marche des phénomènes et la cause qui les produit. On voit ensuite que, le problème devenant très-complexe, on peut suppléer à la connaissance des éléments arbitraires ou à l'intégration des équations différentielles, en ne considérant que les rapports généraux indépendants de ces éléments, et faisant concourir les observations de la manière la plus convenable à la détermination de ces rapports et des lois que suivent les effets produits; enfin une troisième partie de la question, celle qui concerne les oscillations de l'atmosphère, exige l'application d'une autre branche de l'analyse mathématique, savoir la théorie des probabilités.

Les attractions lunaire et solaire agissant sur la masse de l'air comme sur les eaux, lui impriment aussi un mouvement périodique. Cet effet est incomparablement moins sensible que celui des marées; mais il subsiste en vertu de l'action directe des deux astres, et à cause du mouvement et du changement de figure de l'océan qui sert de base à l'atmosphère. Le flux total atmosphérique se compose aussi de deux effets partiels : l'un est dû à l'action de la lune, et sa période est un demi-jour lunaire; le second est produit par

la force attractive du soleil, et sa période est d'un demi-jour solaire. Ce second effet serait beaucoup plus difficile à reconnaître que le premier, parce qu'il est plus petit, et parce que se renouvelant aux mêmes heures solaires, il se mêle à une autre oscillation périodique qui dépend d'une cause différente. L'oscillation dont il s'agit est connue depuis long-temps et rendue sensible par la variation diurne du baromètre. On ne peut douter qu'elle ne soit due, comme le phénomène des vents alisés, à l'influence variable de la chaleur du soleil. Nous ne pouvons citer ici les divers ouvrages relatifs à cette question de la variation diurne, qui est une des plus intéressantes de la météréologie. On doit principalement consulter les recherches que M. le baron Ramond a publiées dans la collection des Mémoires de l'Institut de France.

Quant au flux lunaire, il ne se reproduit aux mêmes heures solaires qu'après un demi-mois; et c'est pour cela que les observations peuvent servir à le séparer des autres variations, ou irrégulières ou périodiques. Il augmente, le jour de la syzygie, la variation diurne; il la diminue, le jour de la quadrature : en sorte que la différenc de ces variations est le double de l'effet dû à l'action de la lune. M. de La Place a donc pensé que l'on pourrait reconnaître le flux atmosphérique lunaire, en comparant entre elles, conformément aux remarques précédentes, un grand nombre de hauteurs barométriques, mesurées à l'Observatoire royal de France. Il était surtout nécessaire de choisir un système d'observations propre à faire disparaître, des résultats moyens, les variations accidentelles qui sont considérables. On a satisfait à toutes ces conditions en comparant des

observations faites le même jour, à neuf heures du matin, à midi et à trois heures du soir, et prenant la valeur moyenne d'un grand nombre de résultats donnés par cette comparaison. On a employé pour ce calcul les observations de mille cinq cent quatre-vingt-quatre jours, faites dans le cours de huit années consécutives; et l'on a trouvé comme résultat vraisemblable, que le flux atmosphérique lunaire change en effet, soit en plus, soit en moins, la variation diurne observée à Paris, mais que ce changement est très-petit, en sorte que la hauteur barométrique n'est pas altérée par cette cause d'un dix-huitième de millimètre; on trouve ainsi $3^h\ 18'\ \frac{1}{2}$ à très-peu près pour l'heure du plus grand flux lunaire le jour de la syzygie. Quoique les observations comparées soient au nombre de quatre mille sept cent cinquante-deux, il ne s'ensuit point qu'elles indiquent le flux lunaire avec un haut degré de probabilité. La discussion précédente a cela de remarquable, qu'elle fournit la mesure de la vraisemblance du résultat. L'application des méthodes analytiques dues à l'illustre auteur montre que cette probabilité surpasse $\frac{1}{2}$, mais qu'elle n'approche point assez de l'unité pour donner un degré suffisant de certitude. Cette même analyse nous apprend que, pour que le résultat fût annoncé avec beaucoup de vraisemblance, il faudrait employer un nombre dix fois plus grand d'observations.

Quant à la variation diurne, elle est tellement indiquée par les observations, qu'il ne peut rester aucun doute. On reconnaît aussi que cette variation ne demeure pas la même dans le cours de l'année, et qu'elle change en vertu d'une cause périodique, comme le remarque M. Ramond dans les Mémoires cités.

La variation diurne observée dans nos climats est très-sensiblement au-dessous de sa valeur moyenne pendant les mois d'octobre, novembre et décembre, et au-dessus de cette moyenne pendant les trois mois suivants. M. de La Place démontre que ces conséquences et celles qui se rapportent au flux lunaire, se déduisent, avec un très-haut degré de probabilité, de l'ensemble des observations recueillies à Paris jusqu'à ce jour.

Rien n'est plus digne de remarque que cette application de la science des probabilités à la recherche des résultats moyens fournis par des observations nombreuses. Cette théorie éclaire la discussion de tous les faits naturels, même de ceux dont la cause est ignorée, ou ne peut être soumise au calcul. Elle dirige l'esprit dans la comparaison des observations; elle fait connaître jusqu'à quel point on doit les multiplier pour obtenir un degré suffisant de vraisemblance; enfin, elle donne la mesure exacte de la probabilité des résultats.

M. Poisson a présenté à l'Académie, pendant l'année 1823, deux Mémoires de physique-mathématique, dont il a publié des extraits assez étendus dans les Annales de chimie et de physique. Le premier Mémoire a pour objet *la propagation du mouvement dans les fluides élastiques.* L'auteur avait traité précédemment un cas particulier d'une question dans laquelle on considère deux fluides élastiques différents, qui sont en contact et ne se pénètrent point. Il s'agissait de déterminer le mouvement qui s'opère dans l'intérieur des deux fluides, lorsqu'une onde plane et parallèle à la surface de séparation traverse l'un des fluides, et atteint cette surface.

Le calcul lui avait fait connaître que l'onde, parvenue à la surface de contact, se divise et produit deux autres ondes, dont l'une est réfléchie dans l'intérieur du premier milieu où le mouvement a été imprimé, et l'autre se propage dans le second fluide. M. Poisson donne présentement une nouvelle étendue à cette recherche. Il suppose que l'origine du mouvement est un point quelconque du premier fluide, en sorte que l'onde sphérique qui s'y forme atteint, sous une infinité de directions différentes, la surface de contact; il examine suivant quelles lois le mouvement ondulatoire se réfléchit dans le premier milieu, et se propage dans le second. La première partie de son Mémoire a pour objet la propagation du mouvement dans un seul fluide. On y expose les conséquences relatives à la forme des ondes, à la vitesse de la propagation, aux vitesses propres des molécules fluides, aux directions suivant lesquelles elles oscillent, et les résultats du calcul dont l'auteur conclut que ces vitesses propres subissent un affaiblissement considérable sur les rayons qui s'écartent de la direction principale. M. Poisson détermine aussi la forme des ondes dans un milieu vibrant où la force élastique ne serait pas la même selon toutes les directions; enfin il considère le mouvement ondulatoire, non-seulement dans le cas où il provient d'un seul ébranlement primitif d'une partie de la masse, mais encore dans le cas où ce mouvement est entretenu par des vibrations répétées à l'origine des ondes.

Dans la seconde partie de son Mémoire, l'auteur examine l'effet que produirait chacune des ondes excitées dans un des fluides, lorsqu'elle atteint, en un certain point, la surface de contact, supposée plane et indéfinie. Cet effet com-

prend 1° une onde réfléchie dans le premier fluide où le mouvement a commencé, 2° une onde qui se forme et se propage dans l'autre fluide. La première est sphérique comme celle dont elle dérive; les centres de cette onde primitive et de l'onde réfléchie sont situés à égale distance, de part et d'autre, de la surface de séparation, sur une même perpendiculaire à cette surface. Ainsi la réflexion de l'onde suit précisément la même loi que la réflexion régulière de la lumière.

Quant à l'onde qui passe dans le second fluide, elle n'est pas sphérique; mais les vitesses propres des molécules sont encore dirigées, selon les normales, à la surface de l'onde. Si l'on prolonge une de ces normales jusqu'à la rencontre de la surface de séparation, cette ligne représentera le rayon de l'onde propagée dans le second milieu; et la droite menée du point de rencontre au centre de l'onde primitive, le rayon de celle-ci. Or le calcul donne une relation remarquable entre les directions de ces deux rayons; ils sont tous les deux dans un plan perpendiculaire à la surface de contact, et les sinus des angles que chacun fait avec la normale ont un rapport constant; ainsi ce phénomène offre la loi connue de la réfraction de la lumière. On peut encore expliquer par la même analyse la conséquence qui résulte de l'application de cette loi, au cas où l'incidence est telle que l'onde n'est plus transmise à une distance sensible dans le second milieu. On voit par là que le mouvement ondulatoire qui se propage dans deux fluides différents, mis en contact, présente des effets comparables à ceux de la lumière et assujettis aux mêmes lois. En poursuivant cette comparaison des deux genres de phénomènes, et considérant la largeur des

ondes dans les deux fluides, les vitesses de propagation, les vitesses propres des molécules, l'auteur trouve des résultats conformes aux faits optiques les plus connus, et il en trouve aussi qui ne s'accordent point avec ces faits. Cette partie de ses recherches lui donne lieu de présenter diverses remarques au sujet des deux hypothèses physiques, qui consistent à expliquer les propriétés connues de la lumière, soit par l'émission des rayons, soit par la propagation des mouvements vibratoires d'une matière éthérée. Nous ne pourrions point exprimer notre opinion personnelle sur cette question, sans entrer dans des détails que la nature de ces extraits ne comporte pas.

M. Poisson a lu à l'Académie, dans sa séance du 13 mars 1823, et publié dans les Annales de chimie, un Mémoire relatif aux anneaux colorés. L'objet de cet écrit est de compléter, sous un certain rapport, l'explication du phénomène dont il s'agit, déduite de l'interférence des vibrations lumineuses, selon les vues de M. le docteur Thomas Young. M. Poisson examine le cas de l'incidence orthogonale, et il ne considère pas seulement les ondes qui sont réfléchies une première fois à l'une ou à l'autre surface de la lame mince d'air, mais encore toutes celles qui ayant subi, en ces surfaces extrêmes, des réflexions multipliées, parviennent à l'œil de l'observateur. En réunissant ainsi tous les éléments qu'un calcul exact devait en effet comprendre, on trouve des résultats entièrement conformes aux faits observés.

M. Fresnel, qui a traité avec tant de succès les questions les plus importantes de l'optique, a inséré ensuite dans le même recueil (Ann. chim. et phys., mai 1823) un article concernant la formation des anneaux colorés. L'auteur qui, à

l'occasion d'une recherche relative à l'intensité de la lumière réfléchie sous des incidences obliques, avait, long-temps auparavant, calculé la somme des effets produits par une infinité de réflexions successives, applique un calcul semblable aux réflexions de la lumière homogène, opérées à l'une et à l'autre surface de la lame d'air. Il considère l'incidence sous toutes les directions, et rend l'explication indépendante des formules qui expriment les quantités de lumière réfléchies, en se fondant sur un fait général, que M. Arago a déduit d'expériences très-précises; par ce moyen, l'auteur explique facilement le noir très-foncé que l'on observe sous toutes les incidences au milieu des anneaux obscurs.

M. Poisson a lu, dans la séance du 8 septembre 1823, une note contenant l'énoncé des principaux résultats de ses recherches mathématiques sur la théorie du magnétisme. Il a présenté, le 2 février 1824, le Mémoire dans lequel il traite cette question.

On a indiqué, dans les Analyses précédentes, les progrès de nos connaissances expérimentales et théoriques concernant les rapports de l'électricité et du magnétisme, et les effets dynamiques de l'électricité.

L'action du courant électrique sur l'aiguille aimantée, les actions mutuelles de deux courants, et leurs rapports avec le magnétisme terrestre, les forces électro-motrices dues aux différences de température, les expériences si remarquables du mouvement continu, les conséquences déduites de la loi mathématique qui a été proposée, tels sont les points principaux de cette nouvelle théorie.

M. Ampère a continué ses recherches sur cette matière;

elles sont l'objet d'un Mémoire de mathématique qu'il a lu et déposé à l'Académie le 29 décembre 1823; l'auteur a eu principalement en vue de développer par des démonstrations, en quelque sorte synthétiques, les conséquences multipliées de la formule qu'il a donnée pour exprimer l'action élémentaire de deux particules des fils conducteurs. Dans les années 1820 et 1822, il avait présenté cette formule, et déterminé, par l'expérience, la valeur d'un coefficient numérique qu'elle contient. Il en avait conclu que si un élément de courant électrique est soumis à l'action d'un système de courants fermés ou infiniment prolongés dans les deux sens, la force qui en résulte pour mouvoir l'élément est perpendiculaire à la direction de cet élément. Cela n'a point lieu si l'on ne considère que l'action des courants qui ne forment pas des circuits, ou qui ne sont pas prolongés à l'infini dans les deux sens; et par là l'auteur explique comment la révolution d'un cercle métallique autour de son centre, peut résulter de l'action des courants électriques de l'eau acidulée où il est plongé. MM. Savary et de Montferrand, qui cultivent avec beaucoup de succès la physique-mathématique, ont fait d'heureuses applications du calcul intégral, en déduisant de la loi dont on vient de parler, un grand nombre de conséquences que les observations ont vérifiées. M. Ampère traite ce même sujet sous un point de vue différent; il exprime par une construction très-générale l'effet résultant de toutes les parties d'un circuit électrique fermé ou indéfini dans les deux sens; il obtient ainsi, non-seulement toutes les conséquences que le calcul avait déja données, mais encore plusieurs autres également conformes aux observations. Son Mémoire est divisé en six paragraphes, dont

nous allons indiquer l'objet. Le premier présente les conséquences relatives à l'action totale d'un courant électrique fermé, ou d'un système de tels circuits, sur un seul élément du fil conducteur.

1° La résultante de toutes les actions exercées par les courants qui forment le système, est perpendiculaire à l'élément.

2° Si l'on suppose le milieu de l'élément toujours situé en un point donné de position à l'égard du système, que l'on place cet élément suivant diverses directions dans un plan qui passe par ce point et qui est également donné de position, et que l'on décompose la résultante de toutes les actions en une force située dans ce plan et une force qui lui soit perpendiculaire; la première composante sera constante, quelle que soit la direction de l'élément sur le plan.

En considérant l'action magnétique du globe terrestre comme due à un système de circuits électriques, l'auteur cite une observation dont le résultat est conforme à la proposition que l'on vient d'énoncer.

3° Cette première composante est exprimée par le produit d'un coefficient constant et de la somme des aires formées sur le même plan par les projections des secteurs infiniment petits, qui ont pour sommet le point où est situé l'élément, et pour base les petits arcs des courants du système, divisés respectivement par les cubes des distances de ce sommet à chacun de ces arcs.

4° Pour un point donné de position à l'égard du système, il y a un plan unique pour lequel la somme dont nous venons de parler est la plus grande possible.

5° Si on élève au point donné une perpendiculaire au plan

dont il s'agit, la même somme est nulle pour tout plan passant par cette perpendiculaire.

6° Quelle que soit la direction de l'élément, si l'on mène un plan par cette perpendiculaire et par la direction de l'élément, la composante de la résultante dans ce plan est nulle, d'après ce qu'on vient de dire, et ainsi cette résultante est perpendiculaire au plan.

7° La résultante coupant à angle droit la direction de l'élément et celle de la perpendiculaire, est donc dans le plan sur lequel cette dernière a été élevée; d'où il suit que la résultante est toujours comprise dans ce plan principal (que l'auteur nomme plan directeur de l'action électro-dynamique au point donné, en désignant la perpendiculaire qui y est élevée, sous le nom de normale au plan directeur.)

8° La résultante est proportionnelle au sinus de l'angle formé par la direction de l'élément et la normale, au plan appelé directeur : elle est par conséquent nulle quand l'élément est dans la direction de cette normale, et à son maximum quand il lui est perpendiculaire, c'est-à-dire quand il est situé dans le plan principal.

9° Pour trouver la composante dans un plan quelconque passant par la direction de l'élément, il faut multiplier l'action maximum qui aurait lieu si l'élément était situé dans le plan principal, par le cosinus de l'angle des deux plans.

10° Si l'on considère trois quantités analytiques exprimant les sommes des aires formées sur trois plans rectangulaires par les projections des petits secteurs dont le sommet est au point donné, divisées respectivement par les cubes des distances, l'action maximum est exprimée par le produit du

coefficient dont nous avons parlé plus haut, et de la racine carrée de la somme des carrés des trois quantités.

M. Ampère calcule ensuite, dans un cas particulier, les intégrales qui donnent les valeurs des trois quantités analytiques dont on vient de parler; ce cas est celui où le système se réduit à un courant circulaire fermé, et ces intégrales prennent des valeurs simples quand on suppose très-petit le diamètre du cercle décrit par le courant. Il ajoute que les résultats obtenus dans les paragraphes précédents sont indépendants de l'exposant de la puissance de la distance des deux éléments de courants électriques à laquelle on suppose que leur action mutuelle est réciproquement proportionnelle quand on fait varier cette distance sans changer les directions des éléments; et que ceux qui vont suivre n'ont lieu, au contraire, que quand la même action est en raison inverse du carré de la distance : nous ferons deux remarques à ce sujet. La première est que : la formule donnée par l'auteur suppose que la fonction de la distance, qui, toutes choses d'ailleurs égales, mesure l'action mutuelle de deux éléments, est une puissance de la distance. En admettant cette forme de la fonction, l'exposant est déterminé par les observations. Notre seconde remarque consiste en ce que l'action d'un courant prolongé à l'infini dans les deux sens ne peut être assimilée à celle d'un circuit entier, que si l'effet élémentaire devient infiniment petit, lorsque la distance croît sans limite. Ceux des résultats précédents qui se rapportent aux courants infiniment prolongés dans les deux sens, n'auraient pas lieu si l'exposant de la puissance n'était pas négatif. Les conséquences que nous allons maintenant indiquer avaient été

données par M. Savary, qui les a, le premier, déduites de la formule de M. Ampère.

Dans le troisième paragraphe de son Mémoire, M. Ampère considère l'action d'un système de courants circulaires d'un très-petit diamètre, décrivant des cercles égaux dans des plans équidistants normaux à la ligne droite ou courbe qui passe par leurs centres. La réunion des circonférences qu'ils décrivent détermine une surface, dont les géomètres ont examiné les propriétés analytiques. M. Ampère propose de donner le nom de *solénoïde* à cette surface, qui est, à proprement parler, celle d'un canal ou tube d'un très-petit diamètre. L'axe de ce tube peut être une ligne fermée ou infiniment prolongée dans les deux sens ou dans un seul sens, ou une ligne finie dont les deux extrémités sont données.

1° Si le système de courants électriques dont on a déterminé précédemment l'action sur un élément est un tube fermé ou indéfini dans les deux sens, cette action devient nulle lorsque l'on prend un des nombres 2 ou — 1 pour l'exposant de la puissance de la distance à laquelle l'action mutuelle des deux éléments est réciproquement proportionnelle; et elle ne peut l'être généralement pour d'autres valeurs de cet exposant. Comme des expériences directes prouvent qu'elle l'est effectivement, quelle que soit la forme et la grandeur du courant dont l'élément fait partie, et que d'ailleurs cet exposant est positif, il en résulte nécessairement que cette puissance est le carré.

2° Si le système est infiniment prolongé dans un seul sens, la normale au plan principal ou directeur est la droite menée de l'extrémité de ce système au point où est l'élément; en sorte que la force exercée sur l'élément est à la fois perpen-

diculaire à cette droite et à l'élément, ce qui suffit pour en déterminer la direction.

3° Si l'on calcule dans ce cas la valeur de l'action maximum, on trouve qu'elle est réciproquement proportionnelle au carré de la longueur de cette droite; d'où il suit que quand l'élément lui est perpendiculaire, la force que le système dont il s'agit exerce sur lui, est en raison inverse du carré de la distance.

Dans toute autre direction de l'élément, la même force est en outre, d'après ce qu'on a vu dans le premier paragraphe, proportionnelle au sinus de l'angle que forme cette direction avec la même droite menée de l'élément à l'extrémité du système.

4° Si l'arc du système est une ligne finie, l'action cherchée est la résultante des deux forces qui seraient produites par deux systèmes prolongés à l'infini dans un seul sens, les courants ayant des directions opposées, et chacun d'eux ayant son extrémité à une des extrémités du système fini. Il suffira donc, pour avoir la direction et la grandeur de cette force, de déterminer les deux composantes d'après ce que nous venons de dire, et d'en conclure la direction et la grandeur de leur résultante.

M. Ampère examine ensuite la réaction d'un élément de courant électrique sur un système de ce genre, qu'il suppose d'abord infiniment prolongé dans un sens, afin de n'avoir à en considérer qu'une extrémité. Il cherche la valeur du moment de rotation que cette réaction imprime au système autour d'une droite quelconque passant par son extrémité, et conclut aisément de cette valeur celle de la somme des moments de tous les éléments d'un courant électrique d'une

forme et d'une grandeur quelconque. Il montre qu'elle ne dépend que de la situation des extrémités de ce courant relativement à celle du système, et que la même somme devient nulle quand il s'agit d'un courant fermé ou indéfini dans les deux sens, et par conséquent d'un assemblage de tels courants, quelles que soient d'ailleurs leur forme et leur grandeur; d'où il suit que la résultante des actions exercées par toutes les parties de ce courant sur le système, passe par l'extrémité de ce dernier. Les mêmes conséquences s'appliquent à un système fini; et il en résulte que l'action exercée sur ce dernier par l'assemblage des courants dont nous parlons, ne peut tendre à le faire tourner autour d'une droite passant par ses deux extrémités. L'auteur qui considère un aimant comme pouvant être remplacé par des assemblages de courants fermés, explique ainsi pourquoi la rotation continue ne peut s'obtenir qu'en faisant agir sur l'aimant un courant dont une partie passe par cet aimant ou par un fil métallique lié invariablement avec lui, afin que l'action de cette partie étant détruite par la réaction correspondante, le reste du circuit électrique agisse comme un courant non fermé.

L'action exercée sur un de ces systèmes que l'auteur nomme solénoïde, et qui serait infini dans un sens, par un système de courants fermés ou infinis dans les deux sens, passant, d'après ce qu'on vient de voir, par l'extrémité du premier système, M. Ampère détermine la direction et la grandeur de cette action en la rapportant au plan principal relatif au second système, pour le point où est située l'extrémité du premier, et il trouve :

1° Que l'action est dirigée suivant la normale à ce plan principal.

2° Qu'elle est dans un rapport constant avec l'action que le second système exercerait sur un élément de courant électrique situé au même point que l'extrémité du premier, et dans le plan principal. Ce rapport indépendant de la forme et de la grandeur des courants du second système, est celui de la surface du cercle décrit par chacun des courants du premier, au produit de la distance de deux de ces cercles et de la longueur de l'élément.

Pour avoir l'action exercée sur un tube fini, il suffit encore ici de le remplacer par deux autres dont les courants auraient des directions contraires, et qui se terminant chacun à une des extrémités du premier, seraient infiniment prolongés dans l'autre sens. On a ainsi la grandeur et la direction des deux forces passant par ces extrémités, et dont la réunion donne l'action totale exercée sur le système fini.

Lorsque le système qui agit sur le tube infini dans un sens est lui-même un tube infini dans un seul sens, il suffit d'appliquer ce qui a été dit dans le troisième paragraphe concernant la normale du plan principal de cette sorte de système et la valeur de la force qu'il exerce sur un élément situé dans ce plan, à ce qui vient d'être démontré à la fin du paragraphe précédent, pour en conclure,

1° Que l'action entre deux systèmes infinis dans un seul sens est dirigée suivant la ligne qui en joint les deux extrémités.

2° Qu'elle est en raison inverse du carré de la distance de ces deux extrémités.

En substituant à deux systèmes finis de ce genre des systèmes infinis équivalents, on en conclut immédiatement que leur action mutuelle se compose de quatre forces dirigées

suivant les quatre droites qui joignent les deux extrémités de l'un aux deux extrémités de l'autre; que deux de ces forces sont attractives, les deux autres répulsives, et toutes quatre proportionnelles à une quantité divisée respectivement par les carrés de ces quatre distances.

M. Ampère a considéré depuis long-temps les phénomènes des aimants comme produits par des courants électriques fermés qui existent, soit avant, soit après l'aimantation, autour de chaque particule des corps susceptibles de magnétisme. Il compare chacune de ces particules à une pile voltaïque dont les deux courants entrant par une extrémité opposée reviennent, à travers l'espace environnant, à l'autre extrémité. Ces circuits électriques forment ainsi un des systèmes qu'il nomme solénoïde fermé; et qui, d'après ce qui précède, ne peut exercer aucune action lorsque tous les courants sont de même intensité et équidistants, comme ils le sont nécessairement avant l'aimantation de la particule. Il se représente que si un conducteur ou un barreau aimanté vient à agir sur ces courants, ils doivent être déplacés et s'accumuler en plus grand nombre sur un côté de la particule. Alors le système des courants fermés qui en résulte, se compose d'une multitude de systèmes partiels dont l'un est fermé et a pour intensité celle du système total au point où il en a le moins, et dont les autres ne sont pas fermés. Par ce moyen, l'auteur applique aux effets magnétiques les résultats qu'il a trouvés pour les actions mutuelles des systèmes qu'il désigne sous le nom de solénoïdes. Il explique ainsi l'origine des forces que d'autres physiciens attribuent aux molécules de fluide austral et de fluide boréal. Il en conclut que le calcul des phénomènes provenant de ces actions, s'accorde

avec les principes qu'il a posés; et que toute explication de ce genre est commune aux deux hypothèses physiques, dont l'une admet les deux fluides d'espèce contraire, et l'autre fait consister ces effets magnétiques dans l'action des courants électriques fermés.

Nous terminerons ici la notice relative au travail de M. Ampère, parce que le sixième paragraphe du Mémoire ne concerne pas la théorie mathématique de l'électricité. Il contient des considérations générales sur les actions chimiques, sur les deux fluides électriques, et la décomposition ou composition du fluide neutre.

ANALYSE.

M. Poinsot a lu, dans la séance du 19 mai 1823, un Mémoire sur l'analyse des sections angulaires, et dans lequel il s'est proposé de généraliser et de rectifier, en plusieurs points importants, les formules qui se rapportent à cette analyse. Pour faire connaître avec précision et clarté l'objet de ces recherches, nous emprunterons les expressions de l'auteur. L'article suivant, extrait du Mémoire, contient le résumé de son travail.

« On y fait d'abord remarquer, dans les séries connues, une imperfection analytique qui avait échappé jusqu'ici aux géomètres, et qui consiste en ce que la série ne présente actuellement qu'une seule valeur, tandis que la fonction développée en a plusieurs, toutes différentes à raison des différents arcs qui ont un même sinus ou cosinus donné. L'objet principal du Mémoire est de faire disparaître ces imperfections, et de rétablir dans les nouvelles formules cette généralité ab-

solue, qui doit être le caractère propre des expressions de l'analyse.

« Mais en se bornant même à l'unique valeur de la fonction qui est relative à l'arc simple que l'on considère, et non pas à cet arc augmenté d'une ou de plusieurs circonférences, on a prouvé, dans ce Mémoire, que les séries connues ne sont applicables que lorsque la variable est comprise entre de certaines limites que le calcul détermine. Ainsi la formule d'Euler, qui développe la puissance du cosinus par les cosinus d'arcs multiples, n'est généralement vraie que pour un arc qui ne surpasse pas le premier quart de la circonférence pris en plus ou en moins. Au-delà, le cosinus est négatif, et la formule cesse d'être exacte pour l'arc dont il s'agit. La même analyse fait connaître le défaut précis de celle dont on avait déduit la série, et donne la solution de toutes les difficultés qu'on avait rencontrées sur ce point de doctrine. Il suit encore de cet examen que la double série donnée par Euler, et confirmée par l'analyse de La Grange pour l'expression complète du cosinus d'un arc multiple développée par les puissances descendantes de l'arc simple, n'est vraie que dans le cas de l'exposant entier; que si l'exposant est fractionnaire, la série est divergente et ne peut être appliquée. Le défaut de l'analyse dont on a déduit cette série, provient de ce que l'on y suppose tacitement le cosinus plus grand que le rayon; d'où il résulte que la formule générale à laquelle on est ainsi parvenu ne convient plus à la division des angles, mais à celle des secteurs considérés dans l'hyperbole équilatère. »

Nous ne pourrions ici entrer dans plus de détails sur ces différents points d'analyse. Les géomètres liront avec le plus

grand intérêt cette discussion dans l'ouvrage de M. Poinsot, qui fait partie de la collection de nos Mémoires et ne tardera point à être imprimé.

M. Cauchy a présenté, dans le cours de l'année 1823, plusieurs Mémoires d'analyse dont nous indiquerons sommairement l'objet. L'un concerne la détermination des intégrales définies, et la résolution des équations algébriques ou transcendantes par le moyen de ces mêmes intégrales; ce Mémoire est le complément de ceux que l'auteur a présentés en 1814, 1819 et 1821. Dans un second Mémoire, il s'est proposé d'intégrer les équations linéaires aux différences totales ou partielles, finies ou infiniment petites, lorsque les coefficients du premier membre sont constants, et il intègre aussi ces équations dans certains cas lorsque les coefficients sont variables; les procédés qu'il emploie sont indépendants de la résolution des équations algébriques. Le même auteur a lu à l'Académie, 1° le 27 janvier 1823, des recherches sur le mouvement de deux fluides superposés, l'un compressible, l'autre incompressible; 2° le 21 juillet, un Mémoire qui a pour objet d'exposer divers théorèmes analogues à ceux qui ont été donnés par l'auteur de la Théorie analytique de la chaleur, et qui servent à intégrer les équations propres à cette théorie.

M. Cauchy a continué de s'occuper du mouvement des ondes formées à la surface d'un fluide pesant. L'Académie avait décerné à son Mémoire, en 1815, un prix d'analyse mathématique; l'impression de cette pièce vient d'être terminée. L'auteur a joint, à son premier travail, des notes fort étendues dans lesquelles il traite divers points d'analyse et de

mécanique; les résultats de ses recherches intéresseront les géomètres.

Lorsqu'on a déprimé ou soulevé une petite portion de la superficie d'un liquide pesant, et que la cause qui avait changé l'état naturel de cette surface cesse d'être présente, il se forme des ondes qui se propagent jusqu'aux extrémités de la masse fluide. Il s'agit d'exprimer par le calcul les lois générales de cette propagation. Il est facile de former les équations différentielles de ce mouvement en conservant les conditions que les géomètres ont admises. Il reste à intégrer ces équations sous une forme propre à représenter distinctement le phénomène.

On obtient cette intégrale au moyen des théorèmes qui ont été donnés dans les Mémoires analytiques sur la chaleur; car la même méthode s'applique à des questions physiques très-variées que l'on n'était pas encore parvenu à résoudre. Pour connaître les lois générales du mouvement des ondes produites par l'émersion d'un très-petit corps, il est indispensable de conserver dans la solution une fonction qui exprime la forme entièrement arbitraire du solide plongé. C'est ce qui a lieu aussi dans une question analogue, celle des mouvements vibratoires d'une table élastique de dimensions indéfinies; la solution qu'on a donnée de cette question n'est générale que parce qu'on y a conservé une fonction entièrement arbitraire relative à la forme initiale de la surface. L'analyse par laquelle M. Cauchy exprime le mouvement des ondes satisfait à cette condition; elle convient à une forme quelconque du corps immergé; c'est le caractère principal des recherches qu'il vient de publier. Il en déduit une conséquence conforme à celle que nous avions fait remarquer

dans une note imprimée en 1818, savoir: que les vitesses et les hauteurs des différentes ondes produites par l'immersion d'un corps cylindrique ne dépendent pas seulement de la largeur et de la hauteur de la partie plongée, mais encore de la forme de la surface qui termine cette partie. On doit remarquer avec l'auteur le cas où la courbe propre à cette surface étant divisée en deux parties symétriques, tourne constamment sa convexité vers l'origine des coordonnées, et présente au point le plus bas une sorte de rebroussement. Alors les ondes propagées avec une vitesse constante peuvent se réduire à une seule. La solution donnée par M. Cauchy est exprimée sous une forme qui rend les applications numériques faciles, et elle représente dans tous ses détails la marche du phénomène. Les divers écrits à consulter sur cette question de la théorie des ondes sont : le Mémoire de de M. Poisson, imprimé dans la collection de l'Académie, année 1816; la note citée plus haut Bulletin, de la Société philomatique, année 1818, p. 129; le Mémoire de M. Cauchy, imprimé dans le recueil des pièces couronnées, et les notes qu'il y a jointes, et celle qu'il a insérée dans le Bulletin des Sciences, société philomatique, année 1818, page 178.

M. Fourier a lu, dans les séances du 10 et du 17 novembre 1823, un Mémoire d'analyse indéterminée sur le calcul des conditions d'inégalité. L'auteur s'est proposé de traiter dans ce mémoire un nouveau genre de questions, et d'établir les principes d'un calcul qui offre des applications variées à la géométrie, à l'analyse algébrique, à la mécanique et à la théorie des probabilités. Nous allons in-

diquer le caractère principal de ces recherches, et nous citerons quelques exemples simples, propres à en faire connaître l'objet.

Une question est en général déterminée lorsque le nombre des équations qui expriment toutes les conditions proposées est égal au nombre des inconnues. Dans la théorie dont il s'agit les conditions ne sont pas exprimées par des équations, c'est-à-dire qu'au lieu d'égaler à une constante ou à zéro une certaine fonction des inconnues, on indique, au moyen des signes < ou >, que cette fonction est plus grande ou moindre que la constante; c'est ce qui constitue une inégalité. On suppose, par exemple, que quatre indéterminées doivent être assujetties à un certain nombre d'inégalités du premier degré, et qu'il faut trouver toutes les valeurs possibles de ces inconnues. Le nombre des inégalités pourrait être moindre que celui des inconnues, ou lui être égal, et même il peut être beaucoup plus grand; il est, en général, indéfini. Il s'agit de trouver des valeurs des quatre inconnues qui, étant substituées simultanément, satisfont à toutes les conditions proposées, soit que ces conditions consistent seulement dans certaines inégalités, soit qu'elles comprennent aussi des équations Une question de cette espèce admet une infinité de solutions; elle est indéterminée. Il faut donner une règle générale qui serve à trouver facilement toutes les solutions possibles. On jugera d'abord que des questions semblables doivent se présenter fréquemment dans les applications des théories mathématiques. Dans plusieurs cas on peut arriver à la solution par des remarques particulières propres à la question que l'on veut résoudre : mais si le nombre des conditions est

assez grand, et si elles se rapportent à trois ou à plus de trois variables, si les inégalités ne sont pas linéaires, la suite des raisonnements devient si composée, qu'il serait presque toujours impossible à l'esprit le plus exercé de la saisir tout entière. Il faudrait d'ailleurs recourir à des considérations différentes, selon la nature de la question, comme cela arrive à l'égard de plusieurs problèmes que l'on résout sans le secours de l'algèbre. Il était donc nécessaire de ramener à un procédé général et uniforme le calcul des conditions d'inégalité; on supplée ainsi par une combinaison régulière et constante des signes, aux raisonnements les plus difficiles et les plus étendus, ce qui est le propre des méthodes algébriques. L'exposé de ces règles générales est l'objet du Mémoire; nous citerons en premier lieu un exemple très-simple de ce genre de questions.

On suppose qu'un plan triangulaire horizontal est porté par trois appuis verticaux placés aux sommets des angles. La force de chaque appui est donnée et exprimée par 1; c'est-à-dire que si l'on plaçait sur un appui un poids moindre que l'unité, ce poids serait supporté, mais que l'appui serait aussitôt rompu si le poids surpassait 1. On propose de placer un poids donné, par exemple 2, sur la table triangulaire en sorte qu'aucun des trois appuis ne soit rompu. La question serait déterminée si le poids donné était 3; elle est insoluble si ce poids surpasse 3; elle est indéterminée s'il est moindre que 3. Désignant par deux inconnues les coordonnées du point où l'on doit placer le poids proposé, et par trois autres inconnues les pressions exercées sur les appuis; et supposant, pour simplifier le calcul, que le triangle est isocèle-rectangle, on voit que la question

renferme cinq quantités inconnues, et une qui est connue, savoir, le poids proposé. Or les principes de la statique donnent immédiatement trois équations; et l'on y joindra, pour chaque sommet, deux inégalités qui expriment que la pression est positive et moindre que 1. Il est évident que toutes les conditions de la question seront alors exprimées. Il ne s'agit plus que d'appliquer les règles générales du calcul des inégalités linéaires; on en déduira toutes les valeurs possibles des coordonnées inconnues, et l'on désignera ainsi tous les points du triangle où le poids donné peut être placé. Si l'on forme cette solution, on trouve que les points dont il s'agit se réunissent dans l'intérieur de la table, et composent un hexagone lorsque le poids donné est compris entre 1 et 2. Cette figure devient le triangle lui-même si le poids est moindre que l'unité; elle est un triangle plus petit si le poids est compris entre 2 et 3, et elle se réduit à un seul point si le poids est égal à 3; enfin lorsqu'il surpasse 3 la figure n'existe plus, parce que les lignes qui doivent la former cessent de se rencontrer.

Voici la construction qui sert à tracer ces lignes. Désignant par 1 le côté du triangle isocèle-rectangle, on divise l'unité par le poids donné qu'il s'agit de placer, et l'on porte la longueur mesurée par le quotient : 1° sur chaque côté de l'angle droit, à partir du sommet de cet angle, ce qui donne deux points 1 et 2; 2° sur un des côtés de l'angle droit, à partir du sommet de l'angle aigu, ce qui donne un troisième point 3; 3° sur l'autre côté de l'angle droit, à partir du sommet de l'angle aigu, ce qui donne un quatrième point 4. On élève, par le point 1, une ligne perpendiculaire sur le côté où se trouve ce point, et par

le point 2 une seconde ligne perpendiculaire sur l'autre côté; enfin on mène une troisième ligne droite par les points 3 et 4. Ces trois lignes ainsi tracées terminent, sur la surface du triangle, l'espace où le point donné peut être placé sans qu'aucun des appuis soit rompu.

Il serait facile de résoudre sans calcul une question aussi simple; mais si le nombre des appuis est plus grand que trois, si leur force est inégale, si la table horizontale porte déja en certains points des masses données, ou si l'on doit y placer non un seul poids, mais plusieurs, on ne peut se dispenser de recourir au calcul des inégalités. *L'avantage de cette méthode consiste en ce qu'il suffit, dans tous les cas, d'exprimer les conditions de la question, ce qui est facile, et de combiner ensuite ces expressions, au moyen des règles générales qui sont toujours les mêmes; et l'on forme ainsi la solution à laquelle on n'aurait pu parvenir que par une suite de raisonnements très-compliqués.*

Les questions que l'on traite dans ce Mémoire sont toutes indéterminées, parce qu'elles admettent une infinité de solutions; mais elles diffèrent entre elles quant à l'étendue. Dans les unes, les conditions exigées restreignent beaucoup cette étendue; pour d'autres, l'énumération de toutes les solutions possibles est moins limitée; il est nécessaire, dans certaines recherches, de considérer les questions sous ce rapport. Un examen attentif prouve que l'étendue propre à chaque question est une quantité mathématique que l'on peut toujours évaluer en nombres: c'est en cela que la théorie dont on expose les principes se lie à celle des probabilités, et il y a en effet divers problèmes dépendants de cette dernière science, qui se résolvent par le calcul des inégalités. Or, on

ne peut mesurer l'étendue ou capacité d'une question, sans comprendre dans l'énumération toutes les solutions possibles; en sorte qu'on doit ici faire usage du calcul intégral; et, en effet, l'auteur a reconnu que le nombre qui mesure l'étendue d'une question quelconque, est toujours exprimé par une intégrale définie multiple, dont les limites sont données. Il est très-facile d'effectuer ces intégrations successives, quel qu'en soit le nombre; et si l'on écrit les limites des intégrales, en se servant de la notation proposée dans la *Théorie analytique de la chaleur,* la quantité que l'on veut déterminer est exprimée sous la forme la plus générale et la plus simple.

Il est évident que les conditions proposées pourraient être telles que la question n'admît aucune solution possible. Dans ce cas, le calcul développe l'opposition réciproque des conditions, et montre l'impossibilité d'y satisfaire. Ainsi la méthode a pour objet : 1° de reconnaître si la question peut être résolue; 2° de trouver dans ce cas toutes les solutions qu'elle admet; 3° de mesurer par un nombre l'étendue propre à la question. Il arrive souvent aussi, dans ce genre de recherches, que l'objet principal n'est pas de trouver toutes les solutions, mais d'en reconnaître une ou plusieurs limites. Sous ce point de vue, la question n'est pas indéterminée, et il en est de même de celle qui consiste à mesurer l'étendue. Mais ces questions dépendent de la même analyse. Nous ne pouvons ici qu'indiquer bien imparfaitement les applications et les résultats de cette méthode : on s'est borné à citer quelques exemples.

Nous venons de rapporter le premier. Le second concerne une question de mécanique analogue à la précédente, mais qui en diffère en ce que la quantité inconnue est une limite, et par conséquent a une seule valeur.

On suppose qu'une surface plane et horizontale, de figure carrée, est portée sur quatre appuis verticaux, placés aux sommets des angles; chacun des appuis peut supporter un poids moindre que l'unité, mais il romprait aussitôt s'il était chargé d'un poids plus grand que cette unité. On marque un point quelconque sur la table horizontale, et l'on demande quel est le plus grand poids que l'on puisse placer en ce point donné sans qu'aucun des appuis soit rompu. Ce plus grand poids, c'est-à-dire la force de la table en ce lieu, dépend évidemment de la position du point. Concevons qu'on y élève une ordonnée verticale pour représenter le plus grand poids qui répond à ce lieu, et qu'ayant fait cette construction pour chaque point de la table horizontale, on trace la surface courbe qui passe par toutes les extrémités supérieures des ordonnées.

Il s'agit de déterminer la nature et les dimensions de cette surface. Or la solution déduite du calcul prouve que la surface qni serait ainsi tracée n'est point assujettie à une loi continue; elle est formée de plusieurs surfaces hyperboliques, différemment situées : la question est résolue par la construction suivante.

On divise le carré en huit parties égales, au moyen des deux diagonales et de deux droites transversales, dont chacune joint le milieu d'un côté au milieu du côté opposé. Chacune de ces huit parties est un triangle rectangle que l'on divise en deux segments, dont l'un a trois fois plus de surface que l'autre. Cette division s'opère en menant une ligne droite de l'angle droit du triangle à l'un des angles du carré. On prend pour base de chacun de ces segments, celui de ses trois côtés qui est parallèle à un côté du carré. Pour

trouver le plus grand poids qui puisse être placé en un point donné du plus grand segment, il faut, par ce point, mener une parallèle à la base du segment, jusqu'à la rencontre de celle des deux diagonales dont le point est le plus éloigné, et mesurer sur cette parallèle la longueur interceptée entre le point de rencontre et le point donné; l'unité, divisée par cette longueur interceptée, est la valeur cherchée du plus grand poids.

Si ce point donné est situé dans le petit segment, il faut, par ce point, mener une parallèle à la base du segment, jusqu'à la rencontre de celui des côtés du carré dont le point donné est le plus distant, et mesurer la partie de cette parallèle qui est interceptée entre le point de rencontre et le point donné. L'unité, divisée par la moitié de la longueur interceptée, exprime la valeur cherchée du plus grand poids. En appliquant l'une ou l'autre règle à chacun des seize compartiments du carré, on connaîtra le plus grand poids qui puisse être placé en chaque point de la table rectangulaire. On voit que la valeur de l'ordonnée verticale qui mesure ce plus grand poids n'est pas assujettie à une loi continue. Cette loi change tout-à-coup lorsqu'on passe du grand segment au petit segment. Il serait facile de trouver cette solution sans calcul, et l'auteur l'avait donnée depuis long-temps. Mais si la figure du plan est différente; si le nombre des appuis est plus grand que quatre; si la table supporte déja en certains points des masses données, il est nécessaire de recourir aux règles qui servent à la combinaison des inégalités.

Parmi les applications que l'auteur a faites de sa méthode, les unes ont, comme les deux précédentes, pour principal objet de faire connaître la nature de ce nouveau genre de

problèmes, et la forme générale du calcul. D'autres concernent des questions très-difficiles et très-étendues, dont la solution était néeessaire aux progrès des théories analytiques. L'une se rapporte à l'usage des équations de condition si important pour la formation des tables astronomiques. Il s'agit de trouver les valeurs des inconnues telles que la plus grande erreur, abstraction faite du signe, soit la moindre possible; ou telles que l'erreur moyenne, c'est-à-dire la somme des erreurs, abstraction faite du signe divisée par leur nombre soit la moindre possible.

Une seconde application se rapporte à l'analyse générale; elle a pour objet de former les termes successifs de la valeur de chacune des inconnues qui entrent dans des équations littérales données. L'auteur considère la résolution des équations littérales à plusieurs inconnues comme dépendante de la recherche simultanée de toutes les racines; soit que le nombre de leurs termes soit fini, ce que l'opération indique; soit qu'on développe ces racines en séries infinies.

Dans l'une et l'autre question que l'on vient de citer, les cas où il ne se trouve qu'une seule inconnue sont déja résolus; et ils ont pu l'être sans le calcul des conditions d'inégalité : mais cette recherche prend un caractère très-différent lorsqu'on veut l'étendre à un nombre quelconque d'inconnues. La solution dépend alors d'une théorie particulière, dont les principes se retrouvent dans les questions les plus difficiles et les plus variées. C'est cette théorie que l'auteur s'est proposé de former.

Nous rappelerons dans la suite de ces analyses l'application relative aux équations littérales à plusieurs inconnues. Nous ne pouvons ici que faire connaître succinctement le

principe de la solution d'une des questions les plus remarquables; celle qui se rapporte aux erreurs des observations.

On considère des fonctions linéaires de plusieurs inconnues x, y, z; les coefficients numériques qui entrent dans les fonctions sont des quantités données. Si le nombre des fonctions n'était pas plus grand que celui des inconnues, on pourrait trouver pour x, y, z, un système de valeurs numériques tel que la substitution simultanée de ces valeurs dans les fonctions donnerait pour chacune un résultat nul. Mais on ne peut pas en général satisfaire à cette condition, lorsque le nombre des fonctions surpasse celui des inconnues. Supposons maintenant que l'on attribue à x, y, z, des valeurs numériques α, β, γ, etc., et qu'en les substituant dans une fonction, on calcule la valeur positive ou négative du résultat de la substitution, on considère comme une erreur ou écart le résultat positif ou négatif qui diffère de zéro; et, faisant abstraction du signe, on prend pour mesure de l'erreur le nombre d'unités positives ou négatives que le résultat exprime.

Cela posé, on demande quelles valeurs numériques X, Y, Z, etc., il faut attribuer à x, y, z, etc., pour que le plus grand écart, provenant de la substitution dans les diverses fonctions proposées, soit moindre que le plus grand écart que l'on trouverait, en substituant dans les fonctions tout autre système de valeurs différent de celui-ci x, y, z, etc.

On pourrait aussi chercher un système X′ Y′ Z′, etc., de valeurs simultanées de x, y, z, etc., tel que la somme des erreurs, prise abstraction faite du signe, soit moindre que la somme des erreurs provenant de la substitution de tout système différent de X′ Y′ Z′, etc.

L'une et l'autre question se résolvent par l'analyse des inégalités, quel que soit le nombre des inconnues. Il suffit d'exprimer les conditions propres à la question, et d'appliquer aux inégalités écrites les règles générales de ce calcul. On supplée ainsi par un procédé algorithmique à des raisonnements très-composés qu'il faudrait changer selon la nature de la question, et qu'il serait, pour ainsi dire, impossible de former si le nombre des inconnues surpassait trois.

Lorsque le nombre des valeurs est assez grand, il est nécessaire de réduire les opérations au moindre nombre possible. On y parvient en considérant les propriétés des *fonctions extrêmes.* On appèle ainsi celles qui peuvent être ou plus grandes ou plus petites que toutes les autres. La construction suivante représente clairement la méthode qui doit être suivie pour arriver sans calcul inutile aux valeurs de x, y, z, etc., qui donnent au plus grand écart sa moindre valeur. L'auteur a donné cette construction, parce qu'il la regarde comme formant le point capital de la question, et qu'elle en résoud seule toutes les difficultés. Non seulement elle rend la solution sensible et la fixe dans la mémoire : mais elle sert à la découvrir ; et, quoique propre au cas de deux variables, elle suffit pour faire bien connaître le procédé général.

x et y sont, dans le plan horizontal, les coordonnées d'un point quelconque ; l'ordonnée verticale z mesure la valeur de la fonction, chaque inégalité est représentée par un plan dont la situation est donnée. Dans la question dont il s'agit, le nombre de ces plans est double du nombre des fonctions, parce qu'il faut attribuer à chaque valeur le signe + et le signe —. On ne considère que les par-

ties des plans qui sont placées au-dessus du plan horizontal des x et y, et ces parties supérieures des plans donnés sont indéfiniment prolongées. Il faut principalement remarquer que le système de tous ces plans forme un vase qui leur sert de *limite* ou d'*enveloppe*. La figure de ce vase extrême est celle d'un polyèdre, dont la convexité est tournée vers le plan horizontal. Le point inférieur du vase ou polyèdre a pour ordonnées les valeurs X, Y, Z, qui sont l'objet de la question, c'est-à-dire que Z est la moindre valeur possible du plus grand écart, et que X et Y sont les valeurs de x et y propres à donner ce minimum, abstraction faite du signe.

Pour atteindre promptement le point inférieur du vase, on élève en un point quelconque du plan horizontal, par exemple à l'origine des x et y, une ordonnée verticale jusqu'à la rencontre du plan le plus élevé, c'est-à-dire que parmi tous les points d'intersection que l'on trouve sur cette verticale, on choisit le plus distant du plan des x et y. Soit m_1 ce point d'intersection placé sur le plan extrême. On descend sur ce même plan et dans un plan vertical, depuis le point m_1 jusqu'à un point m_2 d'une arrête du polyèdre, et en suivant cette arrête on descend de nouveau depuis le point m_2 jusqu'à un sommet m_3 commun à trois plans extrêmes. A partir du point m_3 on continue de descendre suivant une seconde arrrête jusqu'à un nouveau sommet m_4, et l'on continue l'application du même procédé, en suivant toujours celle des deux arrêtes qui conduit à un sommet moins élevé. On arrive ainsi au point le plus bas du polyèdre. Or cette construction représente exactement la série des opérations numériques que la règle analytique prescrit;

elle rend très-sensible la marche de la méthode qui consiste à passer successivement d'une fonction extrême à une autre, en diminuant de plus en plus la valeur du plus grand écart. Le calcul des inégalités fait connaître que le même procédé convient à un nombre quelconque d'inconnues, parce que les fonctions extrêmes ont dans tous les cas des propriétés analogues à celles des faces du polyèdre qui sert de limite aux plans inclinés. En général, les propriétés des faces, des arrêtes, des sommets et des limites de tous les ordres, subsistent dans l'analyse générale, quel que soit le nombre des inconnues. Les bornes de ces extraits ne nous permettent point une exposition détaillée, qui pourrait seule donner une connaissance complète de la méthode, et de l'ordre qu'il faut établir dans les opérations numériques, lorsque le nombre des fonctions est très-grand; mais la construction précédente suffit pour montrer le caractère de la solution.

MÉCANIQUE ET APPLICATION DIVERSES.

M. Ch. Dupin a présenté à l'Académie, dans le cours de cette année, un ouvrage intitulé *Applications de géométrie et de mécanique à la marine, aux ponts et chaussées, etc.*, pour faire suite aux développements de géométrie. Sous le titre de développemens de géométrie, M. Dupin a publié des recherches théoriques relatives à la courbure des surfaces : il en a fait des applications importantes, dont nous allons indiquer l'objet; elles sont rassemblées dans son ouvrage, et précédées de considérations générales sur les avantages que les sciences et les arts peuvent retirer de la géométrie.

Le premier Mémoire traite de la stabilité des corps flottants. L'auteur conçoit 1° une surface, formée par tous les centres de carène, d'un vaisseau qui, sans changer de poids, serait incliné successivement dans toutes les positions possibles ; 2° une autre surface qui, dans la même hypothèse, aurait pour plans tangents les plans de flottaisons, qui correspondent aux diverses positions des corps flottants. L'une et l'autre surface, et principalement la première, celle des centres de carène, offrent des propriétés remarquables. La direction des lignes de plus grande et de moindre courbure de cette surface est la direction même de moindre ou de plus grande stabilité du vaisseau. La longueur des deux rayons de courbure sert à déterminer les grandeurs et les rapports de ces deux stabilités. L'auteur considère ensuite les stabilités, qu'il nomme conjuguées, et dont l'examen conduit à des conséquences intéressantes et nouvelles.

Le second Mémoire concerne le tracé des routes : l'auteur montre que les déterminations relatives à ce tracé dépendent, comme la stabilité des corps flottants, de conditions géométriques. Il établit ces conditions, et s'en sert pour indiquer les routes qu'il est le plus avantageux de suivre sur des terreins à simple et à double courbure de forme quelconque.

Dans le troisième Mémoire, l'auteur applique les résultats du tracé des routes isolées à celui des systèmes de routes qui offrent le plus d'avantage pour opérer les mouvemens de matériaux, appelés déblais dans leur position primitive, et remblais dans la position qui a lieu après le déplacement. On suppose toujours que la forme du terrein, avant et après ces mouvements, est une surface courbe quelconque, et que

les transports s'effectuent en suivant la figure du terrein. Cette question avait été traitée précédemment, mais on supposait les routes toujours rectilignes, ce qui particularise la recherche.

La grande généralité des propositions que l'auteur établit, les rend applicables à des effets très-divers; par exemple, aux phénomènes de la réflexion et de la réfraction; c'est l'objet du quatrième Mémoire, dans lequel M. Dupin démontre et généralise une proposition de Malus sur la réflexion des rayons qui, étant normaux à une surface, ont par cela même la propriété de rester toujours normaux à une surface, quoiqu'ils soient réfléchis par un nombre quelconque de miroirs.

Dans ce Mémoire, l'auteur détermine la direction des rayons réfléchis qui se coupent consécutivement, en considérant les propriétés des lignes qu'il nomme tangentes conjuguées, et indicatrices de la courbure, et ces mêmes propriétés lui avaient servi pour déterminer, dans les corps flottants, la direction des stabilités conjuguées.

Le troisième Mémoire traite de la construction des vaisseaux anglais: la société royale de Londres a fait imprimer ce Mémoire dans les Transactions philosophiques pour 1817.

L'auteur s'est attaché à montrer les avantages d'une charpente oblique, appliquée à la construction des vaisseaux; toutes les recherches, qui sont l'objet de son ouvrage, intéresseront les géomètres, et présentent des considérations très-utiles aux progrès des arts de la marine.

M. Dupin a continué la publication de ses voyages dans la Grande-Bretagne; l'histoire de l'académie présente l'ana-

lyse des deux premières parties. La troisième est intitulée Force commerciale, section des travaux publics.

Dans le premier volume, l'auteur développe le système de législation établi depuis long-temps en Angleterre, et que l'expérience a perfectionné.

Dans cette contrée, les grands travaux civils sont généralement exécutés par des associations : M. Dupin fait connaître l'esprit qui les dirige, la forme des concessions, la marche à suivre pour obtenir l'acte législatif qui les constitue, et pour profiter de cet acte en accomplissant les travaux.

L'auteur explique ensuite le système du tracé, de l'établissement des entretiens des routes de diverses espèces. Il décrit la nouvelle méthode de M. Macadam, relative aux routes ferrées : il en montre les avantages, et indique les inconvénients à éviter; il fait connaître le tracé, les travaux et le système de canaux. Il en décrit les ouvrages d'art remarquables, et rapporte les conséquences que l'expérience a fournies.

Pour montrer l'influence de ces moyens de communication sur le commerce et l'industrie, il classe, suivant une méthode qui lui est propre, cette multitude de canaux dont l'Angleterre est sillonnée dans tous les sens, et fait remarquer les rapports qu'ils ont avec les principaux centres de négoce et de productions; par exemple, Londres, Manchester, Birmingham, Liverpool, Bristol. Le dernier livre du premier volume concerne les ponts : l'auteur explique la législation relative à ces travaux, et le mode de construction. Il fait connaître les ponts les plus modernes et les plus remarquables. Il traite séparément des ponts en pierre et en fer; il explique dans un chapitre spécial, et fort étendu, le nouveau

système de ponts, d'aquéducs et d'embarcadères, suspendus à des câbles ou à des chaînes.

Le deuxième volume de la troisième partie, qui est le sixième de la collection des voyages, contient la description des ports et des côtes de l'Angleterre et de l'Écosse. L'auteur part de Londres, descend la Tamise, tourne au nord pour suivre la côte de l'est, revient au sud par la côte de l'occident, et finit en longeant la côte méridionale. Dans le cours de ce voyage, M. Dupin décrit les travaux importants du commerce et de la navigation. On remarquera surtout les descriptions des docks ou bassins de Londres. Il examine avec soin la structure de leurs murs de revêtement, de leurs écluses, de leurs magasins, de leurs hangars, le jeu des machines les plus parfaites qu'on emploie pour économiser la main-d'œuvre et le temps.

On remarquera aussi la description du pont en fer de Sunderland, des routes en fer et des embarcadères de Sunderland. des deux shielos et de Newcastle, du phare de Bell-Rock, du canal Calédonien, et du canal de Forth et Clyde, qui tous deux traversent l'Écosse pour réunir la mer Germanique à l'océan Atlantique. On lira particulièrement avec intérêt la description qu'il donne des grands ouvrages d'art exécutés pour les ports de Leith, d'Aberdeen, de Glasgow, de Liverpool, de Bristol. L'auteur cite avec un soin particulier, en parlant de ces grandes cités, leurs institutions littéraires et les établissements d'instruction qui concourent à la prospérité de l'industrie, au développement et à la splendeur du commerce; il décrit les monuments de bienfaisance et de charité, fondés dans ces mêmes cités par les hommes que le commerce a enrichis; le tableau de ces nombreux établisse-

ments est le plus beau spectacle et le plus bel exemple que la civilisation moderne puisse offrir à l'admiration des peuples.

Une collection de planches, grand atlas, accompagne l'ouvrage de M. Dupin : elles sont gravées avec beaucoup de perfection, et exactement dessinées par l'auteur, selon les méthodes de la géométrie descriptive, science dont personne ne connaît mieux que lui les procédés et les avantages.

M. Dupin décrit aussi, dans la troisième partie, tout ce qui contribue au développement et à la gloire du commerce intérieur. La quatrième partie est réservée au commerce extérieur de la Grande-Bretagne avec ses colonies et les autres nations.

M. Dupin a publié un écrit intitulé: *Tableau des progrès de l'industrie française depuis le commencement du* 19e *siècle*. L'auteur fait connaître les progrès des arts qui empruntent le secours de la mécanique, et surtout des arts consacrés à la fabrication des tissus. Il termine par un exposé rapide des inventions et des perfectionnements les plus remarquables dûs aux artistes français, et signalés par la dernière exposition publique des produits de notre industrie.

Dans la séance du 30 juin 1823, M. Girard a lu un troisième mémoire relatif aux canaux de navigation, considérés sous le rapport de la chute et de la distribution de leurs écluses.

Après avoir démontré, dans ses deux mémoires précédents, que l'on parvient à économiser un volume d'eau considérable en réduisant la chute des écluses d'après certaines conditions, l'auteur s'est proposé de prouver, dans ce troisième mémoire, qu'indépendamment de cette économie d'eau, la réduction de chute des écluses qui doivent racheter une pente donnée entre

deux extrémités fixes, produit encore une économie notable dans la dépense de première construction de tous les ouvrages dont le canal est composé: ces ouvrages consistent en déblais et remblais de terre, et en ouvrages d'art.

M. Girard démontre, d'abord, que la dépense des terrassements diminue toujours plus rapidement que la chute des écluses ne décroît. Quant à celles-ci, il distingue les diverses parties de cet ingénieux appareil, et réglant leurs dimensions d'après l'objet spécial qu'elles sont destinées à remplir, il recherche qu'elle doit être sur un canal donné la chute commune de chacune de ses écluses, pour que la dépense de leur construction devienne la moindre possible. Les résultats de cet examen prouvent généralement que pour remplir cette condition, la chute ne doit jamais être supérieure au tirant d'eau des plus grands bateaux qui naviguent sur le canal, soit que l'on construise les écluses dont il s'agit en maçonnerie, soit qu'on les construise en charpente. Après avoir été conduit à cette conclusion remarquable, M. Girard fait voir que si l'on se borne à considérer les murs de revêtement d'une écluse, l'équation qui exprimera le rapport de sa chute à la dépense de sa construction, sera celle d'une hyperbole rapportée à l'un de ses grands diamètres, de sorte qu'en-deçà et au-delà de la chute qui correspond au *minimum* de dépense, il y a des chutes inégales, de dépense équivalente.

Il résulte des recherches théoriques, qui sont l'objet de ce mémoire, que la réduction de chute des écluses, loin d'augmenter la dépense de leur établissement, peut dans beaucoup de circonstances contribuer à diminuer cette dépense, en même temps qu'elle opère, sur le volume d'eau nécessaire à l'entretien de la navigation, une économie plus ou moins

considérable ; c'est la plus importante et la première de celles qu'on doit se proposer d'obtenir.

M. Mongez, dont les savantes recherches embrassent des questions très-variées, a lu, dans le cours de cette année, deux Mémoires à l'Académie des sciences.

L'un est relatif à l'art du tissage chez les anciens Perses. L'auteur avait entretenu l'Académie royale des inscriptions et belles-lettres, dont il est membre, d'une interprétation qu'il donne d'un passage remarquable des Guêpes d'Aristophane. Il conclut de ce passage que, dès le cinquième siècle avant l'ère vulgaire, l'Asie fabriquait déja des tissus recherchés à Athènes et d'un prix très-élevé. M. Mongez compare ces étoffes fabriquées à Suze et à Ecbatane, ou plutôt apportées dans ces villes par le commerce, aux tissus de cachemire, et il rappelle à ce sujet la propriété qu'ont les tissus de ce genre de former des plis très-variés, fins et légers, qui ne laissent aucune trace ; il y trouve le caractère des draperies des belles statues grecques du style de Phidias. Ces sculptures diffèrent sous ce rapport de celles de l'école d'Égine, dont les plis très-fins et très-multipliés indiquent l'emploi des toiles de lin ou de coton préparées au moyen de quelque enduit.

Le second écrit de M. Mongez est une note relative à certains effets des pénombres. Il s'est proposé d'appeller l'attention des physiciens sur le rapprochement subit des pénombres de deux corps éclairés par le soleil dégagé des nuages. Lorsqu'on diminue insensiblement la distance des deux corps, il se forme, au moment de la superposition des pénombres, une figure composée dont les propriétés pourraient être dédéterminées par le calcul.

Une commission, composée de MM. de Humboldt, Gay-Lussac et Arago, avait été chargée d'examiner plusieurs instruments proposés par M. Gambey, savoir, une boussole et un héliostat, de son invention, et un appareil qui sert à vérifier l'horizontalité d'une lunette méridienne. Le rapport, fait au nom de cette commission par M. Arago, expose tous les avantages de ces nouveaux instruments, et montre par quelles combinaisons l'artiste ingénieux à qui on les doit est parvenu à rendre les observations plus faciles et plus précises. L'appareil destiné à faire connaître si la lunette est horizontale, est fixé à demeure; il convient à toutes les inclinaisons, il reste toujours sous les yeux de l'observateur, afin d'indiquer les moindres variations au moment où elles ont lieu. Ce sont ces trois conditions qui rendent ce procédé très-préférable à ceux qui ont été en usage jusqu'ici, et il en doit résulter un nouveau degré d'exactitude dans l'observation des ascensions droites.

Dans la boussole que M. Gambey a présentée à l'Académie, l'aiguille est supportée par un fil de soie non tordu, mode de suspension qui est devenu pour Coulomb un moyen de découverte; mais le procédé de ce grand physicien laissait subsister plusieurs causes d'incertitude, qui sont toutes prévues dans le nouvel instrument, en sorte qu'il devient facile d'y obvier. Ce qu'il offre de plus remarquable, consiste dans le moyen d'amener à une exacte coïncidence les axes optiques de la lunette et du microscope.

Le troisième appareil de M. Gambey est un héliostat. On sait que cet instrument a pour objet de conserver aux rayons du soleil réfléchis une direction fixe, nonobstant l'effet du mouvement diurne. Il a été inventé par S'gravesande, et per-

fectionné par MM. Charles et Malus. Toutefois les observations récentes et très-délicates dans lesquelles on l'emploie, rendaient nécessaire un plus haut degré d'exactitude. La solution donnée par M. Gambey est à la fois plus simple et plus complète; son instrument offre tous les moyens de vérification, il s'oriente à l'aide d'une petite lunette dirigée sur une mire méridienne, et les rayons réfléchis peuvent être portés dans tous les azimuths et à toutes les hauteurs.

La commission, en terminant son rapport, a rappelé que M. Gambey est aussi l'auteur d'un très-bel équatorial, qui, dans la dernière exposition au Louvre, a fixé l'attention et obtenu les suffrages de tous les artistes de la capitale. La lunette qu'il dirige, se meut, ce sont les expressions mêmes du rapport, « comme les étoiles de l'orient à l'occident, d'un mouvement continu et tellement uniforme, que l'emploi d'un puissant microscope n'y ferait pas découvrir d'inégalité sensible. » Indépendamment de ce mécanisme d'horlogerie d'une rare perfection, l'équatorial présente une nouvelle combinaison de contre-poids, une graduation singulièrement exacte, et un travail fini, dont il n'y avait pas de modèle en France, si ce n'est dans quelques instruments de M. Fortin.

Il est important de faire remarquer que M. Gambey doit les succès qu'il vient d'obtenir, et qui le placent au rang des plus excellents artistes, à la réunion d'un talent naturel d'exécution, et de connaissances variées dans les mathématiques et la physique.

L'Académie, après avoir entendu le rapport, a accordé son approbation aux trois instruments présentés, et a décidé que les descriptions, accompagnées des dessins de l'auteur, seraient publiées dans le recueil des savants étrangers.

M. Mathieu a fait, au nom d'une commission, un rapport sur une machine à diviser de l'invention de M. Gambey.

On connaît assez généralement l'usage que l'on fait de la plate-forme pour transporter les divisions d'un grand cercle sur le limbe d'un petit instrument. On peut se servir dans cette application d'un procédé du célèbre Ramsden, qui consiste à faire mouvoir la plate-forme sur son centre. Une des conditions que cette opération exige, est celle de l'exacte coïncidence des centres. M. Gambey ne s'est point proposé de perfectionner les moyens d'observer cette coïncidence des centres, mais il est parvenu à rendre l'opération indépendante d'une parfaite exactitude du centrage. Il se fonde sur une proposition de géométrie, et il en déduit un procédé qui donne des graduations fort nettes et fort exactes, nonobstant quelques inégalités dans la position des centres ou dans les dimensions de la machine. Un des avantages les plus remarquables de ce procédé, consiste en ce qu'il dispense d'enlever l'axe du cercle à diviser, opération gênante, et qui entraîne des erreurs presque inévitables. La commission propose, et l'Académie décide que la description de cette machine à diviser les instruments d'astronomie et de géodésie sera insérée dans la collection des mémoires des savants étrangers.

L'Académie avait nommé une commission composée de MM. le comte Chaptal, Mongez et Molard, pour prendre connaissance des procédés chimiques et mécaniques employés par M. de Puymaurin fils pour la fabrication des médailles de bronze moulées et frappées. M. Molard a fait un rapport au nom de cette commission. Cette pièce contient des dé-

tails scientifiques et historiques très-remarquables concernant le moulage ancien des médailles de bronze, les médailles coulées entre deux coins d'acier gravés en creux, la préparation des médailles dans des moules de cuivre, la trempe du bronze et la décarbonisation de l'acier par la limaille de fer. La commission annonce que M. de Puymaurin a donné aux moules une perfection qu'ils n'avaient pas avant lui, en formant un modèle de jet qui s'adapte parfaitement aux médailles et qui se moule avec les pièces.

Le titre qui a paru à M. de Puymaurin le plus propre à la fabrication des médailles, est celui de huit à douze pour cent d'étain sur quatre-vingt-douze à quatre-vingt-huit pour cent de cuivre. Cet alliage est sonore, dense; son grain est doux, serré; sa couleur agréable à l'œil. Il est à la fois assez malléable pour recevoir, après la trempe, l'empreinte des coins, et assez dur pour résister au frottement. Une pression ordinaire suffit pour la fabrication; enfin, il réunit tous les avantages que l'on peut désirer. C'est aussi celui que les Romains ont employé pour leur monnaie de bronze. M. de Puymaurin s'est fait un devoir de reconnaître dans son ouvrage tout ce qu'il doit aux conseils éclairés par l'expérience de MM. Mongez et Darcet au sujet de la nature et des propriétés chimiques et physiques du bronze, ainsi que de son emploi dans les arts et de la fabrication des médailles par les anciens. Il décrit avec beaucoup de soin toutes ses expériences, et indique tous les soins à prendre pour la fonte des médailles en bronze, leur trempe avant la frappe, et le monnoyage de ces médailles, opérations qu'il a rendues aussi simples que faciles. L'Académie, conformément à l'avis de sa commission, a approuvé le travail important de M. de Puymaurin fils.

M. Desprets a présenté à l'Académie plusieurs Mémoires sur la densité des vapeurs et les quantités de chaleur ou latente ou sensible qu'elles contiennent. Dans un de ces Mémoires l'auteur prouve, par la voie de l'expérience, que la loi de Mariotte sur la condensation des gaz est applicable aux vapeurs depuis la pression de quelques centimètres jusqu'à 0^m 76. Ces expériences, faites avec tout le soin convenable, ont conduit l'auteur à conclure que les densités des vapeurs sont en effet proportionnelles aux pressions, lorsqu'on tient compte du changement de température. On ne peut donc point admettre, comme l'ont supposé d'autres physiciens, que cette même loi a lieu indépendamment de la correction relative à la température. M. Desprets ajoute aussi, dans ce Mémoire, de nouvelles expériences à celles qu'il avait déja faites, et qui lui ont servi à prouver qu'une loi que plusieurs physiciens avaient admise, concernant les forces élastiques des vapeurs, n'est point entièrement exacte. Il trouve, pour l'eau et la térébenthine, un écart de plus de 14 degrés. Dans un autre Mémoire, M. Desprets, dont les recherches embrassent des branches très-importantes de la physique, rapporte les résultats de ses expériences concernant les chaleurs latentes des vapeurs d'eau, d'alcohol, d'éther sulfurique et d'essence de térébenthine; il montre que les quantités de chaleur latente de ces vapeurs sont sensiblement en raison inverse des densités. La densité de la vapeur d'eau doit être prise au moment de l'ébullition, et par conséquent corrigée de la température.

Les résultats moyens sont les suivants :

LIQUIDES.	CHALEUR totale contenue dans la vapeur, du point d'ébullition à zéro.	CHALEUR latente.	Les deux colonnes précédentes réduites dans le rapport des capacités et rapportées à l'eau. Chaleur totale.	Chaleur latente.	DENSITÉ de la vapeur à zéro.	DENSITÉ au point d'ébullition.
Eau........	631,0	531,0			0,623	0,451
Alcohol.....	410,7	331,9	255,5	207,7	0,613	1,258
Éther sulfurique.....	210,0	174,5	109,3	90,8	2,586	2,28
Essence de térébenthine..	323	166,2	149,2	76,8	5,01	3,207

M. Vauquelin a fait, au nom d'une commission, un rapport détaillé concernant un nouveau genre d'expériences, dont on est redevable à M. le baron Cagniard de Latour. Elles consistent à soumettre différentes substances, soit isolées, soit réunies, à l'action de la chaleur et à la compression. Les instruments employés sont très-simples ; les résultats sont des faits d'un ordre particulier. On n'avait encore rien observé de semblable, lorsque M. de Latour a commencé à rendre ses recherches publiques. Ces faits inattendus intéressent la théorie de la statique des gaz et vapeurs, et méritent toute l'attention des physiciens et des géomètres ; nous en citerons un exemple. On introduit dans un tube de verre un volume d'éther un peu moindre que la moitié de la capacité du tube, on ferme ce tube, et on l'expose par degrés à la flamme d'une lampe d'Argant. La température, et par conséquent la pression, s'accroissent, le liquide augmente progressivement de volume, et il occupe

presque tout l'intérieur du vase ; puis il disparaît tout-à-coup à la température de 165 degrés centigrades environ. Il se forme une vapeur d'éther dont la densité est à peu près la moitié de celle du liquide introduit, et presque égale à celle qu'avait le liquide au moment qui précède la conversion en vapeurs. Cet état intermédiaire de vapeur extrêmement comprimée, qui, pour nous servir de l'expression du savant rapporteur, est en quelque sorte une vapeur coulante, et tous les faits analogues, dont on doit la connaissance à l'auteur du Mémoire, constituent une classe spéciale d'observations dont l'étude contribuera certainement aux progrès de la physique. On expose dans le rapport, avec beaucoup de clarté, les résultats principaux des recherches de M. de Latour ; on décrit les appareils et les moyens ingénieux dont il s'est servi pour graduer les tubes, pour connaître approximativement les pressions exercées ; enfin on indique les conséquences que son travail donne lieu d'entrevoir. Au reste, l'auteur du Mémoire a dû s'attacher d'abord, dans une matière nouvelle, à reconnaître la marche générale des faits, et il sera nécessaire, par la suite, de mesurer très-exactement les pressions qui répondent aux diverses températures. Ce genre d'expériences, comme le remarque la commission, n'est pas exempt de dangers. On doit user de beaucoup de précautions pour étudier des phénomènes qui se passent dans des tubes de verre chauffés quelquefois jusqu'à la température de l'ébullition du mercure, sous des pressions qui excèdent 90 atmosphères. Les conclusions du rapport, telles que l'Académie les a adoptées, sont qu'on doit savoir gré à M. Cagniard de Latour du zèle qui l'a porté à entreprendre

ce genre de recherches, qu'elles présentent une nouvelle mine à exploiter, et que sa découverte mérite l'approbation de l'Académie.

Nous n'avons point compris, dans ces analyses, les savants ouvrages de M. le docteur Edwards, dans lesquels il traite de l'influence des agents physiques sur la vie, et les expériences si remarquables de M. Bequerel sur les phénomènes électriques. L'une et l'autre recherches intéressent en certains points les théories mathématiques, mais elles se rapportent directement à l'histoire naturelle et à la chimie.

M. Savard avait présenté un Mémoire très-étendu, intitulé : *Des vibrations des corps solides considérées en général.* M. Dulong a fait un rapport sur ce travail, au nom de la commission qui avait été chargée de l'examiner. L'auteur du Mémoire, qui avait déja traité plusieurs questions particulières de ce genre, les considère ici sous un point de vue général; il s'est proposé de reconnaître, par la voie expérimentale, quels sont les mouvements qu'un corps solide ou flexible vibrant communique à un autre corps ou à un système de corps avec lesquels il est mis en contact; il décrit avec soin les divers procédés qui lui ont servi, soit à établir le contact, soit à déterminer les vibrations à la source du mouvement, soit à observer, dans le système auquel les mouvements sont communiqués, la nature et la direction des vibrations; il déduit, d'expériences variées, des conséquences générales sur les relations très-simples qui se manifestent eutre les vibrations imprimées et les vibrations communiquées, et il découvre ainsi des particularités

de ces mouvements, dont il semble qu'on n'aurait pu acquérir la connaissance qu'avec le secours de l'analyse mathématique. La conclusion du rapport, adopté par l'Académie, est que le Mémoire de M. Savard mérite son approbation, qu'il pourra fournir de nouvelles occasions d'appliquer la science du calcul à la physique, et que ce travail est digne d'être imprimé dans le Recueil des ouvrages des savants étrangers.

L'Académie de Lyon a couronné un ouvrage de M. Moreau de Jonnès sur les colonies françaises et sur les moyens d'en assurer et d'en accroître la prospérité.

L'auteur a traité successivement des colonies de déportation, de celles d'entrepôt ou de commerce, et des colonies agricoles. Il a examiné quelles sont les conditions d'existence et de prospérité de chacune de ces espèces d'établissement, et a fondé ses recherches sur une longue suite d'observations. Il indique les lieux qui peuvent devenir des colonies nouvelles, et ceux qui sont propres à recevoir des déportés; il expose l'état actuel de nos anciennes colonies, montre combien elles sont éloignées du degré de prospérité qu'elles peuvent atteindre, et il propose les moyens qui conduiraient à ce but, en améliorant la culture, perfectionnant l'industrie agricole, et augmentant le commerce d'importation et d'exportation. Il porte à 176 millions la masse totale des transactions commerciales de nos établissements des deux Indes, et il conçoit la possibilité d'en doubler la valeur dans l'espace de quelques années. L'auteur ajoute à ce résultat le tableau des avantages que procurerait l'opulence de nos colonies : l'industrie française prendrait un nouvel

essor; la navigation acquerrait plus d'activité; des débouchés nombreux s'offriraient à l'agriculture et aux fabriques; la population excédante aurait un asyle, et l'humanité acquerrait un moyen de perfectionner l'application des lois pénales. L'objet et l'étendue de ces recherches, le suffrage d'une Académie justement célèbre, qui donne à toutes ses recherches une heureuse et honorable direction, recommandent l'ouvrage de M. Moreau de Jonnès à toutes les personnes qui s'intéressent aux progrès de l'administration publique. Elles apprendront avec satisfaction qu'une telle question a été l'objet d'un concours académique, et que l'ouvrage couronné est dû à un officier de l'armée française.

M. OErsted, de l'Académie de Copenhague, auteur de la découverte fondamentale sur les rapports de l'électricité et du magnétisme, a fait, pendant son séjour à Paris, et conjointement avec M. Fourier, une suite d'expériences nouvelles sur les effets thermo-électriques. M. Seebeck avait prouvé que l'on peut établir un courant électrique dans un circuit formé de conducteurs solides, en y troublant l'équilibre des températures. MM. OErsted et Fourier, considérant que la différence de température de deux parties contiguës suffit pour exciter les forces électro-motrices, se sont proposé d'examiner si l'effet thermo-électrique ne pourrait pas être multiplié par la répétition alternative de barreaux de diverses natures, et ils ont cherché par la voie de l'expérience comment on doit procéder pour obtenir de tels résultats. Ils ont résolu cette question en construisant un hexagone, dont les côtés sont alternativement formés de barreaux de bismuth et d'antimoine soudés ensemble. Si

l'on échauffe un des sommets des angles, il se produit un premier effet, rendu sensible par la déviation de l'aiguille aimantée; l'effet augmente beaucoup lorsqu'on échauffe deux sommets non consécutifs, et plus encore, si l'on échauffe les trois sommets non consécutifs; il continue d'augmenter lorsqu'on refroidit un ou deux ou trois sommets intermédiaires par la juxta-position de la glace. Si l'on changeait cette distribution des températures inégales, on observerait des résultats très-différents; les actions des forces électro-motrices pourraient se compenser en partie, ou même se détruire. Les observations de ce genre sont très-propres à montrer les conditions suivant lesquelles s'exercent les actions électro-motrices, et elles donnent des moyens précis de les mesurer. On trouve dans les *Annales de chimie et de physique,* avril 1823, une explication détaillée des expériences variées qui ont été faites par les mêmes auteurs, et qui sont analogues à celle que l'on vient de citer.

L'Académie ayant été consultée par le Gouvernement sur une question, qui a pour objet de connaître avec exactitude la distance de Paris à Bastia, et de Paris à Ajaccio, a chargé deux commissaires de cet examen. M. de Rossel a présenté à ce sujet un rapport, que l'Académie a adopté, et qui résout la question d'après les documents les plus exacts et les plus authentiques, et dans tous les détails qui peuvent intéresser l'état et les particuliers.

M. Beautems-Beaupré a présenté à l'Académie la carte générale des environs de Brest et de la baie de Douarnenez. Ces deux cartes complètent le Pilote des environs de Brest.

On a successivement fait connaître, dans ces analyses, l'objet et les progrès du Pilote français, dont on est redevable à M. Beautems-Beaupré et à MM. les ingénieurs hydrographes employés sous ses ordres, ouvrage très-important, que l'on a appelé à juste titre un des monuments de la science hydrographique.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE

SIR WILLIAM HERSCHEL,

Prononcé dans la séance publique de l'Académie royale des sciences, le 7 juin 1824,

PAR M. LE BARON FOURIER, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

MESSIEURS,

William Herschel, membre de cette Académie, est du nombre des hommes extraordinaires qui, destinés à honorer leur patrie et leur siècle, ont eu d'abord à surmonter tous les obstacles qu'une fortune contraire peut opposer aux premiers efforts du génie. Il s'ouvrit des routes nouvelles dans une science sublime; il vit des astres jusque-là ignorés, et recula toutes les limites du spectacle des cieux. Prévenu par les bienfaits d'un monarque puissant, il consacra sa vie à des travaux immortels, et pendant quarante années l'éclat de ses découvertes a retenti dans toute l'Europe.

A l'âge de 19 ans, doué d'une imagination vive et d'un esprit élevé, il était encore simple musicien dans les régiments des gardes hanovriennes. Son père, habile maître de musique, qui subvenait à l'entretien d'une famille nombreuse, avait donné sa profession à cinq de ses fils. Le second, William Herschel, quitta en 1757 la ville de Hanovre, sa patrie, et se rendit en Angleterre où les arts lui promettaient un meilleur sort.

Il résida quelques années dans le comté de Durham, ensuite à Halifax, et bientôt après il fut appelé comme directeur de la musique à la chapelle octogone de Bath. Il jouissait alors d'un revenu considérable, soit à raison de son titre, soit comme dirigeant aussi les concerts publics et les oratorios.

Ses talents étaient recherchés, on aimait son caractère, on estimait ses mœurs; et dans un pays où les beaux-arts sont appréciés, s'il n'eût désiré que les avantages communs de la fortune, tous ses vœux auraient été satisfaits; mais une force intérieure l'entraînait à de plus hautes destinées : il devait un jour étendre le domaine des sciences.

L'étude approfondie de son art le conduisit par degrés à celle de la géométrie ; car il existe des rapports multipliés entre les lois de l'harmonie et les théorèmes mathématiques, comme l'ont prouvé tant de géomètres illustres, depuis Pythagore et Euclide jusqu'à Descartes, Huygens et Euler.

Herschel, introduit par la géométrie à la connaissance de l'astronomie théorique, fut saisi d'étonnement et d'admiration, et comme transporté dans un monde nouveau. Il désira vivement contempler lui-même ces phénomènes célestes dont l'intelligence humaine avait pu découvrir les lois. C'est

alors qu'il entreprit de construire des télescopes, et d'en perfectionner l'usage ; et comme la persévérance des résolutions a toujours été le caractère distinctif de son esprit, il y parvint; et bientôt il posséda des instruments préférables à tout ce qu'un art aussi difficile et aussi ingénieux avait encore produit. Ses premières observations astronomiques, qui datent de 1776, furent suivies d'une découverte mémorable qui excita au plus haut degré l'attention publique; je veux parler de la planète qui a porté pendant plusieurs années le nom d'Herschel.

Les premiers observateurs du ciel ont distingué un petit nombre d'astres qui changent continuellement de situation par rapport aux étoiles fixes, et reviennent périodiquement aux mêmes points de la sphère. On a connu, et l'on a comparé entre elles, de temps immémorial, les différentes durées de ces révolutions des planètes; c'est l'origine de la période de sept jours, monument universel de l'astronomie des anciens peuples. Les nations modernes avaient fait des progrès admirables dans la description et l'étude du ciel : Galilée, Huygens, Dominique Cassini avaient observé les premiers des astres secondaires que les planètes entraînent dans leur cours ; mais on ignorait encore, avant la fin du dernier siècle, qu'il existe une planète immense audelà de l'orbite de Saturne ; cette découverte devait être le fruit des travaux d'Herschel. Il poursuivait avec constance l'entreprise qu'il avait formée d'examiner successivement les diverses régions du ciel, et d'y signaler tous les phénomènes remarquables. Le 13 mars 1781 il observait, à Bath, avec un de ses meilleurs télescopes, lorsqu'il remarqua dans la constellation des Gémeaux un astre dont la lumière lui pa-

rut très-différente de celle des étoiles voisines, et comparable à celle de Saturne, mais beaucoup plus faible. La perfection de l'instrument lui permit de voir un disque bien terminé. Ayant continué ses observations, il reconnut que cet astre avait changé de place, quoique son mouvement par rapport aux étoiles fût alors très-lent; car il avait été stationnaire douze jours auparavant. Cette observation, transmise à Maskeline et à Lalande, fut confirmée à Paris, à Milan, à Pise, à Berlin, à Stockholm. On considérait généralement cet astre comme une comète extraordinaire exempte de toute nébulosité, et l'on s'occupa de déterminer les éléments paraboliques de son cours. Le président Bochard de Saron, de l'Académie des sciences de Paris, et Lexel, astronome de Saint-Pétersbourg, qui se trouvait à Londres, connurent les premiers la forme circulaire et les dimensions approchées de l'orbite. Bientôt on ne douta plus que l'astre d'Herschel ne fût une nouvelle planète, et toutes les observations ultérieures ont vérifié cette conséquence inattendue. On eut alors un témoignage frappant de la perfection des théories modernes; car on put déterminer les lois du mouvement de cet astre avant qu'il n'eût achevé la dixième partie de son cours, et ce mouvement ne fut pas connu avec moins de précision que celui des autres planètes observées depuis tant de siècles. Sa distance au soleil est double de celle de Saturne, c'est-à-dire de plus de 660 millions de lieues; son volume est plus de 70 fois aussi grand que celui de la terre; on peut l'apercevoir à la vue simple dans des temps favorables. La durée de sa révolution est d'environ 84 ans, et la température de cet astre, situé aux extrémités du système planétaire connu, est de plus de 40 degrés au-

dessous de celle de la glace. On peut donner quelque idée de sa distance à la terre, en disant que la lumière qui parcourt 70 mille lieues en une seconde, emploie environ deux heures et demie pour arriver de cet astre jusqu'à nous.

Herschel, et avant lui Dominique Cassini et Galilée, ont désiré de donner aux corps célestes qu'ils venaient de découvrir, les noms des princes qui avaient favorisé leurs travaux: plusieurs astronomes ont proposé les noms des premiers observateurs, mais ce n'est ni la reconnaissance ni la justice qui ont dicté les noms des planètes récemment découvertes. Ces noms ont été puisés dans le souvenir confus de fables devenues inintelligibles. La nouvelle planète reçut d'Herschel le nom de Georgium Sidus, elle reçut des astronomes celui d'Herschel, on hésita ensuite entre les noms de Cybèle, Neptune, Uranus: ce dernier a prévalu.

Lorsqu'on eut calculé le mouvement de cette planète, on put marquer les points du ciel qu'elle avait successivement occupés durant le siècle précédent; on reconnut alors, en consultant les recueils des observations antérieures, que Flamsteed, Mayer, Lemonier, avaient indiqué en ces mêmes points des étoiles qui ne s'y trouvent plus aujourd'hui. Leurs observations se rapportent évidemment à ce même astre qu'ils n'avaient pas distingué des étoiles fixes.

Les opinions cosmologiques de Kepler, de Lambert et Kant les portaient à supposer une huitième planète entre Jupiter et Mars. La comparaison que l'on avait faite des distances de chaque planète à celle de Mercure, qui est la plus voisine du soleil, suggérait une remarque semblable. La découverte d'Uranus la rendit beaucoup plus sensible, et détermina les astronomes à de nouvelles recherches. Il est arrivé

que dans ce grand intervalle de Mars à Jupiter, et à une distance peu différente de celle qui était indiquée, on a découvert quatre petits astres qui semblent être autant de parties séparées d'un seul corps planétaire, et qu'on ne peut apercevoir qu'à l'aide des télescopes. Ces observations capitales ont été faites vers le commencement de ce siècle; on les doit à MM. Piazzi, Olbers et Harding.

On s'entretenait en Angleterre, et dans toute l'Europe, des travaux astronomiques du maître de musique de la chapelle de Bath, de la perfection de ses instruments, qui étaient tous son ouvrage, des circonstances singulières de sa vie, du secours que les arts lui avaient donné, du noble usage qu'il faisait de ses loisirs. Tous ces détails vinrent à la connaissance du roi. Georges III aimait les sciences comme l'ornement des états et comme une source pure de gloire et de prospérités publiques. Il appela Herschel, prévint et combla tous ses vœux, et voulut qu'il fixât sa résidence à Datchett et bientôt après à Selough, à très-peu de distance de son château de Windsor.

Cette retraite de Selough devint un des lieux remarquables du monde policé: il fut visité par des voyageurs illustres. Herschel l'habitait avec sa famille; c'est là qu'il a achevé sa longue et mémorable carrière. Le roi s'intéressait à toutes ses recherches et voulait souvent augmenter les dépenses proposées, afin que rien ne bornât ni la perfection ni les dimensions des instruments. L'histoire doit conserver à jamais la réponse de ce prince à un étranger célèbre qui le remerciait des sommes considérables accordées pour les progrès de l'astronomie. Je fais les dépenses de la guerre, dit le roi, parce qu'elles sont nécessaires; quant à celles des sciences, il m'est

agréable de les ordonner; leur objet ne coûte point de larmes et honore l'humanité.

Herschel avait appelé près de lui un de ses frères, très-exercé dans la mécanique théorique et pratique, qui secondait tous ses desseins, dirigeait les ateliers où se construisaient les grands instruments, et réalisait presque aussitôt, avec une rare sagacité, toutes les inventions de son frère. Leur sœur, Miss Caroline, acquit bientôt des connaissances fort étendues dans l'astronomie et les mathématiques. Une amitié vive et constante, le désir de contribuer à la gloire de son frère, et sans doute une disposition d'esprit propre à cette famille extraordinaire, avait procuré à ses études un succès inoui. Elle rédigeait et publiait les observations; on lui doit la découverte de plusieurs comètes. Elle a partagé toutes les veilles et tous les travaux littéraires de son frère, et assurément aucun astronome n'a jamais eu de coopérateur plus intelligent, plus fidèle et plus attentif.

Dans cette retraite isolée, ornée par les beaux-arts, et plus encore par la paix et les vertus domestiques, Herschel, libre de tous soins, entouré d'une épouse chérie et d'une famille consacrée aux sciences, s'abandonnait sans partage aux inspirations de son génie, c'est-à-dire à un invincible désir d'étudier la nature et d'interroger les cieux; et, pour emprunter les expressions d'un des plus célèbres contemporains, c'est de ce village solitaire que l'univers apprit ce qu'il y avait à connaître de plus singulier dans le ciel et peut-être de plus difficile à apercevoir.

L'histoire des inventions optiques et de leurs progrès est trop connue pour qu'il soit convenable de la rappeler ici. Les télescopes d'Herschel sont ceux que l'on a nommés New-

toniens. Il ne cessa d'en étudier les propriétés, d'en varier et d'en étendre l'usage. Instruit par une longue expérience, il parvint à supprimer le miroir plan qui produit une seconde réflexion, et cet heureux changement, proposé depuis long-temps par Lemaire, mais d'une exécution difficile et qui ne convenait d'ailleurs qu'à de grands instruments, doubla pour ainsi dire l'effet optique.

Il reconnut qu'en exerçant l'œil par degrés on le rend beaucoup plus sensible à l'impression d'une faible lumière, et par là il put amplifier les images des objets fort au-delà des limites où les autres observateurs s'étaient arrêtés. Il remarqua deux propriétés différentes que l'on n'avait pas encore distinguées, celle qui consiste à augmenter la dimension apparente des corps, et celle de pénétrer dans la profondeur de l'espace pour y découvrir des objets qui auraient été entièrement imperceptibles ; des exemples multipliés ne laissent aucun doute sur la vérité et l'utilité frappante de cette distinction.

Enfin, il entreprit de porter jusqu'à la dernière limite le pouvoir de ces instruments; et, considérant moins les conditions propres à faciliter l'usage que celles qui devaient augmenter la force optique, il construisit un télescope d'une dimension extraordinaire. C'est le plus grand instrument de ce genre qui ait encore existé.

Il faut se représenter un tube de fer long de 40 pieds anglais, ayant quatre pieds $\frac{1}{4}$ de diamètre, suspendu au-dessous d'un assemblage de mâts inclinés, et que plusieurs machines font mouvoir dans tous les sens. Le système entier est mobile autour d'un axe vertical, et décrit une circonférence de 40 pieds de diamètre. Un miroir métallique très-poli, pesant

environ deux milliers de livres, est introduit dans le tube, et lorsque l'instrument est tourné vers le ciel, ce miroir réfléchit l'image éclatante des astres. L'observateur est lui-même transporté avec le tube, selon toutes les directions; car il se place dans un siége attaché à l'extrémité supérieure; les objets qu'il observe sont derrière lui, il en considère les images réfléchies.

Herschel découvrit avec ce télescope deux nouveaux satellites de Saturne; ils sont l'un et l'autre plus près de la planète que ceux dont on doit la connaissance à Huygens et Cassini. Jamais le ciel n'avait été observé avec un instrument aussi extraordinaire; et l'on peut dire que les plus grands phénomènes se montrèrent sous un aspect nouveau. Les nébuleuses, c'est-à-dire ces petits nuages lumineux et irréguliers que l'on remarque parmi les étoiles fixes dans diverses régions du ciel, parurent presque toutes se résoudre en une multitude innombrable d'étoiles; d'autres pour ainsi dire imperceptibles semblaient avoir acquis une lumière distincte. A l'entrée de l'étoile Sirius dans le champ du télescope, l'œil était vivement affecté, au point que l'on ne pouvait plus apercevoir, immédiatement après, les étoiles de moindre grandeur : il fallait qu'il s'écoulât plus de 20 minutes avant que l'on pût observer ces astres.

Les instruments dont il s'était servi jusqu'alors offraient moins d'avantage pour l'observation de quelques phénomènes; mais il lui avait été plus facile d'en multiplier et d'en varier les applications. Aucun astronome n'avait encore pu acquérir une connaissance aussi complète et aussi distincte des phénomènes du ciel. Par exemple, on cessait toujours d'apercevoir l'anneau de Saturne lorsque son plan est dirigé vers

la terre; mais la faible lumière que l'épaisseur nous réfléchit suffisait à Herschel, en sorte que dans cette phase l'anneau ne disparaissait point pour lui.

Une observation entièrement nouvelle et très-importante, fut celle des points remarquables de la surface de l'anneau de Saturne; Herschel en conclut que ce satellite, d'une forme singulière, tourne sur lui-même autour d'un axe perpendiculaire à son plan, et il mesura la durée de ce mouvement de rotation qui est d'environ dix heures et demie.

Peu de temps auparavant un grand géomètre s'occupait en France de cette même question, et la résolvait par l'analyse mathématique, qui est aussi un instrument très-puissant, et le plus universel de tous.

M. de Laplace démontrait que la rotation de l'anneau de Saturne est une conséquence nécessaire du principe général de la gravitation. Il avait déduit de son analyse cette même durée de dix heures et demie que l'astronome anglais trouva ensuite par l'observation directe. L'histoire des sciences n'offre rien qui soit plus digne de l'attention des philosophes que cet accord admirable des conséquences théoriques avec la perfection des arts.

Les observations d'Herschel sont trop variées et trop nombreuses pour que nous puissions ici en exposer l'objet. La plupart ont été confirmées et ont acquis une entière certitude. Au reste, les instruments dont il s'est servi, et qui ont tant d'avantages remarquables, sont sujets aussi à des difficultés qui en ont restreint l'usage. Ses plus grands télescopes ne doivent pas toujours être considérés comme des instruments de précision et de mesure, mais plutôt comme des instruments de découverte; sous ce rapport, ils

nous offrent ce que l'homme a inventé jusqu'ici de plus parfait.

Nous rappellerons maintenant les vues et les expériences d'Herschel relatives à l'origine et aux propriétés physiques des rayons solaires. Il concluait d'une longue suite d'observations attentives, faites avec des télescopes puissants, que la lumière n'émane pas du corps même du soleil, mais des nuages brillants et phosphoriques qui naissent et se développent dans l'atmosphère de cet astre. Il pensa que cet immense océan de lumière est violemment agité dans toute sa profondeur, que lorsqu'il s'entr'ouvre nous apercevons ou la masse solide qui n'est point aussi lumineuse, ou ses cavités volcaniques, et que telle est l'origine de ces taches noires et variables qui se montrent sur le disque du soleil. Leur étendue est souvent beaucoup plus grande que la surface entière du globe terrestre; elles disparaissent lorsque le calme se rétablit dans l'atmosphère solaire. On sait que ces taches, observées pour la première fois par Galilée, ont fait découvrir le mouvement du soleil autour de son axe, et ont donné la mesure de ce mouvement qui s'accomplit en 25 jours et demi.

Les nouveaux progrès de l'optique viennent d'offrir un moyen très-inattendu de reconnaître s'il est vrai, comme le croit Herschel, que la lumière solaire ne sort pas d'une masse solide ou liquide incandescente. En effet, lorsqu'un tel corps élevé à une très-haute température devient lumineux, les rayons qu'il envoie dans toutes les directions ne proviennent pas seulement de l'extrême superficie, ils sont émis comme ceux de la chaleur par une infinité de points matériels placés au-dessous de la surface jusqu'à une certaine

profondeur, extrêmement petite à la vérité, mais subsistante. Or ceux de ces rayons qui traversent obliquement l'enveloppe de la masse échauffée, acquièrent et conservent une propriété spéciale que les expériences peuvent rendre sensible ; ils sont polarisés. Mais si la même masse, au lieu d'être rendue lumineuse par sa propre température, est seulement recouverte d'une flamme étendue qui est la source de sa lumière, les rayons n'ont point cette même propriété.

On pouvait donc soumettre à cette épreuve singulière la lumière que le soleil nous envoie. M. Arago, auteur de cette belle expérience, et dont les travaux ont souvent enrichi la physique et l'astronomie, a reconnu en effet que les rayons solaires même obliquement transmis ne sont point polarisés. On voit donc que sur ce point de la question l'opinion proposée par Herschel se déduirait immédiatement des propriétés de la lumière les plus récemment découvertes. Au reste, ses recherches sur les variations annuelles de la chaleur solaire ont excité l'attention des physiciens ; on ne tardera pas à posséder sur cette question de physique des connaissances plus exactes. Dans plusieurs pays, et spécialement à l'Observatoire royal de France, on a pris la détermination de recueillir et de publier chaque année des observations précises sur l'étendue, les progrès et la disparition des taches solaires.

Nous avons maintenant à rappeler les expériences mémorables d'Herschel, qui ont donné une nouvelle étendue à la théorie physique des rayons du soleil. En étudiant la nature de cet astre, qui était devenu pour lui un objet habituel de méditations, il employait des verres diversement

colorés, pour affaiblir l'éclat de la lumière. Il eut ainsi des occasions multipliées d'observer jusqu'à quel point l'interposition de ces verres modifiait la chaleur ou la clarté. Il n'était pas dans la nature de son esprit de s'arrêter à des remarques superficielles. Il entreprit donc une suite d'expériences variées, et la physique générale fut enrichie de faits nouveaux et importants que les observations ultérieures ont pleinement confirmés. On avait entrevu depuis long-temps que les rayons séparés par le prisme, et qui forment le spectre solaire, ne possèdent pas au même degré la faculté d'échauffer les corps terrestres. Cette opinion était déja vérifiée par des expériences faites en Italie et en France.

En remontant à l'origine de cette question, nous la trouvons dans les écrits d'une femme célèbre dont le nom appartient à l'histoire littéraire de la France. Avant qu'Émilie du Châtelet eût traduit et commenté les ouvrages de Newton, elle avait envoyé à l'Académie des Sciences de Paris un Mémoire de physique, et concourait alors avec Euler à l'examen d'un des plus grands objets de la philosophie naturelle, la théorie du feu. Dans ce Mémoire de madame du Châtelet, imprimé en 1738 par ordre de l'Académie, l'illustre auteur propose de rassembler assez de lumière homogène pour éprouver si les rayons primitifs différemment colorés n'ont point aussi des degrés inégaux de chaleur, si le rayon rouge, par exemple, ne donne pas plus de chaleur que le rayon violet, ce qui lui paraît très-vraisemblable. L'auteur ajoute: l'expérience mérite d'être tentée par les philosophes qui jugeront cet essai. Cette première vue fut confirmée, comme nous l'avons dit, par les observations de Landriani et de Rochon; les expériences d'Herschel sur le même sujet non-

seulement donnèrent une solution complète de la question, mais conduisirent à des résultats entièrement nouveaux. Il mesura avec précision les effets thermométriques des sept rayons inégalement réfrangibles, et reconnut que les rayons rouges contiennent seuls plus de chaleur que tous les autres. L'impression sur le thermomètre diminue rapidement depuis les rayons rouges jusqu'aux rayons violets placés à l'autre extrémité. Le caractère principal du talent d'Herschel était une disposition extraordinaire à considérer le même objet avec persévérance, et sous divers aspects. En réitérant ses expériences sur les rayons solaires, il voulut déterminer la limite où cesse toute impression sensible de la chaleur, et le point où cette impression est la plus forte. Il parvint alors à un résultat totalement inattendu; il vit que l'effet thermométrique subsiste au-delà des rayons rouges dans l'espace obscur voisin du spectre, et ce fut même dans cette partie non éclairée, et sur le prolongement de l'axe, qu'il trouva le point où la chaleur communiquée est la plus grande. Au reste, la situation de ce point peut varier sensiblement, selon certaines conditions de l'expérience. Quoi qu'il en soit, il demeure certain que ce mélange de rayons qu'un même astre nous envoie, que le prisme réfracte inégalement et divise en éléments colorés, contient aussi une chaleur invisible dont on peut reconnaître et mesurer l'action.

Le même observateur se proposa encore de découvrir quels sont les rayons qui jouissent au plus haut degré de la faculté d'éclairer les objets. Il trouva, par un genre particulier d'expériences, que cette propriété appartient aux rayons jaunes, et qu'elle décroît assez rapidement, à partir de ces rayons brillants jusqu'à l'une et à l'autre extrémité du spectre.

Ces découvertes singulières excitèrent dans toutes les académies une vive attention. On contesta l'existence d'une chaleur rayonnante invisible, mêlée à la lumière du soleil. L'inventeur fut même exposé à des contradictions qui excédaient toutes les bornes de la critique littéraire. Ce grand physicien avait donné les explications nécessaires, il garda le silence. Ses expériences furent répétées en Angleterre, en Allemagne, en France, sous les yeux des plus habiles observateurs de l'Europe, et l'on reconnut généralement la vérité des résultats.

Il arriva même que la distinction des rayons colorés et de la chaleur invisible que le soleil transmet donna lieu de découvrir une autre propriété non moins remarquable de la lumière de cet astre. On observa l'intensité de l'action chimique des différents rayons, et l'on trouva que cette action subsiste encore comme celle de la chaleur dans un espace non éclairé, mais à l'extrémité opposée du spectre au-delà des rayons violets. Nous nous bornons à citer cette expérience qui n'appartient pas à notre sujet; il nous suffit d'ajouter qu'aucun physicien ne peut aujourd'hui révoquer en doute l'existence des rayons de chaleur invisibles mêlés à la lumière du soleil. C'est en cela principalement que consiste la découverte annoncée par Herschel. Il semblait qu'il fût dans sa destinée de découvrir et de rendre sensibles des êtres dont la connaissance avait échappé aux autres hommes pendant une longue suite de siècles.

Quoique notre système planétaire ait plus de douze cent millions de lieues d'étendue, on peut dire qu'il n'occupe qu'un point imperceptible dans les espaces célestes. C'est de là que les regards de l'homme et son génie ont pénétré dans

les immenses régions de l'univers. Il a vu des soleils innombrables au-delà des limites naturelles de ses sens : car l'intelligence divine dont sa raison émane, lui a donné le pouvoir de se former en quelque sorte des organes nouveaux. On avait observé de temps immémorial des changements sensibles dans la couleur et l'éclat de plusieurs étoiles ; on a vu de nouveaux astres briller tout-à-coup d'une vive lumière, et, semblables à des corps enflammés, s'éteindre progressivement et disparaître, devenus peut-être des corps non lumineux dérobés pour jamais à nos regards. On remarquait les mouvements propres et extrêmement lents d'un assez grand nombre d'étoiles, ou les variations alternatives et périodiques de quelques-uns de ces astres. Sans doute une connaissance plus complète de l'histoire du ciel est réservée aux générations à venir. On ne peut point espérer aujourd'hui des résultats certains et précis comparables à ceux de l'astronomie planétaire ; on se borne à décrire l'état présent et à distinguer les caractères généraux des phénomènes. L'invention des télescopes, et surtout les observations d'Herschel, ont donné une étendue prodigieuse à cette branche de la physique céleste.

Nous ne rappellerons point ici toutes les vues cosmologiques de ce grand astronome. L'exposition d'une théorie aussi étendue ne peut être l'objet de ce discours : mais nous indiquerons quelques traits principaux.

Il range dans une première classe les étoiles qu'il nomme isolées, c'est-à-dire celles qui sont séparées des autres par des intervalles immenses, et ne paraissent point sujettes à une action mutuelle dont l'effet soit appréciable. Il considère ensuite les étoiles doubles ou triples, ou les assemblages

sidéraux plus composés. Ce sont des systèmes de corps lumineux évidemment rapprochés et retenus par une cause subsistante, et qui se meuvent ensemble autour d'un centre commun.

De là Herschel passe à la description des nébuleuses ou de ces taches lactées et confuses irrégulièrement disséminées dans l'étendue des cieux.

Il a principalement observé la voie lactée, qu'il regarde comme une seule nébuleuse formée de plusieurs millions d'étoiles. Il en voyait plus de cinquante mille qui traversaient en une heure le champ de son télescope. Toutes ces étoiles sont distribuées dans une multitude de couches très-étendues en longueur et largeur, et tellement superposées, que l'épaisseur du système est beaucoup moindre que les deux autres dimensions. Les astres qui nous paraissent avoir le plus d'éclat sont au nombre de ceux que renferme la voie lactée. Il en est de même du soleil, centre de nos orbites planétaires; et c'est pour cela qu'étant placés dans l'intérieur de cette nébuleuse, nous l'apercevons comme une zone qui divise et entoure le ciel. La première origine de ces vues se trouve, si je ne me trompe, dans les écrits de Kant, et ensuite dans ceux de Lambert, l'un des principaux géomètres de l'Allemagne. Mais Herschel, de qui ces ouvrages n'étaient point connus, ne s'est pas borné à des considérations générales. Il a déduit d'observations positives et multipliées cette explication, qui avait été entrevue par le célèbre philosophe de Kœnisberg et par l'académicien de Berlin.

Il distingue parmi les nébuleuses celles que des télescopes puissants résolvent en une multitude d'étoiles séparées, celles où l'on remarque un ou plusieurs centres brillants, et celles

qu'il nomme planétaires, d'une forme sphérique mieux terminée, et d'un éclat plus homogène. Il montre la variété singulière de cet ordre de phénomènes dont la plupart étaient inconnus. Ses catalogues contiennent plus de deux mille nébuleuses, les unes semblables à la voie lactée, d'autres ouvertes à leur milieu et de figure annulaire, la plupart sous les formes les plus diverses et les plus irrégulières. Enfin il ajoute une multitude d'observations à celles que l'on avait déja faites sur les étoiles colorées rouges, bleues, vertes, ou qui offrent les nuances de ces couleurs, et principalement sur les étoiles doubles ou multiples.

Si maintenant on considère l'ensemble de ces faits, on s'élève naturellement à l'idée d'une matière lumineuse rare et diffuse dont tous les corps célestes ont été formés. Cette matière, répandue dans toutes les parties de l'univers, y est très-inégalement condensée; elle est encore à l'état de vapeur dans plusieurs nébuleuses, et dans les atmosphères si étendues et si variables des comètes. Le principe de la gravitation n'agit pas seulement sur les corps du système planétaire; il est présent dans tous les points de l'espace, et toujours opposé à la force expansive de la chaleur. On conçoit que l'attraction universelle a pu réunir progressivement ces vapeurs lumineuses; que les centres brillants ou uniques ou multiples, les groupes d'étoiles, les corps solides se sont formés. Ces effets ne sont pas également sensibles dans les différents astres; ils sont très-avancés pour les uns, très-faibles pour les autres, et tendent à s'y manifester de plus en plus. Enfin les mêmes causes entretiennent parmi tous ces corps des mouvements immenses que l'extrême éloignement nous permet à peine de distinguer.

Telles sont, autant qu'il est possible de les exprimer en peu de mots, les vues cosmogoniques d'Herschel. L'illustre auteur de la Mécanique céleste est arrivé à des conséquences semblables, en suivant une route directement contraire. Il a vu dans notre système de planètes et de satellites, des indices frappants de l'origine de ces corps. Il les regarde comme formés aux limites de l'atmosphère du soleil progressivement condensée par les forces attractives, et la déperdition de la chaleur rayonnante. Ainsi s'expliquent naturellement toutes les conditions fondamentales du système planétaire. Aucune opinion n'est plus conforme à l'état actuel des sciences; elle satisfait à l'ensemble des phénomènes connus.

Les corps célestes les moins éloignés de nous présentent donc aussi, et avec plus de précision, les caractères généraux qu'ils tiennent de leur origine; ils paraissent avoir été produits, comme tous les grands phénomènes du ciel, dans le sein de ces vapeurs lumineuses soumises aux deux actions contraires de la gravitation et de la chaleur.

Je n'entreprendrai point, messieurs, de fixer votre attention sur les diverses parties de ce vaste tableau, de comparer les distances de ces astres à celles que nous pouvons mesurer, de compter les années qui ont dû s'écouler pour que leur lumière parvînt jusqu'à nous. Ici les nombres, les temps, les espaces, manquent de bornes; l'esprit le plus étendu se refuse à concevoir l'immensité de l'univers; il ne s'arrête qu'en s'élevant à des pensées d'un ordre encore plus sublime. Cette réflexion nous ramène aux sentiments que sir William Herschel a souvent exprimés, et que lui rappelait sans cesse la contemplation des merveilles du ciel. Dans chacun des grands phénomènes qu'il a observés, il a trouvé l'empreinte d'une sa-

gesse éternelle et créatrice qui régit, anime et conserve, et qui a donné des lois immuables à toute la nature.

Que l'on se représente maintenant le tableau d'une vie entière consacrée aux beaux-arts et à la description du ciel. Dès ses premières années Herschel lutte contre la fortune et la subjugue. Sa gloire s'accroît de tout ce que le hasard de la naissance lui a refusé.

Les arts l'introduisent dans le sanctuaire des sciences; il perfectionne l'optique; il entreprend d'écrire l'histoire naturelle des cieux; il voit de nouveaux astres aux extrémités du monde planétaire, dont il a pour nous doublé l'étendue.

Il contemple d'innombrables phénomènes dans des régions où l'œil de l'homme n'avait point encore pénétré; il étudie la nature du soleil, divise ses rayons, en mesure la clarté, sépare la lumière de la chaleur; il voit les effets de la gravitation dans toutes les profondeurs de l'espace. Il n'a été donné à aucun homme de faire connaître aux autres un aussi grand nombre d'astres nouveaux. Tout ce que l'univers a d'immense et d'impérissable, est l'objet habituel de ses pensées. Voilà quelles furent les occupations de son esprit; rappelons aussi les sentiments qu'il a inspirés.

Il a vécu dans le sein d'une nation qui, plus qu'aucune autre, regarde la gloire de ses grands hommes comme une propriété publique. Il a joui d'un bonheur pur dans l'intérieur de sa famille; ses vœux ont été comblés par les succès de son fils, et il a entendu la voix publique répéter cette juste et douce expression, qui peut ici suppléer à tant d'autres, Herschel laisse un fils digne de son nom. Un prince bienveillant a desiré le connaître, et dès ce moment il s'est déclaré son protecteur et son ami. Sa sœur Caroline Her-

schel, modèle admirable de désintéressement, de douceur et de persévérance, lui avait consacré sa vie. Pendant plus de quarante années elle a assisté à toutes ses veilles, recueilli toutes ses pensées, transcrit de sa main et publié tous ses ouvrages; elle n'aurait pu souffrir qu'aucun autre fût chargé de ce soin. Elle a écrit et conservé ces immenses registres qu'Herschel laisse à son fils, où sont fidèlement déposées, depuis 1776, ses observations et ses expériences; héritage vraiment noble et glorieux, qui est à la fois le monument d'une science sublime et celui de la plus touchante amitié.

L'astronomie et la physique trouveront long-temps dans ces recueils une source féconde de rapprochements et de découvertes. Ainsi se prolonge dans l'avenir l'influence des grands hommes, et ce n'est point à leur mort que tous les fruits de leurs travaux peuvent être appréciés. Le tableau physique des cieux tracé par Herschel sera comparé aux observations récentes, et l'on remarquera les changements qu'un long intervalle aura produits. Déja des conséquences frappantes s'offrent à l'esprit; mais le temps seul peut les développer; elles ne deviendront manifestes qu'après un grand nombre de siècles.

Alors des révolutions entières seront accomplies, nos successeurs admireront d'autres phénomènes et d'autres astres. Une partie du spectacle des cieux sera changée: mais, à ces époques reculées, la mémoire d'Herschel subsistera tout entière.

Il a succombé dans la quatre-vingt-quatrième année de son âge, sans infirmités et sans douleur. Son nom confié aux sciences reconnaissantes est à jamais préservé de l'oubli. Elles le couronnent d'une gloire immortelle.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1823.

PARTIE PHYSIQUE,

PAR M. LE BARON CUVIER, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

CHIMIE.

M. VAUQUELIN a présenté un travail sur les combinaisons de l'acide acétique avec le cuivre, si connues dans le commerce sous les noms de verdet et de vert-de-gris, ou plutôt verdet gris. Il résulte de ses expériences que ces combinaisons se présentent dans trois proportions différentes. 1° Un sous-acétate insoluble dans l'eau, mais qui, plongé dans ce

liquide, s'y décompose à froid, et s'y convertit en péroxide et en acétate. 2° Un acétate neutre dont la solution ne se décompose point à froid, mais par l'ébullition, et se change alors en péroxide et en sur-acétate. Et enfin 3°, un sur-acétate dont la dissolution ne se décompose ni à froid ni à chaud, et qu'on ne peut obtenir cristallisé qu'en le laissant évaporer à froid ou dans le vide. Le verdet gris du commerce est un mélange, ordinairement en proportions égales, d'acétate et de sous-acétate.

Une grande et utile découverte est celle qui vient d'avoir lieu dans le département de la Meurthe, d'immenses dépôts souterrains de sel gemme. Les sondages déja faits et l'exploitation commencée font connaître leur étendue sur plus de trente lieues carrées, et leur profondeur de plus de trois cents pieds, ainsi que les diverses couches dont ils se composent. On y trouve du sel blanc, des sels gris diversement mélangés, et du sel coloré en rouge par le fer.

L'Académie, à la demande du gouvernement, a fait analyser ces produits par sa section de Chimie, dont M. Darcet a été le rapporteur.

La pureté en est extraordinaire : le sel blanc ne contient au plus que sept millièmes de substances étrangères; mais il y en a aussi d'absolument pur. Les variétés les moins pures de sel gris ne contiennent que cinq centièmes d'argile bitumineuse, d'oxide de fer, et de sulfates de soude, de chaux et de magnésie. Le sel rouge est coloré par deux centièmes d'oxide de fer.

Aucun de ces sels étrangers n'étant déliquescent, le sel gris conviendra aux salaisons; tous les arts qui emploient le sel pourront en faire usage. Le sel blanc offrira pour la table

une denrée plus pure que celles d'aucune autre saline; et le consommateur y trouvera d'autant plus de bénéfice, qu'il n'attire point l'humidité de l'air.

L'argent et le mercure fulminant sont des substances que l'on ne connaît que trop depuis que, répandues dans le commerce à cause de l'usage qu'on en fait pour amorcer les armes à feu, elles ont causé tant d'accidents funestes. On les forme en rapprochant l'argent ou le mercure de l'acide nitrique et de l'alcool. Ces trois substances, dont deux sont composées, réagissent les unes sur les autres, et le composé définitif que l'on obtient détone avec violence par la chaleur ou par un choc léger. Mais en quoi consiste-t-il? quels éléments des corps employés à le former y sont-ils restés? comment et dans quelles proportions y sont-ils combinés?

Le docteur Liebig, jeune chimiste allemand, s'est occupé de ce problème. En mettant de la potasse dans la dissolution de mercure fulminant, il a précipité de l'oxide de mercure, et obtenu, par l'évaporation, un sel cristallisable et fulminant dans un moindre degré que le premier: toutes les bases alcalines en ont agi de même. Ainsi, la propriété de fulminer appartient non pas au mercure, mais à une combinaison qui peut s'unir avec diverses bases, en les neutralisant plus ou moins complètement, comme ferait un acide.

Il en est de même pour l'argent fulminant; on peut en précipiter une grande partie de l'argent en y substituant un alcali ou un autre oxide métallique.

M. Liebig, après avoir employé comme base l'eau de chaux et l'avoir reprise par l'acide nitrique, est parvenu à isoler, à peu de chose près, le principe qu'il soupçonnait, et l'a vu se

précipiter sous forme de poudre blanche soluble dans l'eau bouillante, rougissant la teinture de tournesol; en un mot, de nature manifestement acide, mais se distinguant par la propriété de détoner, dont il jouit au plus haut degré.

M. Liebig a tenté l'analyse de cet acide, et a pensé payer cher son zèle pour la science; car les détonations ont lieu même dans l'eau, et au moindre choc. Il a réussi enfin, en le mêlant de beaucoup de magnésie, à le décomposer sans accident. Les produits sont un reste du métal par l'intermède duquel on l'avait formé, du gaz acide carbonique, de l'ammoniaque et de l'eau. C'est la composition la plus complexe que la chimie ait encore créée, puisqu'elle offre une substance métallique et les éléments ordinaires des matières animales, savoir : de l'oxigène, de l'hydrogène et de l'azote. Mais il restait à savoir comment ces éléments y sont combinés entre eux; si l'ammoniaque et l'eau y sont toutes formées; si le métal y est à l'état d'oxide, et de quel oxide, etc.

De nouvelles expériences faites cette année par l'auteur et par M. Gay-Lussac, nous ont appris que cet acide, qu'on avait d'abord nommé fulminique, lorsqu'on le débarrasse du reste de métal qu'il contient, est de l'acide cyanique, c'est-à-dire une combinaison de l'oxigène avec cette combinaison d'azote et de carbone qui a été nommée cyanogène.

M. Dœbereimer, professeur à Jéna, est l'auteur d'une observation bien curieuse sur la propriété dont jouit le platine précipité de sa solution nitro-muriatique (ce qui lui donne une forme et une consistance spongieuse), sur la propriété qu'il a, disons-nous, lorsqu'on fait passer sur lui un mélange d'oxigène et d'hydrogène, d'opérer la combinaison de ces

deux gaz et de produire une chaleur qui le porte lui-même au rouge. MM. Thénard et Dulong ont répété et vérifié ces expériences. Ils ont reconnu de plus que le palladium et le rhodium jouissent de cette propriété comme le platine à la température ordinaire; que l'iridium s'échauffe fortement à cette même température; que l'osmium rougit, mais seulement quand on l'a un peu échauffé d'avance; enfin, que pour donner au nickel et au cobalt la propriété de produire la combinaison, il faut les chauffer à 300 degrés; le platine à la température ordinaire décompose le protoxide d'azote que l'on dirige par lui.

M. Chevreul qui, par sa découverte des acides qui se produisent lors de la saponification, a fait faire de si grands pas à la théorie de cette opération et ouvert un nouveau champ à l'étude des substances organiques, a continué ses recherches et déterminé les caractères de plusieurs de ces acides, qui varient selon les diverses graisses avec lesquelles la saponification se fait, et qui sont les principes des odeurs des savons formés avec ces graisses, et d'une partie de ces graisses elles-mêmes. Le beurre en fournit deux, le *butirique* et le *caprique;* la graisse de dauphin un, le *phocénique;* et la graisse de mouton un autre, le *hircique*. Ils sont tous incolores, plus légers que l'eau, mais de moins d'un dixième, diversement odorants, et donnent une saveur brûlante. Le caprique se solidifie à 15 degrés au-dessus de 0; les autres sont encore liquides à 9. Ils varient davantage par leurs capacités de saturation et les propriétés de leurs sels.

Le nombre des alcalis ou bases salifiables organiques et

composées de plusieurs principes combustibles ou gazeux augmente rapidement, surtout depuis les recherches de MM. Pelletier et Caventou; et les propriétés remarquables dont ces substances sont douées rendaient intéressant de connaître les compositions distinctives de chacune d'elles.

MM. Pelletier et Dumas leur ont appliqué la méthode d'analyse imaginée par M. Gay-Lussac, qui consiste à en brûler une quantité déterminée avec une quantité, également déterminée, d'oxide de cuivre, et à recueillir les produits. Par les proportions de leurs éléments ces substances ressemblent beaucoup aux résines; elles ont un peu d'azote de plus; on doute même qu'il y en ait dans la morphine; la caféine seule en contient jusqu'à un cinquième, et plus, de son poids. La plupart ont une capacité de saturation (une alcalinité) à peu près proportionnelle à leur quantité d'azote, mais la morphine en a plus que n'indiquerait l'excessivement petite quantité de ce principe qu'elle paraît contenir.

Ces expériences, faites avec toutes les précautions qui pouvaient en rendre les résultats rigoureux et précis, conduisent à des vues importantes, et qui intéressent toute la chimie organique, non moins que la matière médicale.

Une espèce particulière et très-rare de calcul de la vessie, découverte par M. Wollaston, et nommée par lui *oxide urique*, s'est retrouvée pour la première fois en France, dans le calcul d'un chien. M. Lassaigne, préparateur de chimie à l'École vétérinaire, en a donné la description et les propriétés caractéristiques. Il l'a trouvée composée de 36 parties de carbone, 34 d'azote, 17 d'oxigène et 12 d'hydrogène.

Le Dahlia, grande et belle plante dont nos parterres ont été récemment enrichis, a des racines tubéreuses comme le *Topinambour*, qui est de la même famille qu'elle. M. Payen a cherché si ces bulbes ne contiendraient pas aussi un principe alimentaire de bonne qualité, et pour cet effet il en a fait l'analyse. Il en a retiré un sucre incristallisable; un arome ressemblant à celui de la vanille; une huile volatile; une huile fixe; plusieurs sels à base de chaux; et une substance nouvelle qu'il a nommée *dahline*, et dont les bulbes de dahlia contiennent un dixième de leur poids: elle a de l'analogie avec l'amidon et la gélatine, mais elle en diffère surtout par la propriété de se précipiter en masse grenue, lorsque l'eau qui la tient en dissolution est évaporée jusqu'à former une pellicule. Sa pesanteur spécifique est de 1,356; l'acide sulfurique la convertit en un sucre incristallisable, plus sapide que celui qui provient de l'amidon.

GÉOLOGIE.

M. Cuvier, qui a publié cette année le quatrième et la première partie du cinquième volume de la deuxième édition de ses *Recherches sur les animaux fossiles*, a communiqué à l'Académie plusieurs des articles nouveaux qui entrent dans cet ouvrage. Il a fait voir, entre autres, les débris d'une espèce inconnue de crocodile, dont quelques squelettes ont été retirés des carrières de pierre calcaire oolithique des environs de Caen; et des têtes de cétacées, d'un genre différent de ceux qui existent aujourd'hui, déterrées sur la plage de Provence et lors de l'excavation du bassin d'Anvers.

Une seule phalange, trouvée dans une sablonnière du

pays de Darmstadt, lui a donné la preuve de l'ancienne existence d'un quadrupède du genre des Pangolins, mais d'une taille gigantesque.

On parlait depuis long-temps de squelettes humains incrustés dans un rocher de la côte de la Guadeloupe, et dont il avait été déposé un au Muséum britannique. Le ministre de la marine ayant bien voulu donner des ordres pour en faire apporter un autre au cabinet du Roi, M. Cuvier l'a présenté à l'Académie, et a fait voir, par les coquilles terrestres et marines toutes semblables à celles de la côte environnante, ainsi que par la situation dans laquelle sont ces squelettes, que la pierre qui les enveloppe est d'origine moderne, et le produit de quelques sources incrustantes qui coulent vers cet endroit.

Il a aussi lu un mémoire sur des têtes humaines d'une épaisseur monstrueuse et d'une dureté excessive, qui ont passé aux yeux de quelques auteurs pour des pétrifications, et même pour des restes d'une ancienne race de géants: l'une d'elles, trouvée en Champagne, est célèbre depuis long-temps, et a été gravée plusieurs fois; l'autre a été tirée d'un ossuaire. M. Cuvier a établi que toutes deux sont des têtes défigurées par une maladie des os que l'on nomme la maladie éburnée, et qu'elles viennent même assez probablement d'enfants à l'âge où ils changeaient de dents. Aucun de ces faits ne peut donc être cité comme preuve qu'il existerait des ossements humains dans les couches anciennes et régulières.

Deux jeunes naturalistes partis depuis peu pour l'Amérique méridionale, M. Boussingault, Français, et M. Rivero, Péruvien, ont déja communiqué plusieurs observations des plus intéressantes.

Ils ont reconnu, à 20 lieues nord-est de Santa-Fé, une aërolithe pesant 1500 livres, qui avait été trouvée en 1810 sur une colline de grès par une jeune fille, sans que l'on ait rien su de sa chute; mais on voit encore l'excavation qu'elle a formée, et plusieurs fragments se trouvaient aux environs.

Le grain de cette masse est fin; elle n'a point la croûte vitrifiée, ordinaire aux aërolithes. Son analyse a donné 91, 41, de fer, et 8, 59, de nickel.

Les mêmes naturalistes ont adressé au Muséum d'Histoire Naturelle, des ossements de Mastodonte à dents étroites, trouvés près de Bogota, et qui ajoutent à nos connaissances sur cet animal perdu.

Le principal besoin de la géologie consiste dans la détermination positive de l'ordre dans lequel les divers terrains se superposent les uns aux autres, et l'on ne peut arriver à la connaissance des lois générales de cette superposition que par des descriptions exactes des contrées dans lesquelles il est possible d'en apercevoir un certain nombre dans leur ordre naturel.

M. Bertrand Roux, négociant et naturaliste éclairé, de la ville du Puy-en-Vélai, a entrepris de faire connaître, sous ces rapports, les environs de sa demeure, et il en a fait l'objet d'un ouvrage considérable, où toutes les couches sont décrites, leurs rapports de position indiqués, et leurs hauteurs, ainsi que les différentes inégalités du terrain, mesurées au baromètre.

La ville même du Puy est au centre d'un bassin entouré de montagnes assez hautes, et dont la Loire ne s'échappe que par une gorge étroite. Les noyaux de ces montagnes

M 2

sont granitiques, et de trois variétés caractérisées en partie par leur plus ou moins de consistance, et que l'on distingue de loin au plus ou moins d'escarpement de leurs cimes et de leurs talus; mais une grande partie de leurs crêtes sont hérissées de volcans, très-reconnaissables, bien qu'éteints long-temps avant les époques historiques. Dans cette enceinte, comme dans le fond d'un vase, sont déposés les terrains postérieurs : d'abord quelques dépôts épars de psammites formés des débris du granite, dans l'un desquels il y a déja des restes de végétaux; ensuite, et tout d'un coup, des terrains tertiaires; des couches puissantes d'argile, des marnes en lits nombreux, sans corps organisés, que l'auteur croit analogues à nos argiles plastiques des environs de Paris; et sur elles, des terrains de plus de cent mètres d'épaisseur, qui ne contiennent que des coquillages de l'eau douce, des restes de tortues, ou des ossements d'animaux terrestres aujourd'hui inconnus, et nommément des mêmes palæotheriums, si communs dans nos plâtrières de Paris, et d'un genre voisin nommé anthracotherium par M. Cuvier.

C'est sur ce fond de bassin ainsi constitué, que se sont répandues les déjections des volcans, et qu'elles ont formé des pics, des collines et des plateaux. M. Roux les divise en deux sortes : les plus anciennes ont le felds-path pour base, et composent des terrains que M. Roux nomme trachytiques, lorsque le feld-spath est lamelleux, et phonolitiques, quand il est compacte; les autres, où abonde le pyroxène, comprennent les laves basaltiques de diverses époques, des scories et des cendres.

Ceux-ci sont incontestablement plus récents que les terrains tertiaires, qu'ils recouvrent en plusieurs endroits d'une

manière évidente. On les voit quelquefois s'étendre aussi sur les trachytes, ce qui prouve l'antériorité de ces derniers. M. Roux croit que les trachytes eux-mêmes sont, aussi bien que les laves et les basaltes, plus récents que les terrains tertiaires. Il ne les a pas vus cependant superposés à ces terrains; mais il tire sa conclusion principalement de ce fait, que les terrains tertiaires ne contiennent point de débris de trachytes, mais seulement ceux des granites.

Ces trachytes se sont principalement déposés le long de la chaîne orientale, de celle qui sépare le Vélay du Vivarais, et dont la cime principale est connue sous le nom de *Mézin;* leurs contextures sont uniformes, et ils doivent s'être déposés dans un temps assez court, tandis que les laves et les basaltes diffèrent entre eux par la structure et par les époques des éruptions qui les ont produits. Les dernières de ces éruptions sont, au reste, déja très-anciennes; car les élévations qu'elles ont formées avaient déja eu le temps d'être dégradées et escarpées, comme elles le sont aujourd'hui, dès le temps où les Romains firent, dans ces environs, leurs premières routes et leurs premières constructions.

La chaîne de l'ouest est celle où ont brûlé les volcans, principalement les plus modernes : elle en offre au moins cent; mais, à l'exception de deux ou trois, leurs cratères sont presque effacés aujourd'hui.

Une des élévations volcaniques les plus remarquables du Vélay est la *roche rouge*, pic basaltique isolé, fort noir, entièrement entouré de granite, et que M. Roux regarde comme ayant été soulevé de bas en haut, et offrant des traces d'une ancienne bouche volcanique.

A ces descriptions, dont nous abrégeons à regret l'extrait,

M. Roux joint des conjectures plus ou moins ingénieuses sur les causes qui ont amené tant de modifications diverses : elles ajoutent à l'intérêt d'un ouvrage dont la publication fera connaître une des contrées de l'intérieur de la France les plus intéressantes sous le rapport de l'histoire naturelle, aussi bien que de la singularité des sites et de la beauté des paysages.

Parmi les bancs nombreux qui forment les terrains des environs de Paris, il en est un composé principalement d'argile, que l'on exploite en divers endroits pour en fabriquer des poteries plus ou moins belles. On l'a nommé par cette raison argile plastique. Son origine est déja ancienne, car il est surmonté par les immenses massifs de pierre à bâtir, de plâtre, de sable et de grès qui forment toutes nos collines; et la craie seule, dans nos environs, est au-dessous de lui. On y trouve divers corps étrangers et entre autres des bois réduits en charbon, qui, dans plusieurs lieux, sont encore utiles comme combustibles, et que l'on a nommés lignites. Des grains de succin et d'ambre jaune sont fréquemment au milieu de ces lignites; et même tout rend vraisemblable que l'ambre jaune des bords de la Baltique, si célèbre dès les temps les plus reculés, appartient à cette formation, dont l'étendue est considérable, et que l'on a déja suivie très-loin de Paris et jusqu'en Angleterre.

Un jeune physicien, M. Bequerel, a particulièrement étudié des couches de cette argile que quelques fouilles venaient de mettre à découvert près d'Auteuil. Il y a recueilli des minéraux peu communs dans une semblable position : du phosphate de chaux en noyaux oblongs, du sulfate de strontiane

en cristallisations particulières. Il a trouvé aussi des lignites avec du bel ambre jaune, et de très-petits cristaux de sulfate de zinc sur ces lignites. Tous les corps organisés y sont de terre ou d'eau douce, et dans le nombre sont surtout quelques fragments d'os de crocodiles. Les observations faites sur cette argile en d'autres lieux n'ont donné aussi que des restes d'animaux de l'eau douce, et cependant elle est recouverte de deux formations marines très-considérables. Aussi la range-t-on au nombre des monuments et des preuves des invasions répétées de la mer sur les continents.

Ces terrains placés sur la craie, et qui remplissent presque seuls le bassin où est situé Paris, appartiennent aux dernières époques des révolutions du globe, et cependant ils se sont déposés sur des étendues très-vastes, et recouvrent, dans une infinité de lieux souvent très-éloignés, les terrains plus anciens : s'ils sont masqués et peu reconnaissables dans quelques cantons par l'interposition de quelque formation locale, ou par des déplacements occasionnés par des catastrophes particulières, c'est à la sagacité du géologiste à les démêler dans ces circonstances accidentelles et à rechercher les causes qui ont pu les modifier ainsi.

M. Brongniart, qui a tant contribué à en éclaircir l'histoire, a trouvé moyen de les reconnaître dans le Vicentin, pays où tout ce qui les accompagne était fait pour dérouter un observateur moins exercé.

Il a observé dans les collines qui bordent le val de Nera, un calcaire contenant les mêmes coquilles que le nôtre, alternant quatre fois avec une brèche en petits fragments de cornéenne, et surmonté par des basaltes. Mais ces collines

ne forment pas, à beaucoup près, la masse de la montagne. Celle-ci appartient à l'ordre bien plus ancien de couches que l'on a nommées terrains du Jura, et les collines sont seulement appuyées contre ses flancs.

Des dispositions analogues se sont montrées dans val de Ronca. A Montecchio Maggiore, lieu célèbre par les nombreuses espèces minéralogiques que renferment ses amygdaloïdes, les basaltes et les brèches de cornéenne dominent; le calcaire n'y est qu'en indice; ses coquilles sont aussi enveloppées dans la pâte des brèches, mais non pas dans les fragments de basalte d'amygdaloïde que cette pâte enveloppe. On y trouve çà et là des lignites; à Monte Viales ces lignites offrent même quelques poissons fossiles.

Cette indication a conduit M. Brongniart à fixer la position géologique des célèbres carrières de Monte Bolca, où sont déposées des quantités si étonnantes de ces poissons. Sous divers lits de basalte, de brèche et de calcaire, sont deux bancs de ces ichthyolites séparés par un calcaire coquillier contenant des nummulites et d'autres coquilles. Tous les poissons appartiennent à des genres marins; le second de ces bancs contient, outre les poissons, des lignites et des plantes la plupart terrestres ou d'eau douce.

A Montecchio Maggiore ce sont les couches trappéennes qui dominent; à Bolca, au contraire, c'est le calcaire, et de beaucoup; mais, sauf la proportion, la ressemblance de ces lieux et d'un nombre d'autres du voisinage est très-grande; et leur calcaire, par sa nature, par les coquilles, les silex et les autres objets qu'il renferme, ressemble aussi beaucoup au calcaire grossier de nos environs, à celui qui repose sur la craie et qui supporte le gypse.

Les roches trappéennes forment la différence essentielle; encore retrouverait-on plusieurs de leurs éléments dans notre chlorite et notre argile plastique.

Les collines du pied de l'Apennin ressemblent, au contraire, bien davantage à celles de notre calcaire et de notre grès supérieurs aux gypses. M. Prévost l'avait fait remarquer dans un Mémoire sur les environs de Vienne, dont nous avons donné l'extrait il y a quelques années, et M. Brongniart l'a confirmé par l'examen scrupuleux qu'il a fait de la colline de la Superga, près de Turin.

Ce qui est plus extraordinaire, c'est qu'un terrain et des coquilles très-semblables se retrouvent au sommet de la montagne des Diablerets, au-dessus de Bex, non-seulement à plus de trois mille mètres de hauteur, mais surmontés par des bancs de nature alpine, et d'origine très-ancienne. M. Brongniart produit une coupe de cette partie de la montagne, qui semble prouver que c'est un dépôt formé dans un creux ou dans un repli ancien de ces bancs.

Il a retrouvé jusque dans les montagnes d'auprès de Glaris, des couches qui, d'après les coquilles et les substances qui les composent, lui ont paru devoir se rapporter à nos terrains de sédiment supérieurs.

M. de Buch a examiné, sous le rapport géologique, une contrée voisine du Vicentin, le Tyrol méridional; il y a trouvé en grande masse ces terrains porphyriques ou plutôt pyroxéniques qu'il croit soulevés par l'action du feu, ou, comme il s'exprime, apposés aux calcaires voisins, mais non déposés de la même manière qu'eux. Ces terrains en se soulevant, ont tantôt percé, tantôt soulevé avec eux les porphyres

rouges, les grès rouges et les dolomies ou calcaires magnésiens qui les surmontaient, et les ont rompus et désordonnés de manière qu'il est impossible aujourd'hui de les ramener au même niveau. M. de Buch, qui avait déja appliqué cette manière de voir aux montagnes de l'Auvergne, croit pouvoir l'étendre à la plus grande partie des Alpes, au moins des Alpes calcaires; et il a découvert dans plusieurs endroits le porphyre pyroxénique demeuré caché ailleurs, mais qui a été partout la cause des soulèvements. N'observant dans ces cantons les masses de dolomie que fendillées en sens divers, ou creusées de cavernes, et placées sur le porphyre pyroxénique et au niveau du calcaire ordinaire des Alpes, M. de Buch croit que cette pierre est une transformation du calcaire pénétré par la magnésie que le porphyre y a introduite. En un mot, elle n'en est qu'un accident. Vouloir distinguer une formation spéciale de calcaire magnésien ou de dolomie, ce serait, suivant M. de Buch, comme si l'on proposait de faire une espèce d'un chêne qui aurait des galles et une autre de celui qui n'en aurait pas.

Les naturalistes viennent d'obtenir un puissant secours, pour apprendre à bien connaître l'Auvergne, ce pays classique pour l'étude des anciens volcans et de toutes ces masses soulevées et travaillées par les feux souterrains.

M. Desmarets le fils a publié la carte à laquelle feu son père avait travaillé presque pendant toute sa vie, et où il a marqué la nature de chaque pic, les cratères des différentes époques, les courants de laves descendus de chacun d'eux, les basaltes qu'elles ont déposés; enfin, toutes les modifications imprimées à ce pays par l'action successive de ces

mystérieux foyers, et celles que leurs produits eux-mêmes ont éprouvées avec le temps de la part des agents actuels. C'est un service important que ce jeune naturaliste a rendu à la science, non moins qu'un tribut naturel de respect dont il s'est acquitté envers la mémoire de son père.

M. Bory de Saint-Vincent a posé une base essentielle pour la géologie de l'Espagne, en décrivant avec netteté la géographie physique de ce pays, en fixant la direction et la hauteur des différents étages de ses montagnes, la pente de ses plaines, et le cours de ses fleuves. Ce travail, exécuté avec soin et accompagné d'une carte, a paru dans le Guide du Voyageur en Espagne, publié par l'auteur en un volume in-8°.

On voit que la géologie positive, celle qui s'occupe de constater l'état des couches, fait chaque jour de nouveaux pas. Nous aurions pu en donner bien d'autres preuves s'il nous eût été permis d'exposer tous ceux que lui ont fait faire les savants étrangers à l'Académie; mais on en trouvera le résultat, et en même temps le tableau le plus brillant et le plus exact de l'état actuel de la science, dans l'ouvrage que vient de publier l'un de nos confrères, qui a lui-même contribué plus qu'aucun autre à ses progrès. M. de Humboldt, dans son Essai géognostique sur le gisement des roches dans les deux Hémisphères, a embrassé d'un coup-d'œil leur ordre et leur succession dans toutes les parties du monde connu, et personne n'avait encore mieux montré, par l'uniformité des produits, la généralité des causes qui ont agi autrefois sur le globe avec tant de puissance, et dont la na-

ture est aujourd'hui, pour ses habitants, une énigme si attrayante et si obscure.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE ET BOTANIQUE.

M. Dutrochet vient de réunir en un seul volume les longues et importantes recherches qu'il a faites sur les forces motrices qui agissent dans les corps organisés : ses expériences sur la sensitive dont nous avons déja donné quelque idée dans nos analyses précédentes, occupent une partie essentielle de cet ouvrage. Un procédé nouveau, qu'il a employé pour l'anatomie végétale, l'a conduit à des résultats qui tendraient à infirmer une théorie célèbre. Il assure que tous les organes élémentaires des plantes, c'est-à-dire les cellules et les tubes dont leur corps est composé, ont une existence indépendante et forment des organes circonscrits, en sorte que ces organes n'auraient entre eux que des rapports de voisinage et ne formeraient point par leur assemblage un tissu réellement continu. Il affirme qu'il n'y a ni pores ni fentes visibles au microscope dans le tissu cellulaire, non plus que sur les tubes des végétaux. On voit seulement sur les parois de ces organes de petits corps globuleux demi-transparents et des corps linéaires qui deviennent opaques par l'action des acides, et qui sont rendus transparents par l'action des alcalis. M. Dutrochet considère ces petits corps comme les éléments d'un système nerveux diffus. Aux analogies de structure intime et de nature chimique qu'il met en avant pour étayer cette opinion, l'auteur joint des considérations physiologiques prises d'expériences qui lui sont propres et qui prouvent, selon lui, que les mouvements des

végétaux sont spontanés, c'est-à-dire qu'ils dépendent d'un principe antérieur, lequel reçoit immédiatement l'influence des agents du dehors. Toutefois, répugnant à reconnaître de la *sensibilité* chez les végétaux, M. Dutrochet substitue à ce nom celui de *nervimotilité*.

Il s'agissait de déterminer quel est l'organe du mouvement dans les feuilles de la sensitive : M. Dutrochet a prouvé, par des expériences décisives, que cet organe consiste dans un renflement du parenchyme ou de la *médulle corticale* qui est situé à la base du pétiole, à la base de chacune des pinnules et de chacune des folioles dont la feuille de la sensitive est composée. Il a vu que cet organe, auquel il a donné le nom de *bourrelet*, est spécialement composé de cellules globuleuses disposées en séries longitudinales et remplies d'un fluide coagulable. Ce n'est point par le moyen d'articulations que la sensitive, non plus que les autres végétaux irritables, meut ses parties mobiles; c'est par le moyen d'une courbure imprimée à ces parties dans l'endroit où se trouve l'organe du mouvement. Ainsi, chez la sensitive, ce sont les seuls *bourrelets* qui, en se courbant, produisent la plicature des feuilles. M. Dutrochet a vu que cette courbure est le résultat d'une force élastique vitale qui se manifeste même dans les tranches minces que l'on enlève à ces *bourrelets;* il a donné à ce phénomène le nom d'*incurvation*. Ainsi l'irritabilité végétale ne consiste que dans une *incurvation élastique*, laquelle est tantôt *fixe* et tantôt *oscillatoire*. Par exemple, cette incurvation élastique est *fixe* dans les vrilles des végétaux, dans les valves de l'ovaire de la balsamine, etc.; elle est *oscillatoire* chez les végétaux que l'on nomme *irritables* par excellence, végétaux qui offrent dans leurs parties mo-

biles un état d'incurvation et de redressement alternatifs.

On sait depuis long-temps que la sensitive offre un phénomène de transmission sympathique. Il suffit de brûler légèrement une seule des folioles de cette plante avec un verre ardent, pour que toutes les feuilles qui appartiennent à la même tige se ploient les unes après les autres. Ce mouvement méritait d'être étudié avec soin. Il s'agissait de déterminer quelle est la partie de la tige par laquelle s'opère cette transmission. Pour résoudre ce problème, M. Dutrochet a fait plusieurs expériences fort délicates, desquelles il résulte qu'elle ne s'opère ni par la moelle ni par l'écorce, mais qu'elle a lieu exclusivement par la partie ligneuse du système central. Recherchant ensuite quels sont, dans cette partie ligneuse, les organes spéciaux de cette transmission, il arrive à cette conclusion qu'elle s'opère par l'intermédiaire de la sève contenue dans les tubes qu'il nomme *corpusculifères*. Il a trouvé que le maximum de la vitesse de ce mouvement de transmission est de quinze millimètres par seconde dans les pétioles des feuilles, et seulement de trois millimètres par seconde dans le corps de la tige. L'état de la température ne paraît point influer sur sa vitesse.

La lumière exerce sur l'irritabilité de la sensitive une influence très-remarquable et dont l'observation appartient également à M. Dutrochet. Si on place une sensitive dans une obscurité complète, en la couvrant avec un récipient opaque, cette plante perdra entièrement son irritabilité, et cela dans un temps plus ou moins long, suivant un certain état d'abaissement ou d'élévation de la température environnante. Ainsi, par une température de + 20 à 25 degrés R, il ne faut que quatre jours d'obscurité pour anéantir complètement

l'irritabilité d'une sensitive, tandis qu'il faut quinze jours d'obscurité pour produire le même effet lorsque la température environnante est dans les limites de + 10 à 15 degrés; en sorte qu'en prenant seulement les degrés de température dans lesquels la sensitive peut vivre, on peut établir que l'extinction de l'irritabilité de cette plante dans l'obscurité s'opère dans un temps dont la durée est en raison inverse de l'élévation de la température.

M. Dutrochet a observé que la sensitive privée de son irritabilité par le moyen de l'obscurité, la récupère par l'exposition à la lumière, et que cette réparation des conditions de l'irritabilité est plus rapide par l'exposition de la plante à la lumière directe du soleil, que par son exposition à la simple lumière du jour, telle qu'elle existe à l'ombre. Fondé sur ces observations, M. Dutrochet considère la lumière comme l'agent extérieur dans l'influence duquel les végétaux puisent le renouvellement des conditions de leur irritabilité, ou plus généralement de leur *motilité*, conditions qui sont sujettes à déperdition dans l'état naturel, et qui ainsi ont besoin d'être continuellement réparées.

Nous reviendrons un peu plus bas sur les expériences de l'auteur concernant la motilité des animaux.

Une plante dicotylédone peut-elle être distinguée dans tous les cas d'une monocotylédone, par la seule inspection de sa structure intérieure? Cette question s'est présentée à M. du Petit-Thouars, à l'occasion de deux tronçons isolés qu'une sorte de hasard avait fait tomber entre ses mains. Au premier aspect ils paraissaient avoir beaucoup de ressemblance: car l'un comme l'autre était un cylindre de matière fongueuse

ou médullaire traversé dans sa longueur par des filets isolés; de là on pouvait présumer qu'ils étaient tous les deux monocotylédones, mais dans l'un on voyait que ces filets étaient des faisceaux composés de différents tubes et surtout de trachées spirales, tandis que dans l'autre ils étaient de la plus grande simplicité. Cela suffisait pour constater qu'ils avaient appartenu à des végétaux très-différents; mais l'écorce qui existait sur le dernier et qui manquait au premier a permis d'aller plus loin. Par elle seule, ce botaniste a pu prononcer que c'était une plante dicotylédone, et même qu'elle appartenait aux ombellifères; enfin, que c'était une espèce du genre *ferula*, tandis que la première était réellement monocotylédone. Mais quelle était l'origine et la nature de ces filets disséminés dans la substance de la moelle? C'était une nouvelle question et très-importante dont on pouvait tirer des conséquences contre une des principales bases de la méthode naturelle; mais ce n'était que par l'inspection d'une plante vivante de ce genre qu'on pouvait en espérer la solution. M. du Petit-Thouars s'en est procuré une quelques mois après. C'était une tige du *ferula ferulago;* et elle lui a donné une pleine satisfaction, car ayant coupé net par le milieu un de ses entre-nœuds, il a vu de nombreuses gouttelettes d'une liqueur blanche suinter de toutes les parties de la tranche. Il a donc reconnu que ces filets n'étaient autre chose que des vaisseaux destinés à renfermer un suc propre très-abondant dans quelques ombellifères, mais surtout dans les férules. Ce seraient des lacunes formées aux dépens de la substance même du parenchyme médullaire, et qui ne dépendent en rien du corps ligneux. Ainsi cette singularité ne porte aucune atteinte aux principes sur lesquels repose main-

tenant l'étude des plantes, les rapports naturels. Il est donc certain qu'on peut distinguer plusieurs grandes séries de végétaux aussi bien par leur structure intérieure que par l'extérieure. Cependant on voit, par cet exemple, qu'il est besoin d'ajouter quelques nouvelles considérations à celles qui avaient été employées jusqu'ici.

Si le second tronçon eût été dépouillé de son enveloppe comme le premier, on n'eût trouvé de différence que dans la simplicité des filaments interposés dans l'un, tandis qu'ils étaient fasciculés dans l'autre, et c'est justement dans cette *fasciculation* que M. du Petit-Thouars trouve des caractères solides pour distinguer les grandes séries de végétaux. Suivant lui, ces fasciculations paraissent isolées dans les monocotylédones, tandis qu'elles se combinent d'une manière déterminée dans les dicotylédones. De là suit une différente combinaison des deux substances primordiales qui constituent les végétaux: le *ligneux* et le *parenchymateux*. Mais par la manière dont ces substances s'entremêlent, le *parenchymateux*, quoique toujours continu, paraît former trois parties distinctes dans les dicotylédones, qui sont : la *moelle*, les rayons *médullaires* et le *parenchyme* extérieur, tandis qu'il semble homogène dans les monocotylédones.

Les bornes de cet extrait ne nous permettent pas de suivre l'auteur dans les développements qu'il donne à cette idée. Nous nous contenterons de dire qu'il a observé plusieurs modifications de ce principe qui peuvent souvent le masquer. Il trouve qu'il y a peut-être autant de différence entre la structure intérieure des graminées et celle des autres monocotylédones, qu'entre celle-ci et celle des dicotylédones. Il annonce que les fougères, que l'on regarde comme absolument

semblables aux monocotylédones, quant à leur structure intérieure, en diffèrent prodigieusement.

Il est bien vrai que le stipe des fougères présente sur sa tranche des faisceaux isolés comme dans les monocotylédones; mais on en trouve de semblables dans de véritables dicotylédones. C'est par le grand nombre et le petit volume de ces faisceaux qu'on distingue les monocotylédones, tandis qu'au contraire les fougères sont remarquables, pour l'ordinaire, parce que leurs faisceaux sont très-gros et peu nombreux. Ils y forment sur leur tranche des figures constantes. On connaît celle de la fougère femelle qui représente, en quelque sorte, un aigle éployé, ce qui lui a valu le nom de Pteris-Aquilina. M. du Petit-Thouars a fait une étude particulière de ces tranches pendant son séjour dans nos colonies africaines; il croit pouvoir certifier qu'il aurait été à même de distinguer les cent vingt espèces qu'il a dessinées, par ce seul caractère, et il lui a suffi pour reconnaître comme identiques quelques-unes d'entre elles qui croissent aussi bien dans les environs de Paris que dans ces contrées éloignées.

Entre plusieurs remarques qu'il fait pour distinguer ces grandes séries végétales, il expose celle-ci : que dans les dicotylédones les feuilles croissent simultanément en tous sens, en sorte qu'elles forment toujours une figure semblable à celle qui existait dans le bourgeon; que dans les monocotylédones elles croissent du sommet à la base, en sorte qu'elles sont souvent sèches au sommet et tendres à la base ; enfin, dans les fougères, elles croissent de la base au sommet; quelques-unes même se développent si lentement, qu'il leur faut plus d'une année pour parvenir à leur maximum, et il y en a qui périssent avant d'y arriver.

M. Lestiboudois, botaniste de Lille, a présenté un Mémoire sur la nature de la tige des plantes monocotylédones. Il pense qu'elle ne grossit que par les fibres qui naissent dans son intérieur, en sorte qu'il la considère comme analogue seulement à l'écorce de la tige des dicotylédones. Il cherche à établir sa proposition, en soutenant que les feuilles et les rameaux sortent toujours du centre. On lui a opposé cette forte objection, que de grands arbres de cette classe, dont le tronc a son centre entièrement détruit par la pourriture, ne laissent pas de produire encore des rameaux et des feuilles. C'est ce que M. du Petit-Thouars et M. de La Billardière ont observé souvent sur les dracœna des forêts de l'île de France.

Ordinairement le style est placé sur l'ovaire; et quand il y a plusieurs ovaires, chacun a son style. Mais il arrive aussi quelquefois que plusieurs ovaires, ou plusieurs loges distinctes, adhèrent autour de la base d'un style commun, et reçoivent, par cette voie, leur fécondation.

Cette partie de l'ovaire se nomme alors gynobase. M. Auguste de Saint-Hilaire, qui lui a donné une attention particulière, a constaté et décrit les modifications qu'elle éprouve dans les divers genres où on l'observe. Il présente comme résultat général de ses observations que le gynobase n'est autre chose qu'une columelle centrale déprimée.

M. Adrien de Jussieu, fils de notre célèbre confrère, entre sous des auspices favorables dans la carrière que sa famille a parcourue avec tant de gloire depuis un siècle et demi. Il a repris l'examen des Euphorbiacées, dont son illustre père

O 2

avait fixé les caractères dans son *Genera plantarum*, mais que les découvertes des voyageurs depuis trente ans ont doublée, et dans laquelle on connaît aujourd'hui plus de mille espèces.

On sait qu'en général elles montrent des propriétés délétères, qui se concentrent surtout dans leur embryon; mais elles ne sont pas non plus sans utilité. Les graines de plusieurs donnent de l'huile; le suc laiteux qu'elles répandent prend, dans quelques-unes, en se desséchant, la consistance de la gomme élastique : il en est qui possèdent un principe colorant.

Certaines euphorbiacées n'ont à leurs fleurs qu'une enveloppe, qui est un calice. D'autres en ont deux, et il s'agit alors de savoir si la seconde est une corolle ou un calice intérieur. Ce dernier nom lui avait été donné par une autorité particulièrement respectable pour l'auteur : mais comme cette enveloppe intérieure est souvent colorée, et qu'elle se flétrit et tombe avant l'extérieure, M. Adrien de Jussieu se permet d'énoncer l'opinion qu'elle mérite alors le nom de corolle; et toutefois, comme elle manque très-souvent, il ne croit pas que l'on doive y attacher dans cette famille une grande importance. Il examine avec un détail et une attention singulière toutes les formes et les dispositions que prennent les parties de la fleur et du fruit dans les différents genres qu'il décrit au nombre de 83, dont 15 sont nouveaux pour la botanique.

Les sexes séparés; les loges du fruit distribuées autour d'un axe central; les graines au nombre d'une ou deux suspendues au sommet de chaque loge; le périsperme charnu, les cotylédons planes, la radicule supérieure, sont les caractères généraux de la famille.

M. Adrien de Jussieu la divise d'abord en deux groupes, dont le premier comprend les genres qui ont deux graines dans chaque loge, et se subdivise en deux sections, selon que, dans les fleurs mâles, les étamines adhèrent immédiatement au centre de la fleur, ou à la base d'un rudiment de pistil: le second comprend ceux qui n'ont qu'une graine par loge; et pour subdiviser ce groupe, qui est de beaucoup le plus considérable, l'auteur est obligé de tirer ses caractères de l'inflorescence, qui tantôt est pourvue d'un involucre, tantôt est en épi avec ou sans feuilles florales, tantôt enfin est en panicule ou en bouquet. Ce sont là les caractères des quatre sections de ce second groupe.

Ce travail très-précis, plein de faits nouveaux et de vues ingénieuses, et accompagné de dessins soignés de la main de l'auteur, vient d'être publié: il ne peut qu'annoncer bien avantageusement ce jeune botaniste dans le monde savant.

M. Poiteau a présenté la description de 5 genres d'arbres de la famille des myrtes, dont les botanistes n'avaient encore les caractères que d'une manière incomplète; le lécytis, le bertholletia, le couroupita, le gustavia, et le couratari.

Le plus remarquable est le lécytis, dont l'espèce la plus connue, à cause de son grand fruit ligneux en forme de vase ouvert, et rempli de graines que les singes aiment beaucoup, porte, dans nos colonies, le nom de marmite de singe. M. Poiteau en décrit trois espèces nouvelles, dont une est un arbre de haute futaie, mais ne porte que d'assez petits fruits. Le bertholletia est un des arbres les plus utiles du Nouveau-Monde. Haut de plus de cent pieds, il porte des fleurs jaunes et larges de deux pouces, disposées en grappes à l'extrémité

des rameaux, suivies de fruits gros comme des têtes d'enfants, contenant 12 ou 15 amandes d'un goût exquis, et qui donnent une bonne huile. C'est un objet considérable de commerce, et on en expédie du Brésil à la Guyane, en Portugal et en Angleterre.

La partie botanique du grand ouvrage de MM. de Humboldt et Bonpland avance rapidement vers sa fin. M. Kunth a terminé cette année le cinquième, et la plus grande partie du sixième volume des *Nova genera et species plantarum Americæ Æquinoctialis.* Toutes les familles à corolle polypétale, à l'exception des légumineuses, des térébinthes et des rhamnées, se trouvent comprises dans ces deux volumes. Les trois dernières familles restent encore à publier. Mais M. Kunth a fait connaître, dans la partie de l'ouvrage de M. de Humboldt qui est déja entre les mains des botanistes, plus de quatre mille espèces, dont les neuf dixièmes au moins sont nouvelles, et appartiennent à 137 familles et 865 genres. Il n'existe aucun autre ouvrage qui présente à la fois un si grand nombre de plantes exotiques, rangées d'après la méthode naturelle, décrites et figurées jusque dans les moindres détails de leur fructification. Parmi les Flores de l'Amérique méridionale, celle de Swarts, par exemple, ne renferme que mille espèces.

Il ne reste à publier qu'un cahier des *mimoses.* Cet ouvrage, exécuté avec le luxe et la beauté de gravure que l'habileté des artistes français a pu seule atteindre jusqu'ici, sert de supplément au grand ouvrage. M. Kunth a publié, en outre, trois volumes in-8° d'un extrait raisonné des *Nova Genera*, sous le titre de *Synopsis plantarum Æquinoctia-*

lium Orbis Novi. Dans ces différents ouvrages il a établi plusieurs familles nouvelles, en a mieux circonscrit d'autres, institué 128 genres nouveaux, et déposé un grand nombre d'observations sur des plantes étrangères à son premier travail. Quelques-unes de ses idées ont été développées dans des mémoires particuliers qu'il a présentés successivement à l'Académie, et dont nous citerons seulement une *Notice sur le Myrtus et l'Eugenia*, deux genres qu'il propose de réunir en un seul, et la *Révision des familles des Malvacées, des Büttneriacées et des Siliacées.* Ce dernier travail a été adopté en entier par M. Decandolle dans son *Synopsis Regni vegetabilis.* Dans une notice historique sur Richard, M. Kunth a donné un analyse raisonnée des travaux carpologiques de cet illustre botaniste, décédé en 1821, et dont nous lirons bientôt l'éloge historique.

La *Monographie des Mélastômes et des Rhexias,* ouvrage rédigé en plus grande partie par M. Bonpland, a été terminée par M. Kunth dans le courant de cette année.

L'*Isoëtes lacustris* est une plante que l'on range aujourd'hui auprès des *lycopodes,* et qui croît dans le limon des eaux stagnantes. D'une base bulbeuse à trois lobes, elle pousse une touffe de feuilles étroites, pointues, tubuleuses, et plus ou moins longues, suivant le degré d'humidité dont elles jouissent, au pied desquelles sont de petits boucliers membraneux qui couvrent chacun une petite cavité, et servent de réceptacles, les uns, ceux des feuilles les plus intérieures, à la poussière mâle, les autres, ceux des feuilles extérieures, aux semences. On n'avait point encore suffisamment observé ces semences, ni leur manière de germer; et

M. Raffeneau Delille, professeur de botanique à Montpellier, profitant de l'abondance de l'isoètes dans un petit lac des environs de cette ville, vient de les soumettre à un examen très-attentif. Elles sont très-petites, et contiennent sous un double tégument marqué de trois arêtes, un petit corps vésiculaire, que M. Delille considère comme un embryon sans cotylédon. Les téguments s'ouvrent en trois valves dans le haut pour laisser passer la première feuille, en même temps què la première radicule les perce dans le bas; les autres feuilles et les autres radicules poussent ainsi successivement; et pendant ce temps, le tubercule qui est entre elles grossit et devient le bulbe ou la souche qui les portera toutes. Les feuilles en dessèchent quand la plante est privée d'eau; mais le bulbe conserve long-temps sa vitalité, et repousse même après deux ans quand on l'humecte.

Les lichens sont une famille de plantes cryptogames dont le nombre est prodigieux, mais dont la classification et la distinction sont accompagnées de grandes difficultés, à cause du peu de parties qu'ils présentent, et du peu de caractères auxquels ces parties donnent prise. Cependant les travaux de Hoffman et d'Acharius ont ouvert de nouvelles voies et excité une grande émulation pour ce travail.

M. Delise, de Vire, département du Calvados, se propose d'en donner l'histoire générale, et en a déja recueilli à cet effet plus de mille espèces. Il a présenté à l'Académie, comme échantillon de son travail, l'histoire particulière du genre *sticte*, l'un des trente-cinq qu'il conserve ou qu'il établit dans la famille. Ce fragment est fait pour donner une idée très-avantageuse de l'ensemble, dont il est fort à desirer que

les amateurs de cette partie du règne végétal puissent bientôt jouir.

Les écorces employées en médecine nous arrivent des pays étrangers dans leur état brut, et souvent encore chargées des lichens et des autres cryptogames qui croissent naturellement sur elles. M. Fée s'est attaché à étudier ces espèces de parasites, et en a découvert et décrit un grand nombre que les voyageurs, occupés dans leurs courses d'objets plus sensibles, n'avaient pas remarquées. Les lichens surtout lui ont donné lieu d'établir dans cette famille une distribution nouvelle. Il la fonde premièrement sur les diversités de formes du corps même du lichen, ou de ce que les botanistes nomment *thallus,* et ne prend que pour caractères secondaires les organes variés qui naissent sur ce *thallus,* et que les botanistes, qui les nomment *apothecium*, ont supposé assez légèrement, à ce que pense M. Fée, appartenir à la génération.

Comme il arrive, dans les pays étrangers aussi bien que dans le nôtre, que certains cryptogames se fixent de préférence sur certaines écorces, les descriptions de M. Fée, toutes très-exactes et très-détaillées et accompagnées de figures fort soignées faites par M. Poiteau, indépendamment de l'accroissement qu'elles fournissent à la botanique, pourront encore aider, en certains cas, les pharmaciens à distinguer avec plus de précision les écorces que leur apporte le commerce.

M. Moreau de Jonnès, qui suppose que les terrains, soit calcaires, soit volcaniques des Antilles, ont été mis à découvert plus tard que les grands continents, a dû rechercher l'origine de leur population végétale, et par quels agents et

de quels pays chacune de leurs plantes y a été transportée.

Pour cet effet, il a préparé, pendant qu'il séjournait à la Martinique, des mélanges de terre propres à la végétation, et dans lesquels il s'est bien assuré qu'il ne subsistait point de germes de plantes. Il les a exposés avec les précautions convenables, et séparément, à l'action des pluies orageuses, à celle des différents vents, à celle des oiseaux de passage, à celle des divers courants, et compté, autant qu'il lui a été possible, le nombre des espèces que chacune de ces causes a amenées. Il a aussi cherché à apprécier ce que les communications des hommes peuvent apporter de semences et de germes de plantes avec les eaux prises en d'autres pays pour l'approvisionnement des navires, avec les matières qui servent à emballer des marchandises étrangères, avec les bois et les fourrages, et jusque dans le lest des vaisseaux et parmi les poils des bestiaux que l'on importe dans les îles.

Le plus puissant et le plus constant des agents naturels lui a paru être le grand courant équatorial de l'Atlantique. Il assure avoir reconnu qu'en deux mois il apporta des graines de cent cinquante espèces différentes ; mais toutes les semences ne se laissent pas également transporter par tous les agents ; et pour pouvoir arriver dans une direction et à une distance données, encore en état de reproduire leurs espèces, elles doivent réunir certaines conditions de légèreté, de mobilité, de résistance à la destruction, de difficulté ou de facilité de germination et autres semblables ; ainsi, parmi les cent cinquante espèces de semences apportées par le courant, il n'y en eut que vingt-six qui germèrent.

Quant à l'action des hommes, M. de Jonnès la croit bien supérieure à celle des agents naturels, et pense qu'elle peut

en quelques siècles changer entièrement les rapports établis par ces derniers depuis l'origine d'un pays.

M. de La Billardière avait présenté à l'Académie, en 1802, un Mémoire sur le lin de la Nouvelle-Zélande, plante nommée par les botanistes *phormium tenax*, où il annonçait la possibilité de cultiver cette plante en France, et faisait voir que ses fils surpassent de moitié ceux du chanvre pour l'expansibilité et pour la force, deux qualités également précieuses dans la fabrication des cordes. Ces fils sont en même temps de la plus grande finesse, en sorte que l'on pourra les employer aux ouvrages les plus délicats.

M. Cachin, inspecteur-général des ponts et chaussées, est parvenu en effet à élever le *phormium tenax* à Cherbourg, et à lui faire porter des graines qui, semées par plusieurs cultivateurs, ont germé avec facilité : et M. Gillet de Laumont a rendu compte à l'Académie d'un succès qui promet à notre pays une nouvelle richesse végétale.

L'un des Nestors de la botanique en France, M. le docteur Paulet, de Fontainebleau, si connu par ses travaux sur les champignons, s'est occupé depuis long-temps de reconnaître les plantes et les animaux dont les anciens ont parlé, et a présenté cette année à l'Académie un grand Commentaire sur l'Histoire des Plantes de Théophraste, et un autre ouvrage de moindre volume intitulé : *Flore et Faune de Virgile*. C'est une des matières les plus difficiles et les plus sujettes à controverse de toute la critique classique.

L'*hyacinthus*, par exemple, est aux yeux de Linnæus le pied-d'alouette (*delphinium Ajacis*); Sprengel soutient que

P 2

c'est le *glayeul* (*gladiolus communis*); Dodoens veut que ce soit le *martagon* (*lilium martagon*), et Martin le *lis orangé* (*lilium croceum*).

Il n'est guère de plantes, si l'on excepte les plus communes, celles qui ont toujours été des objets d'agriculture et d'économie domestique, qui ne puissent exciter de semblables contentions. M. Paulet apporte donc aussi des conjectures plutôt que des résultats décisifs; mais plusieurs de ces conjectures sont heureuses, et réunissent de plus grandes probabilités en leur faveur que celles de ses devanciers.

M. de Humboldt a fait connaître, il y a plusieurs années, les propriétés de l'arbre dit *de la vache*, dont le suc ressemble au lait, non-seulement par sa couleur, mais parce qu'il est nourrissant et non pas vénéneux, comme le sont la plupart des laits végétaux. MM. Rivero et Boucingault en ont fait l'analyse. Il s'y forme des pellicules comme sur le lait de vache, et elles ressemblent à la frangipane. Dessous reste un liquide huileux, dans lequel nage une substance fibreuse qui se racornit par la chaleur et répand alors une odeur caractérisée de viande frite. Ce lait donne de la cire, de la fibrine semblable à celle des animaux, et un peu de sucre et d'un sel magnésien.

ZOOLOGIE.

Les premiers historiens des colonies européennes en Amérique nous assurent que les Espagnols, lors de leur établissement dans les Antilles, y lâchèrent un certain nombre de cochons qui y pullulèrent promptement, et y furent la souche

d'une race sauvage, nommée *cochons marrons*, qui a fourni pendant long-temps une grande ressource alimentaire, mais que le peu de soins donnés à sa conservation a laissé entièrement détruire dans presque toutes les îles.

D'un autre côté, on sait qu'il existe en Amérique un genre de quadrupèdes connu sous le nom de *dicotyle* ou *pecari*, voisin des cochons, mais qui s'en distingue par un orifice glanduleux percé sur le dos, par des défenses courtes et droites ne sortant pas de la bouche, et par le manque de queue et d'un doigt interne au pied de derrière.

Ces animaux sont aujourd'hui confinés sur le continent; mais il paraît qu'il y en a eu, au moins momentanément, à Tabago, et peut-être dans quelques-unes des îles voisines.

Les naturalistes en ont décrit exactement deux espèces, l'une à collier blanc, l'autre à gorge et lèvres blanches; et l'on pourrait croire, d'après une indication un peu confuse de Bajon, qu'il en existe une troisième, à laquelle nos colons de Cayenne auraient aussi transporté le nom de *cochons marrons*. Il y a en effet un mélange et des interversions singulières de noms dans les notices que l'on en donne, et on conçoit qu'il ne pouvait guère en être autrement, de la part d'hommes aussi ignorants que les Du Tertre, les Labat, et les autres moines ou mauvais chirurgiens auxquels nous devons les descriptions de nos colonies, de la part de gens qui nous disent sans hésiter que le pécari respire par le trou qu'il a sur le dos, et que c'est ce qui fait que ne s'essoufflant point il est difficile de le forcer à la chasse. Il était donc naturel que M. Moreau de Jonnès trouvât ces espèces confondues dans plusieurs relations; que souvent on crût avoir observé des cochons marrons, lorsque l'on n'avait vu

que des pécaris, et que réciproquement ceux-ci prissent souvent les noms de cochons et de sangliers à cause de leur ressemblance avec ces quadrupèdes d'Europe. Remarquant donc que plusieurs relations attribuent des cochons marrons à des îles ou à des endroits du continent où nul motif n'avait pu faire porter nos cochons d'Europe, et à des époques si voisines de celle de la découverte, qu'il était presque impossible qu'ils s'y fussent multipliés; voyant qu'une espèce de pécari paraît porter aussi dans une de nos colonies le nom de cochon marron, il en conclut que les animaux nommés ainsi, et autrefois si nombreux dans les Antilles, n'étaient point d'origine européenne, mais appartenaient à cette grande espèce de pécari dont on n'a connaissance que par l'indication de Bajon. Peut-être cette conclusion est-elle juste pour plusieurs îles, mais il est difficile qu'elle ne paraisse pas un peu trop générale, surtout relativement aux cochons marrons de la Martinique dont Du Tertre dit expressément qu'ils sont armés de deux *horribles dents bouclées comme des cornes de béliers,* caractère propre à nos sangliers d'Europe, mais que n'ont pas les pécaris.

M. Cuvier, à l'occasion de ses recherches sur les cétacées fossiles, a été obligé d'en faire de fort étendues sur les cétacées qui vivent aujourd'hui dans la mer. Il a fait connaître de nouvelles espèces de baleines et de dauphins, une entre autres, qui n'a point de nageoire sur le dos. Il a, au contraire, rayé du catalogue des animaux, soit des baleines, soit des dauphins, et surtout plusieurs cachalots qui y avaient été placés en double emploi; et il a donné de tous ces animaux des descriptions ostéologiques nouvelles ou plus com-

plètes que celles que l'on possédait, faites sur les nombreux squelettes dont le zèle des voyageurs a enrichi depuis peu la grande collection anatomique du cabinet du Roi : tels qu'un squelette de baleine des mers Antarctiques, de soixante pieds; un autre de rorqual, des mêmes mers, de trente-cinq pieds; un squelette de cachalot de soixante-quinze pieds, et plusieurs autres de moindre taille.

M. Caillaud, ce courageux voyageur qui a remonté si avant dans la Nubie, et jusqu'aux confins de l'Abyssinie, a rapporté du Nil d'Abyssinie, ou Fleuve Bleu, des coquilles bivalves très-semblables à des huîtres par l'extérieur; et comme les huîtres fossiles ont concouru, en plusieurs occasions, à déterminer la nature marine de certains terrains, on pouvait croire que cette découverte ne serait pas sans quelque influence sur les théories géologiques. M. Daudebart de Férussac a examiné ces coquilles de plus près, et a reconnu qu'ayant à l'intérieur deux empreintes musculaires, elles doivent être placées dans le genre des *éthéries* de M. de Lamark. Ce genre n'était connu que par des échantillons conservés dans les cabinets, et l'on ignorait le lieu natal de ses espèces. M. de Férussac en fait une revue, où il détermine plus exactement leurs caractères. Il sépare même l'une d'elles, et en fait un genre qu'il nomme *müllerie;* sa charnière ressemble davantage à celle des pernes.

M. Caillaud a aussi rapporté du canal vulgairement appelé de Joseph en Égypte, une coquille rare et dont on avait fait un genre sous le nom d'iridine. M. de Férussac prouve que les caractères qui avaient servi à l'établir ne sont pas constants, et que l'on doit laisser l'iridine dans le genre des moules.

On sait que M. Caillaud a retrouvé aussi le scarabée d'un vert doré qui a plus spécialement servi de modèle aux images que les Égyptiens ont faites de leur scarabée sacré, qui jouait un grand rôle parmi les symboles vénérés dans leur religion.

M. de Férussac, voulant profiter du départ d'une expédition pour Madagascar, île sur laquelle les regards des naturalistes sont tournés en vain depuis si long-temps, y a envoyé à ses frais un voyageur, M. Gaubert, qui a résisté jusqu'ici aux dangers dont il est environné. Déja il a fait un premier envoi. Il est à désirer que son zèle ne se démente pas, et que celui de M. de Férussac obtienne ainsi tout le succès qu'il mérite. Il ajoutera aux services qu'il rend aux sciences par la publication du Bulletin universel, dans lequel il rassemble toutes les nôtions éparses qui peuvent les intéresser dans les ouvrages périodiques de tous les pays.

M. Duméril a réuni, dans un vol. in-8°, auquel il a donné le titre de *Considérations générales sur les insectes*, les notions les plus importantes pour diriger utilement dans l'étude de ces animaux. Soixante planches très-bien exécutées et tirées en couleur accompagnent cet ouvrage; elles représentent plus de 350 genres principaux. L'auteur y traite successivement du rang que les insectes paraissent devoir occuper parmi les autres êtres animés, des formes, de la structure et des fonctions de ces animaux, des moyens que les insectes emploient pour conserver leur existence et pour perpétuer leur race. Le travail principal de l'auteur est exposé dans les deux chapitres qui ont pour objet de faire connaître

la méthode analytique, et d'exposer les caractères essentiels qui distinguent les ordres, les familles et les genres de la classe des insectes. Le livre est terminé par l'indication et le jugement des ouvrages principaux qui ont les insectes pour objet.

M. Carteron, médecin de Troyes, a communiqué une observation faite sur un kiste de l'épiploon rempli d'une cinquantaine d'hydatides qui contenaient une humeur transparente, tandis que tous les liquides et les solides du corps étaient colorés d'un jaune foncé. Il en conclut que ces hydatides, bien que dépourvues d'aucun organe autre que la vésicule qui en faisait le corps, étaient des animaux doués d'une existence propre, et non des produits de la maladie dans le corps où elles ont été trouvées.

Nous avons parlé, l'année dernière, du grand travail de M. Bory de St-Vincent sur ces êtres ambigus qui, pendant une partie de leur vie, sont unis en filets dont la couleur et toutes les apparences rappellent les végétaux, et qui, à certaines époques, se séparent et prennent la mobilité volontaire des animaux. M. Gaillon, observateur éclairé dont nous avons déja mentionné un Mémoire intéressant sur la cause de la couleur verte dans les huîtres, vient de constater que le *conferva comoïdes* appartient à cette catégorie. Il a vu les corpuscules verdâtres qui en forment l'axe, se détacher, s'avancer plus ou moins rapidement, changer de place, agir enfin en tout comme les enchelys et les cyclidies.

Prenant des filaments entiers, il a forcé ces petits êtres à se désagréger avant le temps, et ils lui ont montré les mêmes

mouvements volontaires. Leur besoin de s'associer est si grand, que dès que les jeunes le peuvent, ils se mettent bout à bout sur une seule ligne; et lorsqu'ils sont dans cette disposition, M. Gaillon a cru remarquer qu'il s'exsude de leur substance une mucosité qui se forme en membrane et les enveloppe entièrement.

M. Mertens, botaniste de Bremen, a vu des faits semblables sur le *conferva mutabilis*. Le 3 août, dit-il, elle était dans son état de plante; le 5, elle s'est résolue en molécules douées de mobilité; le 6, quelques-unes de ces molécules se réunirent en simples articulations; et le 11, elle était reconstituée dans sa forme primitive.

Ces transformations microscopiques ont continué d'occuper M. Bory de St-Vincent. Il aurait voulu pouvoir remonter jusqu'aux premières combinaisons matérielles dont ces corpuscules semblent si voisins. En observant avec suite tout ce qui se montre successivement dans une eau exposée à la lumière, il a cru y voir d'abord la matière prendre la forme d'une simple mucosité sans couleur et sans forme: si l'eau contient quelque substance animale, elle produit une pellicule de cette mucosité à sa surface, se trouble ensuite, et fait voir une infinité d'atomes vivants, si l'on peut appeler ainsi ces monades qui, grossies mille fois, n'égalent pas encore la piqûre d'une aiguille, et qui cependant se meuvent en tout sens avec une prodigieuse vitesse. C'est ce que M. Bory nomme la matière dans l'état vivant. Quand l'eau est exposée à l'air et à la lumière, il s'y forme promptement ce que l'on nomme la matière verte de Priestley, que beaucoup d'observateurs ont cru être le premier état de certaines con-

ferves ou de plantes de genres analogues. M. Bory pense que c'est une combinaison d'une nature plus générale, et susceptible seulement d'entrer dans la composition de ces plantes, ainsi que des animalcules qui en sortent et qui les reproduisent. Il nomme cette combinaison la matière dans l'état végétatif; c'est elle qui rend les animaux infusoires verts. Ceux qui colorent les huîtres, selon l'observation de M. Gaillon, ne produisent cet effet, au dire de M. Bory, que parce qu'ils sont eux-mêmes colorés par la matière verte; elle colore de même l'eau et les coquilles de ces huîtres, et il ne serait pas impossible que l'on en trouvât qui fussent teintes immédiatement par cette matière sans que des animalcules les eussent pénétrées.

Il est si difficile de rendre des observations de ce genre complètes, et l'on peut toujours si aisément supposer un état antérieur, encore plus délié et qui aura échappé à tout microscope, ou des germes invisibles que la nécessité du concours de l'air empêche d'écarter, que beaucoup de philosophes se refuseront probablement aux conséquences que l'auteur voudrait tirer de ces faits, pour attribuer à la matière une disposition générale à s'organiser qui serait indépendante du mode ordinaire de génération.

M. Gaillon a adressé de nouvelles observations sur les animalcules qui colorent les huîtres, et que, d'après M. Bory de St-Vincent, il nomme *navicules vertes*. Il en a remarqué d'autres espèces qui pénètrent aussi dans le tissu de l'huître et lui donnent des couleurs différentes, la rendant grise, brune ou jaunâtre : ce sont, entre autres, les *vibrio bipunctatus* et *tripunctatus* de Müller. Ce qui est remarquable,

c'est que la navicule verte n'existe pas dans les eaux de la mer, ni même dans les eaux douces des environs de Dieppe: elle ne se multiplie que dans un certain degré de salure et de stagnation de l'eau, tel qu'on sait le produire dans les parcs où cette coloration s'opère. Cependant, M. Gaillon en a vu qui étaient sorties d'une conferve du genre *vaucheria*, venues dans les eaux douces d'auprès d'Évreux.

Une femme âgée d'environ quarante ans, après vingt ans de maladie, et dont la médecine avait désespéré, s'était remise aux soins d'un praticien qui, à l'aide d'un assez violent remède, prétendait lui rendre la santé. Elle ne tarda pas à éprouver un mieux sensible, mais en même temps des démangeaisons violentes se firent éprouver sur toute la surface de son corps. Sa surprise fut grande lorsqu'elle s'aperçut que des milliers de petits animaux brunâtres, presque imperceptibles, sortaient à l'instant de toutes les parties où elle s'était grattée. Ces animaux, observés au microscope par M. Bory de St-Vincent, et au grossissement de cinq cents fois, se sont trouvés des acarides fort voisins des ixodes, mais susceptibles de former un genre nouveau que caractériserait un petit suçoir, accompagné de deux palpes composés de quatre articles. La forme générale de cet acaride est celle des genres voisins. La femme qui les produisait par milliers, surtout dans les jours chauds, n'a point communiqué ces hôtes incommodes aux personnes qui la soignaient, ni à son mari, qui ne cessa d'habiter avec elle. L'amélioration de la santé de cette malheureuse n'a pas duré : après un mieux apparent elle a succombé à l'éruption des acarides microscopiques qu'elle produisait. Un très-beau dessin accompagnait le Mémoire de M. Bory de St-Vincent.

Ce naturaliste, qui ne croit pas à la possibilité de la génération spontanée dans les animaux articulés, pense que les œufs des petits animaux peuvent, comme les cynips, les abeilles, etc., être fécondés pour plusieurs années; qu'ils avaient été absorbés dans cet état, et qu'ils étaient venus à éclore sous l'épiderme, dont ils sortaient au moindre grattement.

PHYSIOLOGIE.

Le corps animal contient de l'azote dans tous ses principes, et il n'est pas difficile de voir que tous ses aliments lui en fournissent beaucoup; nous avons même rapporté, il y a quelques années, des expériences de M. Magendie, d'après lesquelles certains animaux que l'on nourrit uniquement de substances non azotées, comme de sucre, ne tardent pas à souffrir et à périr. Mais on n'était pas autant d'accord sur la manière dont se comporte l'azote qui pénètre dans le poumon avec l'air atmosphérique lors de la respiration : les uns pensaient qu'il ressort du poumon comme il y est entré; d'autres, qu'il y en a quelque partie d'absorbée; d'autres, au contraire, qu'il en ressort plus qu'il n'en est entré, parce que l'azote superflu du corps s'exhale par cette voie.

M. Edwards a trouvé, par des expériences directes, que ces trois opinions sont vraies, quant au résultat définitif dans certaines circonstances, et selon l'âge de l'animal, la saison de l'année et la température du lieu où la respiration s'exécute; mais, qu'en réalité, il y a constamment absorption et exhalation, et que le résultat dont nous venons de parler dépend seulement de la quantité dont l'une l'emporte sur l'autre.

Ce travail complète ceux que M. Edwards a présentés successivement à l'Académie, concernant l'action des agents extérieurs sur le corps animal, et dont il vient de publier le recueil en un volume in-8°.

Dans un Mémoire sur l'action musculaire, MM. Dumas et Prévost ont communiqué des observations microscopiques fort intéressantes sur la distribution des nerfs dans les fibres musculaires, et sur les formes que prennent celles-ci lors de leurs contractions. Ils placent sous le microscope une lame amincie de muscle, conservant encore ses nerfs, et la mettent en contraction par le moyen du galvanisme. C'est en se ployant en zigzag que les fibres se contractent; et l'on voit les derniers filets nerveux partir parallèlement entre eux du rameau qui leur donne naissance, pour se rendre précisément aux points de ces fibres où elles forment leurs angles.

Les auteurs en concluent que le raccourcissement de la fibre résulte de la tendance que ces filets nerveux ont à se raccourcir, et ils pensent que cette tendance leur est imprimée par une action électrique.

M. de Humboldt, à l'occasion de ces expériences, a communiqué verbalement à l'Académie les résultats de celles qu'il a faites récemment sur la *section longitudinale et la ligature des nerfs*. Il distingue entre les cas où, dans le circuit galvanique, le courant passe par le nerf entier, et les cas où le courant ne traverse que la portion supérieure du nerf, et où cette portion réagit *organiquement* sur le muscle. Des expériences faites sur la section transversale du nerf, et la réunion des bouts du nerf au moyen de lames métal-

liques, prouvent que les contractions musculaires, lorsque la partie supérieure seule se trouve sur le passage du courant électrique, ne sont pas l'effet d'un *coup latéral*. La réaction organique du nerf cesse lorsqu'il y a perforation, fendillement ou amincissement. Ces expériences sur la section longitudinale du nerf semblent prouver que l'appareil nerveux ne peut agir sur les mouvements des muscles, que dans son état d'intégrité. La lésion du névrilème produit les mêmes effets que la lésion de la pulpe médullaire. Lorsque le courant électrique traverse tout le nerf et le muscle, la *lésion* et la *ligature* èmpêchent les contractions musculaires, *dans le seul cas* où la portion du nerf comprise entre la lésion longitudinale ou la ligature et l'insertion du nerf dans le muscle, au lieu d'être isolée et entourée d'air, est enveloppée d'une couche de chair musculaire. Les contractions reparaissent lorsqu'on ôte cette enveloppe du nerf, ou lorsque, sans l'ôter, on établit, par un lambeau de chair musculaire, une nouvelle communication entre le zinc excitateur du nerf et le muscle. M. de Humboldt a montré comment ces phénomènes, compliqués en apparence, s'expliquent d'après les lois de la *conductibilité électrique*. Les effets doivent varier avec la direction du courant, la masse variable des conducteurs, et la quantité d'électricité mise en mouvement par le contact plus ou moins grand des substances humides avec le zinc, qui est l'armature du nerf. Si la quantité d'électricité reste la même, le *nerf isolé* ou nu en reçoit nécessairement beaucoup plus que le *nerf enveloppé*. L'électricité, en traversant un conducteur d'une masse considérable, se répartit dans cette masse et à la surface. C'est de cette répartition que dépend l'effet de l'enveloppe de chair

musculaire dans laquelle on cache la portion du nerf comprise entre la ligature et l'insertion dans le muscle. L'enveloppe restant ainsi disposée, on peut voir reparaître les contractions, si l'on augmente la quantité du fluide électrique mis en mouvement par une nouvelle communication qu'on établit (au moyen d'un lambeau de chair musculaire) entre le zinc et le muscle. L'obstacle que la ligature oppose dans les expériences galvaniques, lorsqu'elle est placée au point de l'insertion du nerf dans le muscle, avait déja été observé par Valli; mais ce physicien n'avait pas reconnu toutes les conditions qui caractérisent les effets de la ligature, et qui se retrouvent dans la section longitudinale du nerf.

Pensant que la physiologie animale et la physiologie végétale ne forment qu'une seule et même science, M. Dutrochet a joint à ses observations sur les végétaux, des recherches sur la structure intime des organes des animaux, et sur le mécanisme de la contraction musculaire. En examinant au microscope le cerveau des mollusques gastéropodes, il a vu que cet organe est composé de cellules sphériques agglomérées, sur les parois desquelles on aperçoit une grande quantité de corpuscules globuleux. Cette organisation lui a paru tout-à-fait semblable à celle que présente le tissu cellulaire médullaire des végétaux. Ses observations sur les organes musculaires ont confirmé ce que plusieurs observateurs avaient déja annoncé, savoir, que la fibre musculaire élémentaire est formée par une réunion de corpuscules globuleux placés à la file. Il a vu de plus que, dans le cœur des mollusques gastéropodes, cette agrégation des corpuscules musculaires est confuse, et ne présente point la disposition

ordinaire en séries longitudinales. Ayant sollicité, au moyen d'un acide, la contraction de fragments du cœur de la grenouille, et de fragments du cœur de quelques mollusques gastéropodes, il a vu que la contraction du tissu musculaire consiste essentiellement dans un plissement, c'est-à-dire dans l'établissement de courbures dirigées en sens alternativement inverses, d'où résulte le raccourcissement de ce tissu. Il a vu également que les alcalis ont la propriété de faire cesser ce plissement, comme les acides ont celle de le provoquer. Ces observations, qui sont, à plusieurs égards, le complément de celles de MM. Prévost et Dumas sur le même sujet, paraissent à l'auteur ne devoir laisser aucun doute sur le mécanisme de la contraction musculaire. Elles lui semblent en même temps offrir une preuve convaincante de l'identité de l'irritabilité animale et de l'irritabilité végétale, l'une et l'autre consistant également dans l'établissement d'un état de courbure élastique ou dans une *incurvation* que certains solides organiques sont susceptibles de prendre et de conserver, pendant un espace de temps plus ou moins court, après lequel ces mêmes solides reprennent leur état antécédent de redressement ou de *relâchement*. C'est ce qui constitue l'*incurvation oscillatoire* que M. Dutrochet a observée dans le règne végétal comme dans le règne animal.

Les animalcules du sperme, et leurs rapports avec la génération, ont aussi été l'objet des observations microscopiques de MM. Dumas et Prévost. Ils ont établi que ces animalcules existent tout formés dans la semence, dès les testicules; que les liquides qui peuvent s'y mêler dans son trajet ultérieur, et venir ou des glandes de Cooper, ou de quelque

autre organe adhérent au canal qu'elle traverse, ne lui fournissent que des corpuscules ovales et sans vie; que c'est par erreur que Buffon et Needham ont cru voir ces corpuscules se métamorphoser et former des animalcules par leur réunion. Nous reviendrons sur la suite importante que les auteurs ont donnée à ces observations.

Le cerveau, les nerfs et leurs fonctions ont été, cette année et la précédente, l'objet de grandes recherches soit anatomiques, soit expérimentales, de la part de plusieurs physiologistes.

Déja nous avons rendu compte des expériences par lesquelles M. Magendie établit que les racines postérieures des nerfs sont les organes exclusifs de la sensibilité, et les antérieures ceux du mouvement volontaire. Il a eu occasion de constater cette répartition des fonctions nerveuses, sur des individus vivants. Un homme dont la moelle de l'épine était altérée et ramollie dans une partie de sa moitié antérieure, avait perdu le mouvement dans les muscules qui reçoivent leurs nerfs de cette partie, et il y avait conservé la sensibilité.

Nous avons analysé aussi les expériences de M. Flourens, qui tendent à prouver que le siége des sensations, des perceptions et des volitions, est dans les lobes cérébraux, et que la coordination régulière des mouvements dépend du cervelet, mais que le jeu de l'iris et l'action de la rétine tiennent aux tubercules appelés dans les mammifères quadrijumeaux, qui n'étant pas toujours au nombre de quatre, ont reçu le nom plus général de tubercules optiques, fondé sur leur liaison avec les nerfs du même nom, constatée, comme

nous l'avons vu dans notre analyse de 1808, par MM. Gall et Spurzheim.

L'auteur a procuré à la partie de ses résultats qui concerne les sensations, un genre de confirmation bien remarquable. Une poule, privée de ses hémisphères cérébraux, a vécu dix mois entiers dans la plus parfaite santé. Pendant ce temps elle se tenait bien sur ses jambes; mais elle n'entendait, ni ne voyait, ni ne donnait aucun signe de volonté: des irritations immédiates pouvaient seules interrompre momentanément le sommeil où elle était plongée. Sans désirs, sans appétit, on ne la nourrissait qu'en lui insérant journellement ses aliments dans le bec. Un long jeûne ne l'excitait point à les chercher elle-même; en vain on les mettait auprès d'elle, rien ne l'avertissait de leur présence; elle avalait de petits cailloux, quand on lui en donnait, aussi aisément que du grain; et cependant sa plaie s'était refermée, elle engraissait à vue d'œil.

Néanmoins il est possible de retrancher une certaine portion des lobes cérébraux sans qu'ils perdent complètement leurs fonctions sensitives : et même après une mutilation qui, sans être totale, a suffi pour les leur faire perdre entièrement, il arrive quelquefois qu'ils les recouvrent; mais s'ils en recouvrent une, la vue par exemple, ils les recouvrent toutes. Il peut arriver aussi qu'une mutilation du cervelet, qui a suffi d'abord pour rendre tous les mouvements désordonnés, n'empêche pas qu'après quelque temps ils ne reprennent leur régularité. Ce sont des faits intéressants par les pronostics qu'ils peuvent fournir relativement aux blessures des organes.

Depuis long-temps on s'était aperçu que les lésions d'un

côté de l'encéphale affectent, dans certains cas, le côté opposé du corps; mais il y avait quelque doute sur la généralité du phénomène; et même, d'après quelques expériences, on avait pensé que la convulsion avait lieu du côté de la lésion, et la paralysie du côté opposé. M. Flourens a constaté que ce croisement a lieu à l'égard de la sensation pour les hémisphères, à l'égard de la convulsion pour les tubercules optiques, et relativement aux mouvements réguliers pour le cervelet : c'est-à-dire que les effets propres aux lésions de ces organes se montrent à l'extérieur du côté opposé; mais que pour la moelle allongée, pour la moelle épinière, il n'y a aucun croisement, et que la convulsion et la paralysie se montrent du même côté que l'irritation s'est faite. Ce sont les rapports divers des lésions de ces différentes parties qui produisent les diverses combinaisons de paralysie et de convulsions que l'on observe dans les malades: et c'est ainsi que M. Flourens explique le fait reconnu dès le temps d'Hippocrate, que les convulsions ont presque toujours lieu du côté opposé aux paralysies. Cette action croisée du cervelet a aussi été observée par M. Serre, dans des cas pathologiques; et il a réclamé à ce sujet sur M. Flourens une priorité que celui-ci ne lui a point contestée. Il y avait même dans des auteurs plus anciens des traces d'expériences analogues, mais qui n'offraient ni la précision de celles de M. Serre, ni la distinction établie par M. Flourens.

Les mouvements continus et nécessaires à la vie, tels que ceux de la respiration et de la circulation, n'exigent pas l'intégrité de l'encéphale. L'animal les exécute quoiqu'on l'ait privé de cerveau, de cervelet et de tubercules optiques. Une poule, un pigeon ont survécu deux et trois jours à ces mu-

tilations. Pour altérer ces fonctions, il faut attaquer la moelle allongée; et en l'emportant entièrement, on les fait cesser tout d'un coup. La respiration, en particulier, cesse par la destruction des parties de la moelle épinière qui fournissent les nerfs des muscles intercostaux et du diaphragme. Dans les reptiles sans côtes complètes, tels que les grenouilles et les salamandres, qui respirent en avalant l'air, on ne l'arrête qu'en détruisant les parties qui donnent les nerfs de la gorge et de la langue. Mais une simple section de la moelle épinière n'empêche pas les parties qui reçoivent leurs nerfs au-dessous de la section, de reprendre leur action quand elles éprouvent une irritation extérieure. La section de la moelle allongée ne fait donc que détruire le principe intérieur nécessaire à l'excitation générale et à la coordination régulière des mouvements qui concourent à la respiration.

Quant à la circulation, M. Flourens assure avoir constaté sur plusieurs animaux qu'elle survit à la destruction de tout l'encéphale et de toute la moelle épinière. Lorsque la respiration a cessé par la destruction des troncs nerveux, le sang passe noir : mais la circulation n'est pas arrêtée pour cela; et lorsqu'elle commence à s'éteindre, on peut la faire revivre en insufflant les poumons. Toutefois, à mesure que l'on détruit le système nerveux, la circulation s'affaiblit et se concentre; celle des vaisseaux capillaires de la peau surtout, plus éloignée du centre d'impulsion, s'éteint presque immédiatement dans la partie dont les nerfs sont détruits.

La plupart des anatomistes considèrent les ganglions du nerf grand sympathique comme incapables de produire de sensation, de quelque manière qu'on les affecte. Les expériences de M. Flourens ont prouvé que cette impassibilité

n'est pas générale. En pinçant les ganglions semi-lunaires d'un lapin, il lui a toujours fait donner aussitôt des signes d'une douleur violente; mais les ganglions cervicaux sont beaucoup moins susceptibles d'impression : ce n'est que rarement, et après beaucoup d'essais infructueux, qu'il est parvenu à faire ressentir à l'animal les irritations qu'il lui communiquait.

A ces expériences fondées sur des lésions mécaniques, M. Flourens en a fait succéder d'autres qui reposent sur l'action de certaines substances prises à l'intérieur. Chacun sait que l'opium endort, que la belladonna aveugle, que les liqueurs spiritueuses empêchent de se mouvoir régulièrement. Il était intéressant d'observer si ces substances produisent un effet visible sur les parties de l'encéphale affectées à ces diverses fonctions. Effectivement, quand un oiseau meurt pour avoir pris de l'opium, on voit une grande tache d'un rouge foncé sur le devant de son crâne; si c'est pour avoir pris de la belladonna, les taches se montrent sur les côtés; et s'il a péri pour avoir avalé de l'alcohol, c'est l'occiput qui est teint de rouge. M. Flourens avait pensé d'abord que c'étaient des signes d'autant d'inflammations locales : les premières sur le cerveau, les secondes sur les tubercules optiques, les troisièmes sur le cervelet; mais les commissaires de l'Académie, en répétant ses expériences, ont trouvé que ces taches résultaient d'épanchements sanguins qui se font dans l'épaisseur même du crâne, et qui remplissent les cellules de son diploé, entre ses deux lames. Le fait de la position locale et constante de ces épanchements n'en est pas moins très-singulier; et les rapports de cette position avec celle des organes dont les fonctions sont altérées, ne laissent pas que

d'être encore assez favorables aux conclusions déduites des autres expériences de l'auteur.

ANATOMIE COMPARÉE.

Nous avons parlé assez au long, dans notre analyse de 1820, du grand ouvrage de M. Serre, couronné en 1821, sur les proportions des diverses parties du cerveau dans les quatre classes d'animaux vertébrés; ouvrage qui doit bientôt paraître, et qui sera une acquisition très-précieuse pour l'Anatomie.

Deux jeunes anatomistes, MM. Desmoulins et Bailly, se sont occupés, dans l'intervalle, de recherches sur la même matière, qui ont offert des faits intéressants et des vues nouvelles, principalement en ce qui concerne l'encéphale des poissons.

On sait que les lobes ou tubercules qui le composent, au lieu d'être les uns sur les autres, ou de s'envelopper plus ou moins, comme dans l'homme et les quadrupèdes, sont placés à la file et par paires. La paire ordinairement la plus considérable, celle qui est immédiatement devant le cervelet, est creusée à l'intérieur d'un ventricule, où l'on voit un renflement semblable au corps cannelé de l'homme; dans son fond sont presque toujours quatre petits tubercules, et en-dessous il y en a deux plus grands, visibles à l'extérieur. En avant de cette paire principale, en est une autre, sans aucun vide intérieur, de laquelle partent les nerfs olfactifs, et quelquefois elle est double.

Il était assez naturel que l'on considérât les grands tubercules creux comme le cerveau; le petits de leur intérieur,

comme les tubercules quadrijumeaux; les lobes antérieurs solides ne pouvaient alors être regardés que comme des nœuds des nerfs olfactifs; quant aux tubercules inférieurs, leur position étant semblable à celle qu'occupent dans les oiseaux deux lobes creux que l'on croyait analogues des couches optiques, il était tout simple qu'on leur donnât le même nom.

Mais MM. Gall et Spurzheim, ainsi que nous l'avons dit dans notre Histoire de 1808, ayant fait voir que les racines des nerfs optiques s'étendent jusque dans les tubercules quadrijumeaux, établirent que les lobes inférieurs et creux des oiseaux sont les analogues de ces tubercules, et non pas des couches dites optiques, qui existent aussi dans les oiseaux indépendamment des lobes en question : on devait naturellement appliquer cette manière de voir aux poissons; et c'est ce qu'a cherché à faire M. Apostole Arzaky, médecin natif d'Épire, dans sa thèse doctorale soutenue à Halle en 1813. Trouvant que les racines du nerf optique des poissons s'épanouissent sur les lobes creux placés immédiatement devant le cervelet, il a considéré ces lobes comme répondant aux tubercules quadrijumeaux, et il ne lui est resté pour correspondre aux hémisphères du cerveau que les lobes antérieurs et solides, nommés par d'autres nœuds du nerf olfactif. Dans cette manière de voir, les tubercules inférieurs ne pouvaient plus être que les analogues des éminences mamillaires.

M. Serre était arrivé de son côté à la même opinion, ainsi que nous l'avons dit en 1820, et l'a appuyée par de belles observations, qui portent principalement sur la prompte apparition et la grande proportion relative de ces tubercules

dans les embryons; sur le ventricule dont ils sont creusés à cette époque, même dans les mammifères où ils sont pleins dans l'âge adulte; et sur la place qu'ils y tiennent aux dépens du cerveau et du cervelet, dont le développement, celui du cervelet surtout, est beaucoup plus tardif. Sous ce rapport, dit M. Serre, le cerveau des poissons, où les lobes en question sont très-grands et visibles par-dessus, peut être considéré comme un cerveau d'embryon des classes supérieures.

Bien que cette détermination des lobes optiques ne soit pas généralement adoptée, et que M.Treviranus en ait encore publié une autre en 1820, c'est elle que suivent M. Desmoulins et M. Bailly, et que nous emploierons dans l'analyse de leurs recherches respectives.

Celles de M. Desmoulins ont commencé dès 1821, par des descriptions et des figures fort soignées du cerveau et des nerfs de plusieurs poissons, qui, au jugement de l'Académie, partagèrent le prix de physiologie en 1822. Le même anatomiste les a continuées depuis, et a présenté un nombre assez considérable de mémoires, dont il a paru des extraits et des résumés dans quelques ouvrages périodiques. Ces mémoires contiennent beaucoup d'observations importantes et nouvelles. Leur tendance générale semble être de prouver qu'il n'y a point une aussi grande uniformité dans le système nerveux que l'on paraît porté à le croire; mais que ses parties correspondent pour le volume, et quelquefois même pour l'existence, aux conditions de sensibilité ou de mobilité des organes, et à leurs variations dans les divers animaux.

L'auteur regarde la partie moyenne du système, ou l'encé-

phale et la moelle de l'épine, comme n'existant que dans les animaux vertébrés, et comme résultant de deux faisceaux médullaires composés chacun de deux cordons, un dorsal et un abdominal, et sécrétés par la face interne d'un tube formé par la membrane dite pie-mère, membrane dont un repli conserve à l'intérieur les vides connus sous les noms de *ventricule* et de *canal de la moelle.*

Le cerveau et le cervelet exceptés, tous les autres lobes qui se manifestent sur les divers points de cette espèce d'axe médullaire ne dépendent, selon M. Desmoulins, quant à leur développement, que de la grosseur des paires de nerfs qui y correspondent.

C'est ainsi, dit l'auteur, que l'on voit des espèces de lobes sur les côtés de la moelle, à la naissance des nerfs du bras dans les oiseaux grands voiliers, et de ceux des jambes dans les oiseaux marcheurs; et qu'il s'en trouve à l'origine des nerfs cervicaux, dans les trigles où ces nerfs prennent un grand volume pour fournir des branches aux doigts libres particuliers à ces poissons. La carpe en a aussi pour une branche de la huitième paire, qui lui est propre, et qui va à la pulpe singulière qui garnit son palais.

La partie la plus constante de l'encéphale, et qui se développe la première, est précisément celle que l'on nomme aujourd'hui les lobes optiques.

Ils ont, dans plusieurs poissons, des replis et des tubercules intérieurs (ceux-là même que l'on prenait pour les tubercules quadrijumeaux des poissons, avant de reconnaître que ces tubercules sont représentés par les lobes optiques dans leur entier); et le nombre et le développement de ces replis sont le plus souvent en rapport avec la grandeur du

nerf optique, et surtout avec les plis que fait sa substance dans certaines espèces : ici peut-être aurait-il été nécessaire de remarquer que cette règle est loin d'être générale, surtout dans les poissons dont les yeux sont fort petits.

La rétine de beaucoup d'oiseaux et de poissons est aussi très-plissée.

M. Desmoulins croit que ce plissement, qui en multiplie beaucoup la surface, augmente la force de la vision. En général, c'est par l'étendue des surfaces qu'il pense que se marque, dans le système nerveux, la prééminence des organes; et c'est ainsi qu'il explique la supériorité d'intelligence des animaux où les hémisphères ont beaucoup de replis, bien que plusieurs d'entre eux n'aient pas la masse de ces hémisphères d'une grandeur supérieure.

C'est dans les hémisphères proprement dits que M. Desmoulins, ainsi que tous les anatomistes d'aujourd'hui, place le siége de l'intelligence; mais il en sépare, dans les mammifères et les oiseaux, la partie antérieure qui repose dans la fosse ethmoïdale et d'où part le nerf de l'odorat : il lui donne le nom de lobes olfactifs et suppose que ce sont ces lobes séparés du cerveau, que l'on voit, dans la plupart des poissons, à l'extrémité antérieure du nerf près des narines.

La structure des hémisphères lui paraît originairement celle d'une membrane médullaire plissée, mais dont les concavités se remplissent, avec le temps, par la sécrétion d'une pie-mère interne, qui ensuite se retire pour former les plexus choroïdes.

Malgré l'importance qu'il donne aux hémisphères, M. Desmoulins croit que dans les poissons il n'en subsiste que cette partie inférieure que l'on nomme, dans l'homme et les

quadrupèdes, couches optiques; et il va même jusqu'à penser que le cerveau manque entièrement aux raies et aux squales, et que l'on nomme ainsi, dans ces poissons, ce qui n'est que leur lobe olfactif.

C'est par un raisonnement analogue qu'il refuse le cervelet à ces mêmes poissons, ainsi qu'aux grenouilles et aux serpents. Cet organe s'y réduit à une bande transversale mince, que l'auteur ne prend que pour une commissure, analogue à celle qui existe, indépendamment du cervelet, sur le quatrième ventricule des poissons.

M. Desmoulins cherche à prouver que les nerfs destinés en particulier au sentiment, ont ou des lobes à leur origine, ou des ganglions, et que ceux dont l'usage principal est de contracter les muscles en sont dépourvus.

Ce sont les nerfs conducteurs des deux actions qui ont des racines de deux ordres : les unes du côté du dos, munies de glanglions et consacrées au sentiment, conformément aux expériences de M. Magendie; les autres du côté du ventre, et affectées au mouvement. Au reste, cette affectation particulière n'est pas absolument exclusive, car aucun nerf n'est entièrement dépourvu de sentiment; cela est nécessaire, surtout dans les serpents et les poissons osseux, où M. Desmoulins assure n'avoir trouvé aucun glanglion aux nerfs de l'épine.

La revue qu'il fait, à ce sujet, des différents nerfs, lui a procuré quelques observations intéressantes. Le nerf du même sens s'est montré à lui avec des structures très-diverses; il l'a vu partir de paires différentes; la même paire a fourni des branches particulières à certaines espèces, qu'elle ne donne pas dans d'autres. Il assure même n'avoir trouvé

aucun nerf sympathique dans les raies ni dans les squales. L'olfactif est réduit à un filet très-mince dans les môles, où la narine est elle-même à peu près nulle. L'optique est celui qui varie le plus : nul, à ce que croit l'auteur, dans les quadrupèdes à très-petits yeux ou dont les yeux ne percent pas la peau, il se développe dans quelques poissons, au point d'y être formé d'une large membrane plissée.

M. Desmoulins insiste beaucoup sur la brièveté excessive de la moelle épinière dans le tétrodon-lune et dans la baudroie; dans le premier surtout, où, comme l'avait déja remarqué M. Arsaky, elle ne forme qu'une petite proéminence qui ne dépasse pas la première vertèbre, et où vont se rendre tous les nerfs du tronc.

Les observations de M. Bailly ont été faites en plus grande partie en Italie pendant le cours de 1822, et il en a présenté l'exposé à l'Académie pendant l'automne dernière. Elles ont eu pour objet le cerveau de quelques quadrupèdes, de plusieurs oiseaux et reptiles, et d'un grand nombre de poissons dont les espèces sont, comme on sait, plus multipliées dans la Méditerranée que sur nos côtes de la Manche.

Elles se rencontrent sur quelques points avec celles de M. Desmoulins, et cependant leur tendance générale est fort contraire. Non-seulement l'auteur cherche à établir une très-grande analogie entre les systèmes nerveux des différentes classes; il prétend que les divers étages, les divers échelons du même système nerveux, et qui plus est, les divers anneaux du même animal, se ressemblent au point de n'être que des répétitions les uns des autres. La moelle épinière lui paraît une suite de renflements de matière grise

enveloppés par huit cordons longitudinaux de matière blanche ou médullaire : deux supérieurs, deux inférieurs, et deux latéraux de chaque côté. Entre un supérieur et un latéral supérieur de chaque côté aboutissent les racines supérieures ou dorsales des nerfs; entre le latéral inférieur et l'inférieur, les racines abdominales ou inférieures. Ces cordons arrivés dans le crâne se renflent, suivant lui, les inférieurs pour former les hémisphères du cerveau; les latéraux inférieurs pour former les lobes optiques; les latéraux supérieurs pour former le cervelet; enfin les supérieurs pour former en s'écartant les côtés du quatrième ventricule et les bandelettes qui les traversent dans les mammifères, ou les tubercules qui y adhèrent dans les poissons. Mais ces lobes, ces renflements, en prenant plus d'énergie que les cordons avec lesquels ils se continuent, et en remplissant leurs fonctions avec plus de force, n'exercent pas pour cela des fonctions d'une autre nature; et M. Bailly croit que le tronçon de moelle qui traverse chacune des vertèbres de l'épine, contenant aussi une portion des huit cordons qui se continuent avec les lobes de l'encéphale, possède les mêmes facultés que l'encéphale lui-même, mais seulement dans un degré plus obscur, et que ce tronçon peut même devenir pour l'animal un organe ou un centre de perception et de volonté.

Pour appuyer cette opinion, sur laquelle nous n'avons pas besoin de nous étendre plus au long, M. Bailly cherche surtout à montrer la continuité constante de ces huit cordons avec les huit lobes en question, et une ressemblance des nerfs du crâne avec ceux de l'épine, plus grande qu'on ne l'avait estimée jusqu'à lui. Ainsi il avait à trouver aux

premiers, pour chaque paire, des racines inférieures et supérieures, des commissures, des ganglions d'origine et des trous de conjugaisons : à cet effet, il est obligé de considérer comme ne faisant qu'une paire plusieurs de celles que les anatomistes traitent comme distinctes.

La première paire est pour lui le nerf olfactif, auquel il trouve toujours deux racines. La seconde se compose du nerf optique, de l'oculo-moteur et du pathétique : elle a pour racines supérieures le pathétique, et celles des fibres de l'optique qui naissent des lobes optiques; pour inférieures, l'oculo-moteur et les fibres de l'optique qui naissent derrière son entre-croisement.

C'est par des rapprochements semblables que M. Bailly réunit le nerf acoustique, le facial, le trijumeau et l'abducteur, en une troisième paire; l'hypoglosse, le pneumogastrique et l'accessoire, en une quatrième.

Les ganglions ophtalmique, sphéno-palatin, naso-palatin, sont pour les paires cérébrales ce que les ganglions du grand sympathique sont pour les paires rachidiennes; et si les nerfs du crâne sortent par plus d'un trou pour chaque paire, M. Bailly fait remarquer qu'il en est ainsi pour les premières paires rachidiennes des raies.

De tous ces rapports, de ces tronçons de moelle enveloppés chacun d'un anneau vertébral, et fournissant chacun en rayonnant quatre ordres de racines nerveuses, il arrive à un rapprochement, même entre les animaux rayonnés et zoophytes et tous les autres.

Quel que puisse être le mérite de ces idées théoriques et de ces hypothèses, où l'on remarque l'influence d'une métaphysique qui a eu pendant quelque temps une certaine

vogue dans l'étranger, M. Bailly a fait, pour les appuyer, des observations intéressantes et vraies, relatives surtout au cerveau des poissons.

Il y a bien développé la composition des lobes dits optiques, par le moyen de deux ordres de fibres: l'un interne transverse, qui est proprement la continuation du cordon latéral de la moelle; l'autre externe, qui croise obliquement le premier et se continue avec le nerf optique.

Il a fait remarquer, et retrouve jusque dans les quadrupèdes, une bande qui marche derrière la conjugaison des nerfs optiques, et sert de commissure aux fibres externes des lobes de même nom, pendant que celle de leurs fibres internes a lieu dans les poissons directement au plafond de leur cavité commune, et ressemble au corps calleux des hémisphères dans les mammifères.

Il a donné aussi beaucoup de détails sur les variétés des replis qui sont dans l'intérieur de ces lobes optiques, et qu'il nomme corps optiques. Un cordon qui contourne les jambes du cerveau dans les ruminants, en avant de l'oculo-moteur; la commissure antérieure du cerveau qu'il trouve double dans plusieurs animaux; la distinction des ganglions ou lobes olfactifs, la manière dont ils se confondent avec le cerveau ou dont ils s'en dégagent; les variations dans le volume et les formes du cervelet, celles des lobes latéraux du quatrième ventricule dans les poissons, qu'il croit les analogues des rubans gris que l'homme et les mammifères ont au même endroit; les origines profondes des nerfs trijumeaux, ont particulièrement attiré son attention.

Il se trouve quelquefois en opposition sur les faits de détail, et avec M. Desmoulins, et avec M. Serre. Ainsi il n'ad-

met pas, comme ce dernier, l'existence de la glande pinéale dans tous les vertébrés. Il est fort éloigné aussi de croire, comme M. Desmoulins, que le cerveau ou le cervelet puisse manquer dans quelques-uns de ces animaux; et il explique les apparences qui ont donné lieu à ces suppositions, soit par une confusion du ganglion olfactif avec la masse du cerveau, soit par une diminution extrême du volume du cervelet.

Il n'est pas favorable non plus à la séparation trop absolue des fonctions, telle que l'entend M. Flourens. La petitesse excessive du cervelet, dans certains animaux qui sautent et nagent très-bien, comme les grenouilles, les couleuvres, lui sert en particulier d'argument pour mettre en doute l'attribution que M. Flourens fait exclusivement à cet organe, d'être le régulateur des mouvements de locomotion.

Il montre qu'il s'en faut de beaucoup que les lobes optiques soient, pour la grandeur, en proportion avec les nerfs du même nom. La taupe, entre autres, où ce nerf est presque atrophié, a ses tubercules quadrijumeaux aussi grands qu'aucun quadrupède; ce qui lui prouve qu'ils ne sont pas consacrés à la vision seulement, et lui paraît confirmer son système de l'uniformité des fonctions de tous les lobes.

Ce n'est pas dans une analyse comme celle-ci qu'il est possible de discuter ces opinions diverses, ni d'apprécier la multitude des observations dont se composent des recherches aussi laborieuses; mais il nous a paru convenable d'en donner un exposé assez étendu pour attirer sur elles l'attention des anatomistes. Elles rentrent dans le cercle des travaux de l'Académie, non seulement parce qu'elles ont été soumises

à son examen, mais aussi parce qu'elles ont été en quelque sorte provoquées par le prix qu'elle proposa pour 1821, et qui fut remporté par M. Serre.

A cette même époque, M. Tiedeman, aujourd'hui l'un des correspondants de l'Académie, avait aussi commencé une suite de recherches, dont il a publié un fragment sous le titre d'*Icones cerebri simiarum et quorumdam animalium rariorum;* recueil où plusieurs cerveaux sont représentés avec exactitude et des détails précieux.

Tout nouvellement, M. Rolando de Turin vient d'envoyer un mémoire sur la moelle de l'épine, dans lequel il n'y admet que quatre sillons : l'antérieur qui est bien connu, et où pénètre le repli de la moelle épinière, un postérieur bien moins profond, et les deux latéraux postérieurs. Les latéraux antérieurs, selon lui, ne sont que des apparences produites par les racines des nerfs. Elle n'a donc que quatre cordons, si ce n'est dans le haut, où les pyramides postérieures en donnent deux de plus, mais qui ne règnent que dans la région cervicale, et qui disparaissent même dans les quadrupèdes.

M. Rolando a examiné et décrit avec soin les figures que prend, en différents points, la coupe de la matière cendrée qui remplit l'axe de la moelle épinière. Au-dessous des pyramides antérieures elle représente un fer à cheval; aux endroits d'où sortent les nerfs des extrémités, deux demi-lunes adossées; dans la région dorsale, une espèce de croix. Il a trouvé les cornes postérieures de cette matière grise plus molles, plus rouges que le reste de sa coupe, et il admet, en conséquence, deux sortes de matière grise, comme il les

a déja fait connaître dans le cervelet. Mais ce qu'il a exposé avec le plus de détail, c'est que ce tube de matière médullaire qui enveloppe l'axe de matière cendrée, est formé d'une lame médullaire repliée longitudinalement un grand nombre de fois, et que des lames de la pie-mère pénètrent dans ses plis extérieurs, et des lames de substance cendrée dans les intérieurs, ce qui donne à sa coupe l'apparence de fibres rayonnantes. Ce sont ces plis longitudinaux qui ont donné lieu, dit-il, à établir divers sillons. Il y en a à peu près cinquante dans les portions cervicale et lombaire de la moelle du bœuf et aux cordons antérieurs seulement.

La pulpe médullaire qui forme cette membrane plissée, se résout elle-même en fibres très-déliées et à peu près parallèles; les racines antérieures des nerfs, plus nombreuses, comme on sait, que les postérieures, ne tiennent pas de la même manière à la moelle : elles y sont éparpillées, et leurs bulbes n'entrent pas si avant. M. Rolando croit que les filets, qui forment ces racines, se continuent avec les fibres médullaires de l'enveloppe de la moelle, et qu'ils ne tirent pas, comme l'avaient cru MM. Gall et Spurzheim, leur origine de la substance cendrée; ce qui, ajoute-t-il, est encore rendu improbable par l'observation de M. Tiedeman, que dans le fœtus on voit déja ces filets, bien que la place de la substance cendrée ne soit encore remplie que par un liquide transparent.

Au reste, il y a dans toutes ces discussions beaucoup de difficultés qui ne viennent que de l'abus des expressions figurées. Ainsi, lorsqu'on a dit que les fibres médullaires naissent de la substance cendrée; que le cerveau est une production, une

efflorescence de la moelle, ou la moelle une continuation du cerveau, on s'est exposé à être facilement réfuté par ceux qui prennent ces termes au pied de la lettre. Je devrais dire même, qu'en les prenant ainsi, on s'est donné pour les réfuter une peine très-inutile. Les auteurs ne voulaient exprimer que des rapports de liaison, de connexion, et non pas d'extraction ; ainsi, quand on dit que les artères naissent ou sortent du cœur, on ne prétend pas que, primitivement elles aient été dans le cœur, qu'il les ait émises, etc.

Une remarque semblable doit se faire sur des expressions figurées qui donnent lieu à des disputes encore plus échauffées et non moins vaines ; ce sont celles qui se rapportent à certaines fonctions des organes : lorsqu'on dit, par exemple, que c'est le cerveau ou telle autre partie du système qui sent, qui perçoit, qui veut, qui met en mouvement. Aucun de ceux qui parlent ainsi ne peut, à moins d'être absurde, entendre que ce soit telle ou telle partie qui éprouve la perception, qui exerce la volonté ; c'est seulement une manière elliptique de dire qu'elle est pour l'animal, l'instrument, la voie nécessaire de ces modifications ou de ces actes.

On pourrait faire une troisième remarque sur la facilité avec laquelle, lorsqu'une partie quelconque se montre à l'œil avant une autre dans l'embryon, on se détermine à dire qu'elle se forme avant elle, et à déduire de là des conclusions qui semblent supposer qu'elle n'y est qu'au moment où l'on commence à l'apercevoir ou à lui trouver quelque consistance. Ce n'est que lorsqu'on aura débarrassé son langage et ses raisonnements de ces trois sources d'erreurs, que l'on pourra tirer des faits quelques résultats clairs, et qui puissent n'être pas la source de nouvelles disputes.

Il est d'autant plus important d'éviter tout ce qui pourrait entraver ces recherches, que le cerveau est, anatomiquement parlant, celui de tous les organes dont la structure est le plus difficile à dévoiler; comme il est, physiologiquement, celui dont les fonctions merveilleuses échappent le plus à toute explication, et que l'on ne peut, par conséquent, trop encourager les efforts qui tendent à avancer, ne fût-ce que sur quelque point limité, la connaissance de ce mystérieux appareil.

M. Geoffroy-St.-Hilaire continue toujours, avec la même ardeur, ses recherches sur l'unité de composition dans les animaux. Il les a portées principalement cette année sur les organes de la génération des oiseaux, qu'il a comparés à ceux des mammifères.

Déja dans notre analyse de l'année précédente nous avons fait connaître sa manière de voir à cet égard.

Après avoir rappelé qu'il y a dans les oiseaux, outre l'oviductus ordinaire et connu qui s'insère du côté gauche du cloaque, un petit canal aveugle, découvert par M. Emmert, inséré du côté droit, et que l'on peut regarder comme un second oviductus atrophié et oblitéré, nous avons dit que M. Geoffroy voit, dans la partie supérieure et vasculaire de l'oviductus, l'analogue de la trompe de Fallope; dans la partie moyenne à parois plus épaisse où l'œuf séjourne et prend sa coquille, l'analogue de la corne de la matrice ; et dans le reste de sa longueur l'analogue du vagin.

L'auteur a retrouvé les mêmes divisions dans certains oviductus du côté droit, plus développés qu'à l'ordinaire ; car cet oviductus droit, ce vestige d'oviductus, ne consiste communé-

ment que dans une petite vessie : mais il est sujet à beaucoup de variétés, et M. Geoffroy en a vu qui allaient au huitième, au quart, et même une fois à la moitié de la longueur de l'autre. Lorsqu'il est le plus volumineux, il manque encore d'issue à ses deux extrémités, et le pédicule qui l'attache au cloaque n'est qu'un ligament tendineux. L'oviductus gauche ou ordinaire, observé dans de très-jeunes oiseaux, s'étend en droite ligne; et M. Geoffroy est porté à penser qu'il est primitivement fermé et ne s'ouvre, à ses extrémités, que par l'action du liquide qui se développe dans son intérieur.

L'auteur a donné, dans un mémoire particulier, la description des organes sexuels de l'autruche et du cazoar, où la grandeur des parties lui a procuré plus de facilité pour saisir leurs rapports et reconnaître leurs analogies. Il y a surtout rendu sensible, par des figures comparatives et très-exactes, la ressemblance singulière des organes dans l'autruche mâle et dans l'autruche femelle, qui ne diffèrent, vers l'extérieur, que par les grandeurs relatives et inverses du pénis et du clitoris, et de l'orifice qui est à leur racine.

Ce que dans l'autruche on appelle la vessie urinaire, est un sac assez grand, dans le fond duquel se termine le rectum, et qui est séparé de la cavité plus extérieure qui s'ouvre au dehors, et que M. Geoffroy nomme urétro-sexuelle, par un bourrelet ou rétrécissement, où se voient les quatre mamelons répondants aux deux uretères et aux deux oviductus. Les premiers se dirigent un peu plus en dedans, en sorte que l'urine qui coule des reins s'accumule naturellement dans ce grand sac jusqu'au moment de l'émission. La seule différence du mamelon qui répond à l'ovaire oblitéré, c'est qu'il n'est point percé. Le rectum fait une saillie dans

le fond de cette poche urinaire; et un rétrécissement plus intérieur fait même, de cette saillie, une poche particulière que M. Geoffroy nomme *vestibule rectal,* attribuant à ses deux issues les noms d'*anus intérieur* et *extérieur*. C'est ce dernier qui, s'avançant au travers des deux autres dilatations, je veux dire de la vessie urinaire et de la poche urétro-sexuelle, se montre au dehors quand l'autruche veut jeter ses excréments.

Dans le cazoar il n'y a point d'étranglement intérieur au rectum; et la vessie et la poche urétro-sexuelle, faute de bourrelet qui les sépare, ne forment qu'une seule cavité. Dans d'autres oiseaux, tels que le canard et la poule, c'est le vestibule rectal qui se confond en une seule poche avec la vessie.

M. Geoffroy compare ce vestibule rectal à la poche glanduleuse, dans laquelle s'ouvre le rectum de l'ichneumon, et il retrouve aussi ce double sphincter dans les marsupiaux et les monotrèmes.

Il explique en détail le mécanisme des différentes excrétions, et comment dans l'autruche et le cazoar la verge, ou plutôt le gland, car il croit qu'elle se réduit à cette partie, se déploie au dehors pour leur donner issue.

La cavité où elle se retire et dont elle sort, dans certaines espèces, par une sorte de déroulement, est l'analogue de la bourse du prépuce; une poche particulière qui y aboutit, nommée d'après son inventeur la bourse de Fabricius, et que M. Geoffroy appelait encore assez récemment du nom indéterminé de bourse accessoire, lui paraît aujourd'hui le réservoir, le canal déférent des glandes de Cooper qu'il a trouvées tantôt réunies, tantôt séparées, sur la partie dor-

sale de la poche du prépuce. Dans l'autruche et dans d'autres oiseaux où le gland se développe beaucoup, cette bourse acquérant plus d'ampleur et son col devenant plus large, se confond avec la bourse du prépuce.

On voit que, d'après ce système de rapprochement, la principale différence qui resterait entre les oiseaux et les mammifères serait que dans les premiers le rectum ou le vestibule rectal s'ouvrirait dans la vessie, et que dans les seconds il s'ouvrirait immédiatement au dehors.

M. Geoffroy a dû rechercher aussi les analogies du bassin, qui tient de si près aux organes de la génération.

Selon lui, on s'est fort mépris à cet égard. L'os que, dans les oiseaux, on nommait seulement os des îles, et qui s'étend le long de l'épine en avant et en arrière de la fosse cotyloïde, est composé de l'os des îles et de l'ischion; celui qui lui est parallèle mais en arrière seulement de la fosse cotyloïde, et qu'on avait pris pour l'ischion, est le pubis; et l'os grêle qui fait le bord du bassin postérieur, et qu'on nommait le pubis, M. Geoffroy en fait, avec M. Serre, l'analogue de l'os si remarquable dans les mammifères à bourse, et que les anatomistes avaient désigné sous le nom de marsupial. Nous avons dit, dans le temps, que M. Serre a cru retrouver aussi l'analogue de cet os marsupial, dans une petite partie qui s'observe à un certain âge, encastrée dans la cavité cotyloïde de plusieurs quadrupèdes d'autres familles. Cette pièce se voit en effet dans le rhinocéros, dans l'hyène, et peut-être dans plusieurs autres genres. Comme elle manque dans le chien, dans l'ours, qui ont l'intérieur de la verge soutenu par un os, M. Geoffroy a imaginé que ce sont les os marsupiaux qui se réunissent pour former cet os de

la verge; mais on ne l'observe pas non plus dans bien des animaux qui n'ont pas d'os de verge.

M. Geoffroy applique ensuite sa théorie aux mammifères à bourse, ou didelphes, dont il s'était déja occupé plusieurs fois, notamment en 1819, ainsi que nous l'avons dit dans notre analyse de cette année-là.

Les tubes en forme d'anse sur les côtés de la matrice, qui sont particuliers à ces animaux, lui paraissent deux vagins; et il croit que ce que les autres anatomistes nomment vagin, répond à la bourse urétro-sexuelle des oiseaux. La partie recourbée par laquelle ces anses s'unissent dans le haut, et qui est divisée, tant que l'animal n'a pas conçu, par une cloison verticale, représente alors deux utérus qui se continuent chacun avec la corne, et la trompe de Fallope correspondante.

L'auteur se représente donc cet appareil comme double dans sa totalité, ainsi que celui des oiseaux; comme dépourvu de même de col, et d'autres moyens de retenir l'ovule : c'est ce qui fait que celui-ci est expulsé avant son incubation, avant qu'un embryon s'y soit montré. M. Geoffroy explique la faiblesse et le peu de durée de l'action de ces utérus par la petitesse des branches artérielles qu'ils reçoivent; et c'est par la circonstance opposée qu'il rend compte du développement et de l'activité des mamelles et de la bourse qui les enveloppe, et dans laquelle il voit un grand développement du mont de Vénus. Les détails angéïologiques où il entre à ce sujet sont des faits positifs et très-intéressants, mais il serait impossible de les faire entendre dans un résumé aussi court que le nôtre. Daboville, Roume et Barton ayant vu que la première forme sous laquelle les produits de la gé-

nération se montrent adhérents aux mamelles, est celle de globules, souvent transparents ou gélatineux, M. Geoffroy suppose que ces produits sortent de l'utérus à l'état d'ovule, mais d'ovule qui a éprouvé un commencement de développement, ce degré auquel ceux des mammifères ordinaires s'implanteraient dans la matrice par leur placenta. Il paraît même disposé à croire qu'il s'établit une liaison vasculaire de la tétine de la mère avec leur appareil digestif qui tient lieu, pendant un temps, du système ombilical; et néanmoins il vient tout récemment d'annoncer qu'il a observé dans quelques fœtus des marques d'une cicatrice ombilicale ou peut-être des vestiges d'un placenta qui n'aurait pas pris son développement ordinaire.

Dans une autre série d'observations, M. Geoffroy a trouvé sur un fœtus de vache, vers le commencement de la gestation, les apophyses épineuses de vertèbres dorsales contenant plus de noyaux osseux que l'on n'en avait observé jusqu'ici : ce qui lui a paru une confirmation de l'analogie de ces apophyses avec les rayons des nageoires dorsales des poissons, analogie qu'il avait mise en avant à l'occasion de ce bœuf des Indes que l'on assure porter des épines sur le dos. Plusieurs de ces apophyses ont en effet, dans leur cartilage, deux et même trois pièces osseuses distinctes, placées verticalement une derrière et deux devant, et ces deux-ci l'une au-dessus ou à côté de l'autre. Avec le temps tous ces noyaux se soudent en une apophyse unique.

M. Geoffroy ayant vu aussi, comme on le savait par les observations de Fougeroux faites en 1772, que le canon ou l'os principal du métacarpe et du métatarse des ruminants se divise dans le fœtus en deux os distincts, et prenant en

considération les os grêles et les phalanges plus ou moins complètes qui représentent dans les pieds de ces animaux les métacarpiens et les métatarsiens, ainsi que les doigts latéraux et qui ont aussi été décrits plus ou moins complètement par divers auteurs, critique l'usage que font les naturalistes des termes d'ergots et de stylets pour désigner ces pièces osseuses, et de celui de bisulque pour distinguer la classe entière : et en effet, un cochon n'est pas plus quadrisulque qu'un fœtus de ruminant. Il pense même que c'est à tort qu'on a dit que l'anoplotherium est le seul bisulque qui ait, au lieu de canon, un os double au métacarpe et au métatarse. Celui qui a caractérisé ainsi cet animal aurait pu, il est vrai, s'exprimer plus rigoureusement en disant que c'est le seul qui conserve avec l'âge ces deux os séparés, s'il avait pu croire qu'il ne serait pas entendu de tout le monde.

Enfin, le savant naturaliste dont nous analysons les travaux a tiré, de la configuration des os de la tête du bœuf à bosse ou zébu, des conjectures sur une différence spécifique de cet animal et du bœuf domestique ordinaire.

CHIRURGIE.

Un militaire qui, par suite d'une plaie pénétrante faite par la lame d'un sabre qui l'avait traversé de part en part, avec lésion du poumon et d'une artère intercostale, avait un énorme épanchement sanguin dans la cavité de la poitrine, a été soumis à l'opération de l'empyème par M. le baron Larrey. Le succès a passé toute attente, mais les résultats ont été très-dignes d'attention. Le côté blessé est réduit de plus de moitié dans ses dimensions; les côtes ont perdu une

grande partie de leur courbure, et se sont mises en contact de manière à s'entre-toucher; l'épaule s'est abaissée; le cœur a passé sous le sternum, et fait maintenant sentir les battements du côté droit; le diaphragme est remonté avec les viscères placés au-dessous de lui; le bras droit s'est atrophié; mais le poumon gauche, qui sert seul aujourd'hui à la respiration, est augmenté de volume. Ces faits intéressants pour la théorie des plaies pénétrantes de la poitrine, ajoutent à tous ceux que la chirurgie et la physiologie doivent déja à M. le baron Larrey, et qui l'ont rendu si justement célèbre parmi les hommes de l'art.

M. Bancal, chirurgien et oculiste, a présenté un instrument de son invention, qu'il nomme *Kystitome caché*, et qu'il emploie avec succès à l'opération de la cataracte.

Il se compose d'une gaîne étroite, longue et plate, munie d'un petit couloir, d'où l'on fait sortir, en pressant un bouton, une petite lame aiguë et tranchante, qui agit avec facilité et certitude. On le tient comme une plume à écrire, et on le fait arriver sans risque pour les parties environnantes, à la membrane du cristallin, qu'il s'agit, dans cette opération, d'ouvrir pour en faire tomber le cristallin devenu opaque. On pense que cet instrument est préférable à tout autre dans les cas où il s'agit de dégager le cristallin des adhérences qu'il peut avoir contractées; on pourra l'employer aussi pour former une pupille artificielle.

M. Gabriel Pelletan, fils de l'un de nos confrères, pour appliquer le nitrate d'argent, ou pierre infernale, à des surfaces très-limitées où l'on veut restreindre la cautérisation,

comme à de petites fistules, de petits kistes, a imaginé de plonger l'extrémité d'un fil ou d'un stylet d'argent dans l'acide nitrique, et de se procurer sur-le-champ par là une petite masse de nitrate proportionnée à l'espace sur lequel il veut opérer, et qui ne soit pas susceptible de se casser, et de demeurer ainsi plus long-temps qu'on ne le voudrait dans la cavité où on l'aurait insérée. Il propose, pour le même objet, de plonger la pointe d'un stylet d'or ou de platine dans du nitrate d'argent fondu, et de la revêtir d'un enduit de cette substance.

AGRICULTURE.

Il était assez singulier que l'agriculture, dont toutes les opérations ne consistent qu'en des transformations et des combinaisons dont la chimie sait aujourd'hui rendre compte, n'eût point encore reçu de cette science de théorie particulière. M. le chevalier Davy en a jeté les premières bases, dans un ouvrage publié il y a quelques années; et M. le comte Chaptal vient de s'en occuper avec plus de détail et des applications plus positives, dans un traité *ex professo*, imprimé cette année.

Il y fait connaître tous les éléments qui influent sur la végétation, et la manière d'agir de chacun d'eux. Il y analyse la nature des différentes terres, leurs propriétés, et les moyens de les disposer à une bonne culture : il y expose avec étendue et netteté les principes des assolements. Passant ensuite aux produits de la végétation, il en développe les caractères, et la manière de les conserver et de les approprier à leurs usages, ou d'en extraire les parties utiles. La préparation du

beurre, du fromage; la fermentation vineuse, la distillation, la culture du pastel et l'extraction de son indigo, et tout ce qui concerne la culture de la betterave et l'extraction de son sucre, ont spécialement attiré son attention. Il n'a pas même négligé les moyens d'assainir, à peu de frais, les demeures et les vêtements des habitants des campagnes.

M. le baron Morel de Vindé, qui cultive par lui-même à la Celle, près de St.-Cloud, une grande propriété, et s'occupe sans relâche de l'améliorer, moins encore en vue des produits qu'il en retire que pour donner des exemples utiles aux agriculteurs, vient de publier une notice sommaire sur les assolements qu'il y a établis. Sa terre est divisée en huit soles, dont chacune a quatre années de rotation. Le tableau complet des trente-deux années de rotation, donné par l'auteur, montre que chaque sole reçoit avec régularité des cultures et des améliorations pareilles, et qu'elles reviennent toutes après ce terme exactement au point de départ. Ce plan s'exécute depuis douze ans, et ses produits sont déja si considérables, et la terre tellement améliorée, que le propriétaire est obligé de détourner à d'autres cultures telles que potagers et chenevières, la surabondance de ses engrais. Il faut voir dans l'ouvrage même les différents problèmes dont les particularités de cette terre exigeaient la solution, et les moyens ingénieux par lesquels l'auteur est parvenu à les résoudre avec le plus d'avantage.

Il fait remarquer que son exploitation est tellement appliquée au temps et aux moyens dont il dispose, que ses hommes et ses chevaux ne sont jamais ni oisifs ni forcés de travail, et que, le temps du ménage des fumiers excepté,

ils lui suffisent complètement, et qu'il n'a admis, dans ses assolements, aucune de ces cultures extraordinaires trop vantées dans les livres et qui, selon lui, ne font que fatiguer à peu près inutilement les hommes, les chevaux et la terre. Cependant il a obtenu 14,000 francs de produit net d'une de ses fermes qui n'était louée auparavant que 5,040 fr. Mais en présentant ces résultats, il ajoute sagement que ses méthodes ne doivent point être imitées avec servilité, et que chacun doit se faire ses assolements à soi-même, en consultant bien les circonstances, et leur influence sur la culture, la récolte, et la vente des produits.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE

M. DUHAMEL,

Prononcé dans la séance publique de l'Académie royale des sciences, le 8 avril 1822,

PAR M. LE BARON CUVIER, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

M. DUHAMEL a été, s'il est permis de s'exprimer ainsi, l'un de ces savants de la vieille roche, tels que l'histoire de l'Académie en compte beaucoup, travaillant dans la retraite pour leur plaisir, et pour le bien des hommes sans s'occuper de la gloire, connaissant peu le monde et ne se souciant point d'en être connus; dont le public lisait utilement les ouvrages sans presque savoir s'ils vivaient encore, ni s'informer de l'époque où ils avaient vécu. Sa modestie était si grande, qu'avec tout ce qu'il fallait pour parler avec autorité dans l'Académie, à peine pendant une longue carrière académique a-t-il fait entendre sa voix au milieu de nous; un grand nombre de ses confrères ne l'ont peut-être pas connu de figure, et cependant il a été l'un des bienfaiteurs de notre

pays; il y a répandu beaucoup de procédés utiles; l'un des premiers, il y a naturalisé les vrais principes de la métallurgie; tous ceux qui pratiquent aujourd'hui l'art des mines ont été formés par lui ou par ceux qu'il a formés, et le corps entier des hommes attachés à cette branche de l'administration, fait profession de le reconnaître comme son vénérable patriarche. Voilà sans doute plus de motifs qu'il n'en faut pour que nous prenions pour sa mémoire le soin que lui-même a trop négligé, et pour que vous nous secondiez dans l'entreprise d'acquitter à son égard la dette de ses contemporains.

Jean-Pierre-François-Guillot DUHAMEL, inspecteur général des mines, et membre de l'Académie des sciences de l'Institut, était né à Nicorps près de Coutances, département de la Manche, le 31 août 1730, d'une famille ancienne dans la province.

Dès son enfance il se montra doux et réservé dans ses manières, mais très-arrêté dans ses résolutions. Son père qui le destinait au barreau l'avait placé chez un procureur, selon l'usage devenu une nécessité à cette époque, où par la négligence et l'égoïsme des professeurs, l'enseignement du droit se trouvait réduit à rien dans les écoles publiques.

Chez un procureur, et au fond de la Basse-Normandie, c'était moins vouloir lui faire apprendre la jurisprudence, que lui faire contempler la chicane dans son centre et dans toute sa laideur; aussi cette vocation n'eut-elle aucun charme pour lui; c'était un autre objet d'étude qu'il fallait à un jeune homme de ce caractère: un pressentiment irrésistible lui faisait se dire qu'il devait en exister de plus dignes de lui, et pour les chercher sans entraves il commença par s'é-

chapper, sans avertir personne, de l'espèce de prison où il sentait que jamais son intelligence ne pourrait prendre d'essor. Il avait un grand-oncle qui, après avoir servi long-temps comme ingénieur sans obtenir d'avancement, et avoir tenté en vain plusieurs autres fortunes, s'était décidé à finir sa vie agitée en se faisant capucin. Plus heureux sous le froc que dans le monde, il était arrivé aux dignités de son ordre, car il n'est point d'association d'hommes, si humble qu'elle soit, qui n'ait des dignités et des appâts pour l'ambition ; il se trouvait le gardien des capucins de la ville de Caen, et supérieur de ceux de la province. Ce fut auprès de lui que le jeune Duhamel chercha un refuge.

Un tel homme ne pouvait être insensible à des maux que lui-même avait éprouvés, à cette inquiétude si ordinaire dans la jeunesse aux ames énergiques, tant qu'elles n'ont pas rencontré la vraie place que la nature leur assignait. Non seulement il recueillit son petit-neveu avec une affection paternelle; mais, jugeant que ce qui pressait par-dessus tout, c'était d'appliquer son esprit, il se rappela pour le lui enseigner ce qu'il avait su autrefois de mathématiques. Comme ces ames de Platon qui se recherchent depuis qu'elles sont jetées dans l'univers réel, le jeune clerc de procureur reconnut enfin la pâture qui lui convenait et la saisit avec avidité. Absorbé désormais dans sa retraite par cet unique objet d'étude, il fut bientôt un mathématicien plus habile que son oncle.

On juge bien qu'en le dirigeant ainsi, le bon gardien des capucins n'avait pas entendu condamner son neveu à embrasser le même état que lui. Il s'occupa au contraire à renouer ses liaisons avec d'anciens camarades. M. Peyronnet

fondait alors, sous l'autorité de M. Trudaine le père, cette école des Ponts-et-Chaussées, devenue depuis si utile et si honorable pour la France. M. Duhamel lui fut présenté, et lui donna des preuves si marquées de capacité qu'il l'admit aussitôt parmi ses élèves. Dès-lors son assiduité ne se relâcha pas plus que son aptitude ne se démentit, et il était au moment de quitter l'école, et d'entrer avec distinction dans le corps des Ponts-et-Chaussées, lorsqu'un nouveau projet de M. Trudaine l'appela dans une autre branche de service.

Membre distingué de cette Académie, et l'un des hommes qui ont le plus contribué à faire prévaloir en France des principes éclairés d'administration. M. Trudaine, satisfait de l'impulsion qu'il venait de donner à l'art de multiplier les communications, en créant l'école des Ponts-et-Chaussées, pensa qu'un moyen semblable imprimerait le même mouvement à une partie d'administration beaucoup plus négligée, la recherche de nos richesses souterraines.

Heureusement pour la France, ce genre de richesses demeurera toujours la moindre partie de celles dont la nature l'a gratifiée. Ses champs si vastes, si fertiles, ses gras pâturages, ses vignobles de produits si exquis et si variés, compensent bien avantageusement la rareté de ces veines métalliques, presque toujours annoncées par l'aridité et la rudesse des terrains qu'elles traversent. Mais puisque nous ne manquons pas aussi de pareils terrains, encore valait-il la peine d'examiner si cette stérilité était partout sans compensation, ou du moins si l'on avait fait tout ce qui était possible pour s'en assurer.

Or, un examen rapide des actes antérieurs du gouvernement montra bientôt que les mines, quand elles ne s'étaient

pas vues sacrifiées à la cupidité d'hommes en crédit, avaient été livrées au charlatanisme d'aventuriers ignorants. Leur langueur n'avait donc rien de nécessaire ni d'irrémédiable; mais pour leur rendre la vie, le premier pas à faire était évidemment d'instruire ceux qui devaient y travailler; M. de Seychelles, alors ministre des finances, était digne de saisir des vues aussi sages, et avait promptement obtenu pour elles la sanction royale.

Cependant, pour enseigner il fallait des maîtres, et l'on ne possédait pas même un seul homme qui fût en état de professer l'art des mines, sous le point de vue pratique.

En effet, cet art né en Allemagne dans le moyen âge, y était demeuré à peu près concentré dans les mains des hommes du métier. A peine quelques traités de Métallurgie ou de Docimastique fondés sur une chimie grossière, commençaient-ils à se répandre en France dans des traductions imparfaites. Ce n'était que sur les lieux mêmes, de la bouche de ces ouvriers, et à la vue de leurs travaux, que l'on pouvait acquérir des notions sur les terrains qui recèlent les mines, sur les lois de leurs gisements, sur les moyens les plus sûrs de les attaquer, de les suivre, et d'en purifier les produits.

Mais si les ouvriers seuls possédaient tant de secrets, il fallait que ceux qui auraient à les leur arracher fussent plus que des ouvriers; des esprits très-éclairés pouvaient seuls rassembler en corps de doctrine cette foule de faits épars, dont ceux qui les connaissaient étaient bien éloignés d'embrasser l'ensemble et soupçonnaient même à peine les rapports.

On arrêta donc de prendre dans l'école des Ponts-et-

Chaussées quelques jeunes gens déja versés dans la mécanique et dans la physique, et de les envoyer faire leur éducation sur l'art des mines proprement dit, dans les cantons où il a fait le plus de progrès, c'est-à-dire dans le Harz en Saxe, en Autriche et en Hongrie.

Le choix de M. Trudaine, d'après les indications de M. Peyronnet, tomba sur M. Jars et sur M. Duhamel dont nous faisons l'histoire.

Pour les mieux préparer à ce voyage, on leur fit parcourir ce que la France possédait alors de mines un peu importantes : de 1754 à 1756, ils visitèrent celles du Forest, des Vosges et des Pyrénées, et en 1757, ils partirent pour l'Allemagne.

On peut juger de l'application qu'ils mirent à leurs recherches par le recueil des *Voyages métallurgiques* qui porte le nom de M. *Jars*, mais qui est en grande partie le résultat de leurs travaux communs. Tous les mémoires concernant les mines et les forges de l'Autriche, de la Styrie et de la Carinthie, et celles de la Bohême et de la Saxe, sont dus aux deux jeunes auteurs, et quelques-uns de ces mémoires ont été rédigés par M. Duhamel seul.

Il ne serait pas juste d'apprécier cet ouvrage d'après l'état actuel des connaissances. Depuis plus de soixante ans que ces voyages furent exécutés, la théorie de toutes les sciences qui traitent des minéraux a subi deux ou trois révolutions, et à cette époque même, les maîtres que nos jeunes gens purent consulter n'étaient pas des hommes à théories. A peine les chefs des mines s'élevaient-ils dans leurs conceptions audessus des ouvriers qu'ils employaient. Tout semblait mystérieux dans les résultats purement empiriques sur lesquels

s'appuyaient leurs procédés. On croyait à la naissance, à la maturité des métaux; il fallait, disait-on, aider la nature pour les perfectionner. Le mercure, le soufre, le sel, diversement modifiés, formaient leurs éléments; en un mot, la métallurgie parlait presque partout le langage de l'alchimie.

La géologie était bien plus éloignée encore d'avoir atteint une forme scientifique. A peine Lehman venait-il de distinguer d'une manière fixe les montagnes à couches, et les montagnes à filons. Toutes ces autres lois de détail qui président à la superposition des minéraux, n'étaient pas même soupçonnées; Desaussure n'avait point voyagé, Deluc n'avait point écrit; Werner n'avait point encore, par la force d'un génie supérieur, coordonné en quelque sorte l'univers minéral.

C'est une réflexion que nous sommes souvent obligés de faire, lorsque nous avons à retracer l'histoire de ceux de nos confrères dont la carrière a été longue: alors les idées et le langage qui régnaient pendant leur jeunesse dans les sciences, se reproduisent à nous, et il nous semblerait que nous sommes remontés à quelque peuple de l'antiquité. Un demi-siècle a suffi pour tout métamorphoser, et probablement que dans le même espace de temps, nous serons aussi devenus des anciens pour la génération qui s'élève: motifs de ne jamais oublier la respectueuse reconnaissance que nous devons à nos prédécesseurs, et de ne point repousser sans examen les idées nouvelles qu'une jeunesse ardente conçoit, et qui, si elles sont justes, prévaudront malgré tous les efforts que l'âge présent pourrait faire.

Ce qui est certain, c'est que les faits que MM. Jars et Duhamel recueillirent sont très-nombreux, qu'à cette époque

ils étaient presque entièrement nouveaux pour la France, et que des descriptions claires et méthodiques les ont mis à la portée de tous ceux qui peuvent en tirer parti. L'ouvrage où ils sont consignés a contribué essentiellement au développement que l'art des mines, la fabrication du fer, de l'acier, du fer-blanc, et la recherche de la houille ont pris en France, ainsi qu'à la multiplication des établissements consacrés à ces produits du règne minéral.

Ce qui ne fut pas moins honorable pour les auteurs, c'est la constante amitié qui régna entre eux et pendant ces longues recherches, et lorsqu'ils s'occupèrent de les donner au public. Leurs rapports les exposaient à devenir des rivaux jaloux; leur caractère les en préserva. Dans l'étranger même, leur conduite fut partout régulière et respectable. Ils s'acquirent l'amitié de plusieurs des hommes distingués qu'ils eurent à visiter, et plus d'une fois il leur fut proposé de prendre du service chez les princes dont ils parcouraient les états.

M. Duhamel surtout, que sa modestie et sa réserve distinguaient avantageusement du commun des voyageurs ses compatriotes, fut très-recherché : le gouvernement autrichien aurait voulu se l'attacher, mais il était rappelé dans sa patrie et par la destination qui lui était promise, et par un autre besoin plus cher à son cœur. Depuis sa fuite de chez son procureur, il n'avait pas revu son père, et l'idée d'avoir laissé encore des traces de mécontentement dans ce bon vieillard lui pesait. Il courut implorer son pardon : mais ce n'était pas l'enfant prodigue rentrant misérable et humilié dans la maison paternelle; c'était un homme instruit, recommandable par sa conduite, et qui s'était probablement

ouvert à la fortune une route plus sûre que celle qu'on avait désiré lui faire suivre. On comprend que le courroux du père était apaisé d'avance.

M. Duhamel le fils n'attendait donc plus que d'être installé dans les fonctions auxquelles il s'était préparé par cette longue épreuve. Il vient en hâte à Paris, et s'informe si les préparatifs annoncés ont été terminés. Mais tout avait bien changé dans l'administration. La guerre la plus malheureuse avait épuisé les finances. M. de Seychelles, ce ministre éclairé qui avait fait voyager nos jeunes gens, n'était plus au contrôle-général. Trois autres ministres s'y étaient succédé en deux ans, sans rien faire d'utile au crédit ni à la fortune publique ; et celui qui l'occupait pour le moment, M. de Silhouette, avait été plus malheureux encore que tous les autres. Son nom venait de recevoir un ridicule immortel de l'espèce mesquine de portraits, emblème en quelque sorte de ses opérations, auxquels on l'avait donné. Ce n'était ni à lui ni à la plupart de ceux qui le remplacèrent chacun pendant quelques mois, encore moins à cet abbé Terray, de formidable mémoire, qui gouverna les finances jusqu'à la mort de Louis XV, qu'il fallait proposer de rien fonder pour l'avenir.

M. Trudaine ajourna donc ses rapports, et M. Duhamel resta sans emploi. Cependant il ne murmura, ni n'essaya d'obtenir par des sollicitations ce que l'on refusait à ses travaux. Comme dans tout le reste de sa vie, il se tut, et chercha ses ressources en lui-même. Des conseils donnés aux compagnies de mineurs occupèrent son loisir et soutinrent son existence. Il travailla même pour des particuliers, et en 1764, il entra au service d'un riche propriétaire comme directeur

d'une grande fonderie, à laquelle étaient jointes plusieurs autres usines.

On vit bientôt dans cet établissement ce que l'instruction peut pour la fortune. En peu de mois les frais diminuèrent; le produit doubla; un art tout nouveau s'introduisit.

Dès 1767 on y fabriquait de l'acier si parfait, que des Anglais l'achetaient pour le revendre comme acier cémanté anglais, tant ils craignaient de perdre leur réputation exclusive; et l'on en fabriquait plus de 300 milliers par an.

Long-temps depuis on a prétendu avoir importé en France cette fabrication, et l'on a demandé pour cela de grandes récompenses. M. Duhamel avait agi avec plus de désintéressement. Dès 1777, il avait publié son procédé : dans cette occasion il ajouta comme toujours la modestie au désintéressement, et ne prit pas même la peine de réclamer son droit de priorité.

Une situation moins dépendante aurait pu donner à ses talents une influence plus étendue, et il avait conçu un plan qui aurait assuré sa fortune et sa liberté. Il s'agissait d'établir dans les landes des fonderies et des forges, qu'il eût été aisé d'alimenter au moyen des pins si abondants, et alors si inutiles dans cette contrée sablonneuse. Les traités étaient faits, le succès ne paraissait pas douteux, mais il fallait quitter l'établissement auquel il présidait; et il semblait qu'un propriétaire qu'il avait si fort aidé à enrichir, n'aurait pas dû se refuser à une liberté qui, à son tour, pouvait aider à la fortune de l'homme qui l'avait si bien servi.

Il en fut tout autrement : ce maître d'un caractère violent, et à cette époque dans le plus grand crédit, abusa de son pouvoir au point de faire reprendre M. Duhamel par

des soldats, et de le faire garder à vue dans son établissement. A peine un des grands-vassaux de la couronne se serait-il permis une telle violence dans le fort du gouvernement féodal. Elle prouvait du moins le prix que l'on attachait à la possession de M. Duhamel, et rappelle ces temps où l'on emprisonnait les alchimistes, dans l'espérance de les contraindre à faire de l'or.

Heureusement nous n'étions plus au XIIe siècle : le Roi, à qui les amis de M. Duhamel furent obligés de recourir directement, lui rendit toute justice, et même cette circonstance l'ayant rappelé à la mémoire du ministère, contribua à le faire tirer enfin de la position précaire où il avait été réduit.

On le nomma, en 1775, commissaire du conseil pour l'inspection des forges et fourneaux, ce qui lui ouvrit de nouveau la route des emplois.

Cependant il a toujours regretté que cet événement ait fait manquer ses projets sur les landes, tant il croyait y voir une nouvelle source de prospérité publique, en même temps qu'une base certaine à sa fortune particulière.

Dès le temps où il était encore attaché à sa grande fonderie, il avait commencé à faire connaître les découvertes et observations qui lui étaient propres. En 1772, il avait fait un voyage dans les Pyrénées, et constaté les avantages de la méthode catalane de traiter le fer, et la possibilité de l'appliquer aux mines de l'intérieur du royaume. On sait que cette méthode consiste à faire passer immédiatement le minerai à un état de demi-fluidité, dans un creuset où il est préservé du contact de l'air, et à le soumettre tout de suite à l'action du marteau. On épargne ainsi les grandes avances qu'exige la

construction des hauts fourneaux ; on économise beaucoup de combustible ; on perd moins de fer par la combustion ; le fer s'y sépare et s'y affine dans le même creuset, et par une seule opération. Pour prouver que ce n'étaient pas seulement les mines en roche des Pyrénées que l'on pouvait traiter ainsi, il fit transporter et manipuler sur les lieux des mines en grain de l'Angoumois qui y réussirent parfaitement.

Une fois libre de tout engagement envers des particuliers, il ne mit plus de bornes à son zèle ; et ses écrits, ses expériences se multiplièrent.

En 1775, il visita les mines d'Huelgoat en basse Bretagne, et découvrit au grand avantage des propriétaires, qu'une matière d'apparence terreuse, qu'ils rejetaient comme inutile, était encore très-riche en plomb et en argent.

En 1777, il améliora dans le même pays les forges et les fonderies de canons et de boulets de fer de Lanoue, et publia, comme nous venons de le dire, son secret sur la cémentation de l'acier.

En 1779, il proposa de grands perfectionnements à la liquation de l'argent, c'est-à-dire à l'art de séparer ce métal du cuivre, par le moyen du plomb.

En 1783, il imagina un instrument propre à mieux suivre la direction des filons, et à fixer les points où ils se croisent entre eux.

En 1784 surtout, époque d'un grand concours pour une place à l'Académie, il présenta des mémoires encore plus nombreux qu'auparavant. Il donna un moyen de tirer parti des galènes les plus pauvres. Il enseigna à traiter sans perte les mines riches en fer, en y ajoutant dans les proportions

convenables des terres propres à y produire un laitier suffisant, et à en empêcher ainsi la combustion. Il montra que l'on peut encore tirer beaucoup de parti de la plupart des scories de plomb, et indiqua les moyens les plus sûrs de retirer l'or et l'argent des cendres des orfèvres.

Ces derniers travaux lui valurent successivement dans l'Académie, la place de correspondant et celle d'adjoint; et ils lui obtinrent enfin du gouvernement la récompense promise depuis si long-temps à ses premiers efforts.

Le ministère de Louis XVI avait repris les anciens projets de M. Trudaine. En 1781 M. Necker avait jeté les premières bases de leur réalisation, et en 1783 M. de Calonne parvint à la compléter. Une école des Mines fut établie à Paris, et M. Duhamel y fut nommé à la chaire d'exploitation et de métallurgie, qu'il attendait depuis plus de vingt ans.

C'était se livrer un peu tard à un métier auquel il s'était destiné dès sa jeunesse, et qui aurait voulu être commencé avec le feu de cet âge. Non seulement il était difficile que M. Duhamel se formât tout d'un coup à cette élocution qui pouvait seule fixer l'attention de ses élèves; ces théories dont l'exercice de l'art, la vie des forges et des usines, ne lui avaient pas trop permis de suivre les progrès, il allait être obligé de les reprendre, de se jeter de nouveau dans les méditations nécessaires pour les coordonner comme elles doivent l'être dans la bouche d'un professeur. Il avait à s'informer enfin de tout ce que les sciences et les années avaient récemment ajouté à l'art. Son amour pour ses devoirs et pour ses élèves suppléa à tout: il se montra dès les premiers jours digne de sa place, et pendant trente ans qu'il l'a remplie sans

interruption, l'amour et la reconnaissance de ceux qu'il a instruits l'ont constamment récompensé de ses efforts ; la reconnaissance de bien d'autres encore aurait pu lui être acquise, s'il avait pu la réclamer de tous ceux qu'il a enrichis.

En effet, si l'on veut savoir ce qu'une institution bien conçue, si peu considérable qu'elle soit, ce qu'une chaire publique de plus ou de moins, par exemple, peut produire d'effet dans un grand royaume, que l'on considère ce qu'étaient alors nos mines et ce qu'elles sont devenues. Nos exploitations de fer, de houille, se sont quadruplées; les mines de fer qui vont s'ouvrir près de la Loire, dans la région du charbon de terre et au milieu du combustible, vont produire le métal au même prix qu'en Angleterre. L'antimoine, le manganèse, que nous importions autrefois, s'exportent aujourd'hui en quantité considérable; le chrome, découverte de l'un de nos chimistes, est aussi aujourd'hui le produit très-utile de l'une de nos mines. Déja on a extrait de très-bel étain des mines des côtes de Bretagne. L'alun, le vitriol, autrefois presque inconnus en France, s'y recueillent en abondance. Un amas immense de sel gemme vient d'être découvert en Lorraine, et tout annonce que ces créations extrêmement nouvelles ne se borneront pas là. Sans doute, ce n'est pas à un seul homme, ni à l'érection d'une seule chaire que tout ce bien peut s'attribuer; mais il n'en est pas moins vrai que cet homme, que cette chaire, en ont été la première occasion.

C'est pour ses élèves que M. Duhamel avait composé son principal ouvrage, dont un volume a paru en 1787, sous le titre de *Géométrie souterraine*.

On sait que les métaux, et surtout les plus précieux, n'ont point été distribués par la nature en masses étendues et ho-

mogènes. Jetés en petites parcelles parmi des pierres et des roches inutiles, ce n'est que par un grand travail que l'homme parvient à s'en rendre maître. Toutefois ce n'est point au hasard qu'ils sont répandus. Leur gisement, comme tous les autres rapports des êtres naturels entre eux, est soumis à des lois. On dirait que les montagnes les plus anciennes se sont rompues ou crevassées pour leur offrir des asiles. Ces fentes immenses qui traversent les rochers dans tous les sens, ont l'air d'avoir été remplies après coup de pierres étrangères au fonds de la montagne, et c'est dans les intervalles de ces pierres étrangères, de ces veines, de ces filons, que se sont déposées ces précieuses molécules, souvent encore d'une composition très-compliquée, dont les découvertes successives de la chimie sont parvenues à extraire le métal dans son état de pureté.

L'art du mineur consiste à découvrir les filons principaux, à les suivre, à les retrouver lorsqu'ils sont interrompus, à ne laisser échapper aucun des filons accessoires qui viennent les croiser, à enlever enfin toutes les parties qui peuvent contenir du métal, et à n'en point enlever d'autres : il doit donc connaître les lois générales de la distribution des filons, de leurs inflexions, de leurs intersections; et lorsqu'il en a exploité une partie, lorsqu'il a percé la montagne dans tous les sens où des filons se sont présentés à lui, lorsqu'il y a creusé de nouveau ce même labyrinthe qui semble avoir existé lors de la rupture des roches, et avant que les pierres qui remplissent les fentes se déposassent; il faut qu'il sache se retrouver en tout temps dans ces détours ténébreux, qu'il conserve même des notions précises des galeries, des veines qu'il a abandonnées, afin de ne pas être noyé par les eaux, en y revenant imprudemment par de nouvelles routes.

Tel est l'objet de la géométrie souterraine: elle reconnaît la direction des filons vers les points cardinaux, et leur inclinaison à l'horizon; elle fixe les trois dimensions des travaux; elle en suit et en constate les progrès par des images claires et distinctes. Ses moyens sont tels qu'ils pouvaient être dans ces cavités étroites, où la vue ne s'étend qu'à quelques pieds, et où la lumière du jour ne pénètre point. Quelques lampes, une boussole, et un instrument à mesurer l'inclinaison, doivent lui suffire. Elle ne peut pas comme la geodésie ordinaire, ni lier ses opérations avec celles de l'astronomie, ni établir de grands triangles, pour raccorder ses petites erreurs. Il lui faut donc des pratiques spéciales qui suppléent par leur exactitude de détail à ces grands moyens de rectification; et ces pratiques doivent être telles que des hommes de la classe de ceux qui passent leur triste vie dans ces profondeurs, puissent les saisir et les exécuter avec une justesse suffisante.

Ce sont elles que M. Duhamel enseigne dans son livre. Ce n'est point un ouvrage d'une géométrie élevée, ni qui ait eu la prétention d'offrir de nouvelles vérités mathématiques; c'est un traité purement pratique, une sorte d'arpentage d'un genre à part, mais dont l'art des mines ne pouvait se passer, et que chaque mineur aurait été obligé de se faire à lui-même, si l'auteur ne lui en eût épargné la peine. Cet ouvrage est aujourd'hui le manuel de tous ceux qui pratiquent l'art des mines en France; et comme si la lumière des sciences perfectionnées eût dû retourner vers le foyer d'où elle était partie, il a été traduit en allemand et est fort répandu parmi les mineurs de ce pays.

Dans la suite de son ouvrage, M. Duhamel devait traiter

de tous les autres procédés de l'art, des diverses manières de creuser, de boiser, de murailler, d'aérer, et d'étancher les mines, de transporter le minerai, de le trier, de le laver, de le diviser, de le fondre et de l'affiner. La police des mines, leur administration, les questions de droit qui s'y rapportent, et les lois auxquelles elles sont soumises dans les divers pays, devaient également y être exposées; mais les événements qui troublèrent la France peu de temps après la publication de son premier volume, en arrêtèrent la suite, et nous ne pouvons en prendre une idée que par les morceaux qu'il en a insérés dans l'Encyclopédie méthodique.

Lors de ces événements, M. Duhamel lui-même en fut fortement atteint; mais il fit comme dans toutes les autres occasions, il prit ses précautions sans se plaindre. Au premier danger, il avait fait acheter quelques terres en Amérique, et il était bien résolu d'y porter ses talents.

Au moment de s'embarquer, il accorda encore quelques instants aux larmes de sa famille; mais dans ce peu de jours, les hommes qui menaçaient tous les genres de mérite furent renversés, et bientôt les offres de gouvernements revenus à la modération le fixèrent de nouveau dans sa patrie. Depuis, il a rempli ses fonctions de professeur et d'inspecteur-général des mines, et en cette dernière qualité, il a exécuté des missions importantes, toujours avec zèle et toujours sans bruit; ne demandant rien, ne contrecarrant les succès de personne, demeurant en un mot fidèle au caractère de toute sa vie. Enfin, son âge et la diminution de ses forces l'obligèrent en 1811 à prendre sa retraite. Il avait alors 81 ans. Le reste de sa vie s'est passé dans le calme de l'homme de bien, au milieu d'une famille qui le chérissait. Les douleurs de la

goutte seule altérèrent quelquefois sa tranquillité, et lui causèrent le plus grand de ses chagrins, en l'empêchant de venir aussi exactement entendre ses confrères à l'Académie, car il y était aussi assidu que taciturne. Il portait dans ses relations intérieures, la même modestie, la même douceur que dans le monde, et l'on assure que pendant cinquante-trois ans de mariage, il n'a jamais eu avec sa femme la moindre altercation, et n'a jamais grondé ni ses enfants ni ses domestiques.

Enfin, il s'endormit du sommeil des justes, le 19 février 1816, âgé d'un peu moins de 86 ans. Un fils, l'un de ses meilleurs élèves, et inspecteur-général des mines, fait revivre son nom dans la carrière qu'il a ouverte, et où ce fils a fait déja des pas non moins distingués que l'ont été ceux de son père.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

RECHERCHES

Sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat;

PAR M. LEGENDRE.

QUOIQUE la théorie des nombres soit beaucoup plus avancée maintenant qu'elle ne l'était du temps de Fermat, cependant il reste encore à démontrer une proposition découverte par ce savant illustre (1), savoir que, passé le second degré, il

(1) « *Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultrà quadratum, potestatem* « *in duas ejusdem nominis fas est dividere, cujus rei demonstrationem mira-*

n'existe aucune puissance qui puisse être partagée en deux autres puissances du même degré. Le cas des troisièmes puissances a été démontré par Euler, et celui des quatrièmes l'a été également par une méthode que Fermat lui-même avait suffisamment indiquée, mais on n'est pas allé au-delà; et quoique l'Académie des Sciences, dans la vue d'honorer la mémoire de Fermat, eût proposé pour sujet d'un de ses prix de mathématiques, la démonstration du théorème dont nous parlons, le concours, prorogé même au-delà du terme ordinaire, n'a produit aucun résultat.

Il semble donc qu'une difficulté particulière est attachée à cette question et que nous manquons encore du principe spécial qui serait nécessaire pour la résoudre. En attendant qu'un hasard heureux fasse retrouver ce principe, tel que Fermat l'avait conçu, les Amateurs de la théorie des Nombres verront peut-être avec plaisir que le cas des cinquièmes puissances peut être démontré rigoureusement.

Nous allons exposer cette démonstration en la faisant précéder de quelques considérations générales sur les conditions auxquelles devraient satisfaire les trois indéterminées, si la

---

« *bilem sanè detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.* » Fermat, Notes sur Diophante, pag. 61.

Les dernières paroles de cette note autorisent à croire que la démonstration dont parle Fermat, n'aurait occupé qu'un petit nombre de pages, s'il les avait eues à sa disposition. Cette démonstration était donc beaucoup plus simple que celle dont nous nous servons dans cet écrit pour prouver seulement que la solution, s'il y en avait une dans les cas non résolus, ne pourrait être donnée que par des nombres d'une grandeur prodigieuse.

solution était possible. L'une de ces conditions est que l'exposant de la puissance, ou même son carré, soit diviseur de l'une des indéterminées; et l'on remarquera que cette simple condition, facile à démontrer pour de petites valeurs de l'exposant, devient elle-même un problème difficile et non résolu, lorsqu'on veut l'étendre à un exposant quelconque.

1. L'équation à résoudre étant représentée en général par $x^n \pm y^n = z^n$, on peut d'abord exclure le cas où l'exposant n serait divisible par 4; car cette équation ne serait qu'un cas particulier de l'équation $t^4 \pm u^4 = v^4$. Or celle-ci est démontrée impossible; il faut donc que la première le soit à plus forte raison, puisqu'il ne suffirait pas de satisfaire à cette dernière par des valeurs de t, u, v, et qu'il faudrait encore que ces valeurs fussent des puissances de l'ordre $\frac{1}{4}n$.

On peut de même faire abstraction du cas où l'exposant n serait simplement divisible par 2; car en faisant $n = 2m$, l'équation proposée serait un cas particulier de l'équation $t^m \pm u^m = v^m$ où l'exposant m est un nombre impair.

On peut prouver de plus qu'il suffit de considérer le cas où n est un nombre premier; en effet, si n était un nombre impair quelconque, soit ν le plus petit nombre premier qui divise n, il est clair que l'équation proposée serait un cas particulier de l'équation $t^\nu \pm u^\nu = v^\nu$, de sorte que si cette dernière est démontrée impossible, l'autre devra l'être à plus forte raison.

2. Cela posé, il s'agit en général de démontrer que l'équation $x^n + y^n + z^n = 0$, où n est un nombre premier plus grand que 2, est impossible, sauf le cas évident où l'un des nombres x, y, z, serait zéro. Nous supposerons d'ailleurs que les nombres x, y, z, dont les valeurs et les signes sont in-

déterminés, n'ont aucun commun diviseur; car si un même nombre premier α divisait deux des nombres x, y, z, il diviserait nécessairement le troisième, et l'équation pourrait être divisée par α^n. Il faudra, en vertu de cette supposition, que deux des trois nombres x, y, z, soient impairs et le troisième pair.

3. Soit $x+y+z=p$, je dis que p sera toujours divisible par n. En effet, on sait que n étant un nombre premier, la quantité $x^n - x$ est toujours divisible par n; il en est de même de $y^n - y$ et de $z^n - z$; donc la somme de ces quantités, savoir $x^n + y^n + z^n - p$ ou simplement $-p$ est divisible par n.

4. Je dis maintenant que p^n sera divisible par le produit $(x+y)(y+z)(z+x)$, de sorte qu'on pourra faire....... $p^n = (x+y)(y+z)(z+x)$P, P étant un polynome en x, y, z, homogène et du degré $n-3$. Car n étant un nombre impair quelconque, $p^n - z^n$ est toujours divisible par $p-z$ ou $x+y$; de même $x^n + y^n$ est divisible par $x+y$; donc $p^n - z^n - x^n - y^n$ ou simplement p^n est divisible par $x+y$. Par une semblable raison p^n est divisible par $y+z$ et par $z+x$. Donc n étant un nombre impair quelconque, p^n sera divisible par le produit $(x+y)(y+z)(z+x)$.

5. Si l'on suppose qu'aucun des nombres x, y, z n'est divisible par n, il faudra aussi qu'aucune des sommes $x+y$, $y+z$, $z+x$, ne soit divisible par n; car si, par exemple, $x+y$ était divisible par n, la différence $p-(x+y)$ ou z serait divisible, ce qui est contre la supposition.

6. Si l'un des nombres x, y, z est divisible par n, soit x ce nombre; alors $y+z$ sera divisible non-seulement par n, mais par n^{n-1}. En effet, puisqu'on a $x^n + y^n + z^n = 0$, il faut que

y^n+z^n soit divisible par n^n; mais y^n+z^n est le produit de $y+z$ par le polynome $y^{n-1}-zy^{n-2}+z^2y^{n-3}$—etc.; et si on fait dans ce polynome $y+z=0$, ou $z=-y$, il se réduit à ny^{n-1}; donc, comme y ne peut être divisible par n, puisque x et y sont premiers entre eux, le polynome sera divisible par n simplement et non par une puissance plus élevée de n. Donc $y+z$ sera divisible par n^{n-1}.

En général, si x était divisible par n^α, $y+z$ le serait par $n^{n\alpha-1}$, et P simplement par n.

7. Il résulte de ce qui précède que, si on fait $y^n+z^n=(y+z)\varphi(y,z)$, les deux facteurs $y+z$ et $\varphi(y,z)$ auront n pour commun diviseur ou n'en auront aucun, selon que x sera ou ne sera pas divisible par n.

La fonction $\varphi(y,z)=y^{n-1}-zy^{n-2}+z^2y^{n-3}\ldots+z^{n-1}$ dont nous ferons beaucoup d'usage, est remarquable par plusieurs propriétés. Comme les nombres y et z doivent être en général ou tous deux impairs, ou l'un pair et l'autre impair, la fonction $\varphi(y,z)$, dont le nombre des termes est n, sera toujours un nombre impair. De plus, ce nombre sera positif; car la fonction φ est de degré pair, et elle a tous ses facteurs imaginaires. On sait d'ailleurs que n étant, comme nous le supposons, un nombre premier, la fonction 4φ peut toujours se mettre sous la forme $4\varphi=Y^2\pm nZ^2$, savoir Y^2+nZ^2, si n est de la forme $4k-1$, et Y^2-nZ^2, si n est de la forme $4k+1$. (*Voyez* Th. des N. nº 476.)

Maintenant, si on peut satisfaire à l'équation $x^n+y^n+z^n=0$, voici les conséquences qui résultent de cette supposition.

8. Considérons d'abord le cas où l'un des trois nombres x, y, z, serait divisible par n, et soit x ce nombre; alors en

faisant $y^n + z^n = (y+z)\varphi(y, z)$, le produit des deux facteurs $y+z$ et $\varphi(y, z)$ sera égal à la puissance $(-x)^n$; et comme ces deux facteurs ne peuvent avoir que n pour commun diviseur, il faudra que $n(y+z)$, et $\frac{1}{n}\varphi(y, z)$ soient l'un et l'autre des puissances $n^{\text{ièmes}}$ dont le produit sera égal à $(-x)^n$; c'est pourquoi nous ferons en général $y+z = \frac{1}{n}a^n$, a désignant un nombre divisible par n ou par une puissance de n, et $\varphi(y, z) = n\alpha^n$, ce qui suppose $x = -a\alpha$, et de plus α premier à na.

On a également $z^n + x^n = (z+x)\varphi(z, x) = (-y)^n$; mais dans ce cas y n'étant pas divisible par n, il faudra que $z+x$ et $\varphi(z, x)$ soient l'un et l'autre des puissances $n^{\text{ièmes}}$; on fera donc $z+x = b^n$, et $\varphi(z, x) = \beta^n$, ce qui suppose $y = -b\beta$.

Pareillement de l'équation $x^n + y^n = (x+y)\varphi(x,y) = -z^n$, on déduira $x+y = c^n$, $\varphi(x,y) = -\gamma^n$, ce qui suppose $z = -c\gamma$.

On aura donc à la fois les neuf équations :

$$y+z = \frac{1}{n}a^n, \qquad \varphi(y, z) = n\alpha^n, \qquad x = -a\alpha,$$

$$z+x = b^n, \qquad \varphi(z, x) = \beta^n, \qquad y = -b\beta,$$

$$x+y = c^n, \qquad \varphi(x,y) = \gamma^n, \qquad z = -c\gamma.$$

Appelons comme ci-dessus p la somme $x+y+z$, nous aurons

$$2p = \frac{1}{n}a^n + b^n + c^n,$$

et les valeurs de x, y, z, seront exprimées en fonctions de a, b, c, comme il suit :

$$x = p - \frac{1}{n}a^n = \frac{1}{2}\left(b^n + c^n - \frac{1}{n}a\right),$$

$$y=p-b^n=\frac{1}{2}\left(c^n+\frac{1}{n}a^n-b^n\right),$$

$$z=p-c^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}a^n+b^n-c^n\right).$$

9. Il existe aussi une relation entre a, b, c, laquelle se déduira de l'équation $2p=\frac{1}{n}a^n+b^n+c^n$, combinée avec l'équation

$$0=\left(p-\frac{1}{n}a^n\right)^n+(p-b^n)^n+(p-c^n)^n.$$

On sait d'ailleurs que p^n est divisible par $n\,(y+z)(z+x)(x+y)$, ou par $a^n b^n c^n$; on peut donc supposer $p=abc\mathrm{D}$, ce qui donnera

$$2abc\mathrm{D}=\frac{1}{n}a^n+b^n+c^n.$$

Et par le développement de l'équation précédente, on obtiendra dans chaque cas particulier une autre équation entre a, b, c, D. Dans le cas de $n=3$, on a simplement $\mathrm{D}=1$.

10. Nous remarquerons encore que tout diviseur premier θ de l'un des facteurs α, β, γ, doit être de la forme $2kn+1$. Car les nombres θ sont diviseurs d'un nombre de la forme p^n+q^n sans l'être de $p+q$; soit $p=qt+\theta u$, il faudra que θ soit diviseur de t^n+1 sans l'être de $t+1$; d'où il suit que θ est de la forme $2kn+1$. (*Th. des N.*, art. 157.)

Cette propriété est commune aux trois facteurs impairs α, β, γ; mais le premier α, qui entre dans la composition de l'indéterminée x déja divisible par n, a de plus la propriété que tous ses facteurs premiers sont de la forme $2hn^2+1$.

11. En effet, soit $\theta=2kn+1$ un des facteurs premiers de α; on déduira des équations précédentes, en omettant les

multiples de θ, $\alpha=0$, $x=0$, $y=c^n$, $z=b^n$, $\varphi(y,z)=0$. Soit ρ une racine, autre que -1, de l'équation $\rho^n+1=0$; puisqu'on a $y^n+z^n=(y+z)\varphi(y,z)$, l'équation $\varphi(y,z)=0$, aura pour l'une de ses racines $y=\rho z$; donc $c^n=\rho b^n$, donc ρ doit être un résidu $n^{\text{ième}}$ de θ; représentons ces résidus par la suite $\pm(1,\mu,\mu^2\ldots\mu^{k-1})$, où μ doit satisfaire à la condition $\mu^k+1=0$ (sans qu'on puisse avoir $\mu^h+1=0$, h étant un diviseur de k), on pourra faire $\rho=\mu^i$, et l'équation $\rho^n+1=0$ deviendra $\mu^{in}+1=0$.

Plusieurs valeurs de i peuvent satisfaire à cette équation; car si h est la moindre de ces valeurs, on pourra faire $i=h$, $3h$, $5h$, etc., c'est-à-dire i égal à un multiple impair de h, et alors la valeur $\rho=\mu^i$, renfermera les valeurs $\rho=\mu^h,\mu^{3h},\mu^{5h}$, etc., lesquelles satisferont également à l'équation $\rho^n+1=0$.

Cela posé, l'équation $\mu^{hn}+1=0$ dans laquelle l'exposant de μ est le moindre possible, devra coïncider avec l'équation $\mu^k+1=0$, où k est assujetti à la même condition, de sorte qu'on aura $k=hn$, et par conséquent $\theta=2hn^2+1$. Donc tous les diviseurs premiers de α sont de la forme $2hn^2+1$; ce qui établit une différence nótable entre ces diviseurs et ceux des deux autres nombres β et γ, lesquels sont simplement de la forme $2kn+1$.

12. Nous avons supposé dans l'article 8, que l'un des nombres x, y, z, est divisible par n; il reste maintenant à considérer le cas où aucun de ces nombres ne serait divisible par n. Alors le seul changement à faire dans les neuf équations de l'art. 8, serait de mettre a^n à la place de $\frac{1}{n}a^n$, et α^n à la place de $n\alpha^n$. Mais on verra que ce cas ne peut jamais avoir lieu.

13. Au moyen de la forme générale que nous venons de donner aux valeurs de x, y, z, on peut démontrer que si une de ces indéterminées est divisible par n, elle le sera nécessairement par n^2, et qu'il en sera de même de la quantité p.

En effet, nous avons appelé x dans l'art. 8, l'indéterminée qui est divisible par n; or, d'après l'équation $2p = \frac{1}{n}a^n + b^n + c^n$, où $2p$ et $\frac{1}{n}a^n$ sont divisibles par n, il faut que $b^n + c^n$ soit divisible par n. D'un autre côté, $b^n - b$ et $c^n - c$ étant toujours divisibles par n, leur somme $b^n + c^n - (b+c)$ est divisible par n; donc $b+c$ est aussi divisible. Soit $b+c = n\mathrm{A}$, on aura

$$b^n = (-c + n\mathrm{A})^n,$$

et

$$b^n + c^n = nc^{n-1}.n\mathrm{A} - \frac{n.n-1}{1}c^{n-1}.n^2\mathrm{A}^2 + \text{etc.};$$

d'où l'on voit que $b^n + c^n$ est toujours divisible par n^2; mais la partie $\frac{1}{n}a^n$ est aussi divisible par n^2 dans le cas de $n=3$, et par une puissance plus élevée de n, lorsque n est >3. Donc p sera toujours divisible par n^2; donc $p - \frac{1}{n}a^n$ ou x sera divisible par n^2.

Il est donc démontré en général que si l'une des inconnues x, y, z, est divisible par n, elle le sera nécessairement par n^2, et qu'il en est de même de la somme $x+y+z=p$.

14. Nous nous proposons maintenant de démontrer que l'une des inconnues x, y, z, est nécessairement divisible par n.

Ayant déja fait $p = x+y+z$, soit encore $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$, de manière que les indéterminées x, y, z,

soient les racines de l'équation $V^3-pV^2+qV-r=0$; si on appelle en général S_m la somme des puissances de degré m de ces racines, savoir $S_m=x^m+y^m+z^m$, on aura d'après les formules connues :

$$S_1=p,$$
$$S_2=p^2-2q,$$
$$S_3=p^3+3(r-pq),$$

et en général

$$S_m=p^m-mqp^{m-2}+mrp^{m-3}+\frac{m.m-3}{2}q^2p^{m-4}-\frac{m.m-4}{2}.2qrp^{m-5}$$
$$+\frac{m.m-5}{2}r^2p^{m-6}-\frac{m.m-4.m-5}{2.3}q^3p^{m-6}$$
$$+\frac{m.m-5.m-6}{2.3}.3q^2rp^{m-7}-\frac{m.m-6.m-7}{2.3}.3qr^2p^{m-8}$$
$$+\frac{m.m-7.m-8}{2.3}r^3p^{m-9}+\text{etc.}$$

cette suite devant être prolongée jusqu'aux puissances négatives de p exclusivement.

15. Soit $n=3$, on aura $S_3=0$, ce qui donne

$$p^3=3(pq-r)=3(x+y)(y+z)(z+x);$$

donc p est divisible par 3, et en outre un des facteurs $x+y$, $y+z, z+x$ est divisible par 9. Soit ce facteur $y+z$, alors $p-(y+z)$ ou x sera divisible par 3; on peut de plus conclure, suivant l'art. 13, que x devra être divisible par 9, ainsi que p.

16. Soit $n=5$, on aura $S_5=0$, ce qui donne $p^5=5(pq-r)(p^2-q)$ ou

$$p^5=5(x+y)(y+z)(z+x)\left(\frac{p^2+x^2+y^2+z^2}{2}\right).$$

Si aucun des nombres $x+y, y+z, z+x$, n'est divisible par 5, il faudra que le facteur $p^2+x^2+y^2+z^2$, ou simplement sa partie $x^2+y^2+z^2$ soit divisible. Mais tout nombre non divisible par 5 est représenté par $5m \pm 1$, ou par $5m \pm 2$, et son carré l'est par $5m \pm 1$; or trois nombres étant de la forme $5m \pm 1$, leur somme ne peut être que de l'une des quatre formes $5m \pm 1$, $5m \pm 3$; il est donc impossible que $x^2+y^2+z^2$ soit divisible par 5, si aucun des nombres x, y, n'est divisible. Donc dans le cas de $n=5$, il y a nécessairement une des indéterminées divisible par 5, elle l'est donc en même temps par 25, ainsi que la somme $x+y+z=p$.

17. Ces deux premiers cas peuvent être démontrés d'une manière beaucoup plus simple comme il suit.

1°. Un cube quelconque non divisible par 3 est nécessairement de l'une des deux formes $9m \pm 1$. Or trois des restes ± 1 ne peuvent faire ni la somme zéro, ni la somme 9; donc si l'on peut satisfaire à l'équation $x^3+y^3+z^3=0$, un des trois nombres x, y, z, sera nécessairement divisible par 3.

2°. La cinquième puissance de tout nombre non divisible par 5 est nécessairement de l'une des quatre formes $25m \pm (1,7)$, ce que l'on peut vérifier sur les cinquièmes puissances des nombres 1, 2, 3, 4, lesquelles divisées par 25, ont les mêmes restes que donneraient les cinquièmes puissances des nombres $5x+1, 5x+2, 5x+3, 5x+4$. Or trois des quatre restes $\pm 1, \pm 7$, ne peuvent faire ni la somme 0 ni la somme 25. Donc si l'équation $x^5+y^5+z^5=0$ est satisfaite, il faudra que l'un des nombres x, y, z, soit divisible par 5.

Le même moyen ne réussit pas pour le cas de $n=7$; car on trouve $19^7-18^7-1=7^7.18.19$. Ainsi trois nombres non divisibles par 7 tels que $x=19, y=-18, z=-1$, ou plus

généralement $x = 19 + 7^6 a$, $y = -18 + 7^6 b$, $z = -1 + 7^6 c$, donneraient la somme $x^7 + y^7 + z^7$ divisible par 7^7. Mais voici deux autres cas qui réussissent, ce sont ceux de $n = 11$ et $n = 17$.

En effet, 1°. la puissance $11^{\text{ième}}$ de tout nombre non divisible par 11 est toujours de l'une de ces formes $121m \pm (1, 3, 9, 27, 40)$. Or dans les cinq nombres 1, 3, 9, 27, 40, il n'y en a pas deux qui se suivent immédiatement ou dont la différence soit l'unité. Donc trois de ces nombres ne peuvent faire ni la somme 0 ni la somme 121. Donc l'équation $x^{11} + y^{11} + z^{11} = 0$ étant supposée possible, un des nombres x, y, z, sera divisible par 11.

2°. La puissance $17^{\text{ième}}$ de tout nombre non divisible par 17 est de l'une des 16 formes $289m \pm (1, 38, 40, 65, 75, 110, 131, 134)$; or parmi ces restes on n'en trouve pas deux qui se suivent à une unité de différence; donc dans l'équation $x^{17} + y^{17} + z^{17} = 0$, un des nombres x, y, z, sera divisible par 17.

18. Le principe dont nous venons de faire usage se démontre ainsi :

Supposons qu'on ait $x^n + y^n + z^n = 0$, et soit θ un nombre premier non diviseur de xyz, puisque x et θ^a sont premiers entre eux, on peut supposer $y = fx + \theta^a y'$, $z = gx + \theta^a z'$, et en faisant la substitution on verra que $1 + f^n + g^n$ est divisible par θ^a, ou qu'en supprimant les multiples de θ^a, on a $(-g)^n = f^n + 1$, donc parmi les restes des puissances $n^{\text{ièmes}}$ divisées par θ^a, il y en aura toujours un, provenant de $(\theta - g)^n$ ou de $(-g)^n$ qui sera plus grand d'une unité que le reste provenant de f^n. Si cette condition ne se trouve pas remplie

dans la série des restes, on doit en conclure qu'il y a nécessairement un des nombres $x, y, z,$ divisible par θ.

19. Revenons au cas de $n=7$, et faisons $S=0$ dans les formules du n° 14, nous aurons

$$p^7=7(pq-r)[(p^2-q)^2+pr].$$

Le facteur $(p^2-q)^2+pr$ peut être exprimé par

$$\left(\frac{p^2+x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2+pxyz;$$

si donc aucune des indéterminées $x, y, z,$ n'était divisible par 7, il faudrait que $x^2+y^2+z^2$ fût divisible ; mais cette condition ne présente aucun signe d'impossibilité, car le carré de tout nombre non divisible par 7 est de l'une des trois formes $7m+1, 2, 4,$ et la somme des trois restes 1, 2, 4, est divisible par 7. Cette considération est donc insuffisante pour notre objet, et il faut recourir à d'autres moyens.

20. Étant proposé l'équation $x^7+y^7+z^7=0$, où l'on suppose xyz non divisible par 7, on pourra faire d'abord comme ci-dessus

$$y+z=a^7,\ \varphi(y,z)=\alpha^7,\ x=-a\alpha,$$

α étant premier à $7a$. Mais on sait que $4\varphi(y,z)$ peut se mettre sous la forme Y^2+7Z^2, où l'on a

$$Y=2y^3-y^2z-yz^2+2z^3 \text{ et } Z=yz(y-z).$$

On aura donc $4\alpha^7=Y^2+7Z^2$, ou simplement $\alpha^7=(\frac{1}{2}Y)^2+7(\frac{1}{2}Z)^2$; car Y et Z seront toujours des nombres pairs. Cette équation fait voir que α diviseur de la formule t^2+7u^2, doit être de cette même forme, et qu'ainsi on peut supposer $\alpha=f^2+7g^2$; faisant ensuite $(f+g\sqrt{-7})^7=F+G\sqrt{-7}$,

ce qui donne

$$F=f(f^6-3.7^2f^4g^2+5.7^3f^2g^4-7^4g^6),$$
$$G=7g(f^6-5.7f^4g^2+3.7^2f^2g^4-7^3g^6),$$

on aura l'équation $(\frac{1}{2}Y)^2+7(\frac{1}{2}Z)^2=F^2+7G^2$, à laquelle on satisfait généralement par les valeurs

$$y^3+z^3-\tfrac{1}{2}yz(y+z)=F,$$
$$\tfrac{1}{2}yz(y-z)=G.$$

Mais puisque G est divisible par 7, il faudra que $yz(y-z)$ le soit aussi; et comme dans notre hypothèse yz est non-divisible, il faudra que $y-z$ soit divisible.

On prouvera de même par l'équation $\varphi(z,x)=\beta^7$, que $x-z$ doit être divisible par 7; donc la somme de ces deux quantités, $x+y-2z$ serait divisible. D'un autre côté, $x+y+z$ est toujours divisible par 7; donc il il faudrait que $3z$ et par conséquent z fût divisible par 7, ce qui est contre l'hypothèse. Donc enfin dans le cas de $n=7$, l'une des indéterminées est nécessairement divisible par 7 et même par 7^2.

Le même mode de démonstration pourrait s'appliquer aux valeurs $n=11$, $n=19$, mais il ne réussirait pas pour la valeur $n=13$. C'est pourquoi nous allons exposer une autre démonstration fort simple et d'une généralité presque absolue.

21. Si l'équation $x^n+y^n+z^n=0$ est possible, avec la condition qu'aucun des nombres x, y, z, n'est divisible par n, il faudra, conformément à l'art. 12, qu'on puisse satisfaire aux équations suivantes où $\alpha\beta\gamma$ n'a aucun diviseur commun avec $nabc$.

$$y+z=a^n,\quad \varphi(y,z)=\alpha^n,\quad x=-a\alpha=\tfrac{1}{2}(b^n+c^n-a^n),$$

$$z+x=b^n,\quad \varphi(z,x)=6^n,\quad y=-b6=\tfrac{1}{2}(c^n+a^n-b^n),$$
$$x+y=c^n,\quad \varphi(x,y)=\gamma^n,\quad z=-c\gamma=\tfrac{1}{2}(a^n+b^n-c^n).$$

Or nous allons faire voir que ces équations ne peuvent avoir lieu.

Pour cela supposons, ce qui sera prouvé ultérieurement, qu'il existe, pour chaque valeur de n, un nombre premier $\theta=2kn+1$, tel qu'on ne peut pas satisfaire à l'équation $r'=r+1$, r et r' étant deux résidus de puissances $n^{\text{ièmes}}$ divisées par θ, et tel en même temps que n ne soit pas un de ces résidus. Voici les conséquences qui résultent de l'hypothèse que n n'est pas diviseur de xyz.

Il faut d'abord que l'un des nombres x, y, z, soit divisible par θ, car dans le cas contraire, on serait conduit comme dans le nº 18 à l'équation $r'=r+1$ qui n'a pas lieu. Soit ce nombre x, alors $b^n+c^n-a^n$ sera aussi divisible par θ, de sorte qu'en omettant les multiples de θ on aura $b^n+c^n-a^n=0$. Je conclus de cette dernière équation que l'un des nombres a, b, c est divisible par θ, sans quoi on serait conduit de nouveau à l'équation $r'=r+1$ qui n'a pas lieu. Ce nombre divisible ne peut être ni b ni c; car si cela était, x aurait un commun diviseur avec l'un des nombres y et z exprimés par $-b6$ et $-c\gamma$. Donc le nombre divisible par θ ne peut être que a.

Cela posé, en omettant toujours les multiples de θ on aura les équations conditionnelles (1) $x=0$, $a=0$, $b^n+c^n=0$,

(1) Ces équations entre des restes provenant de la division de plusieurs nombres par un même nombre premier θ, se traitent comme les équations ordinaires, sans qu'il soit besoin des signes nouveaux d'égalité ni des dénominations nouvelles assez *incongrues*, dont quelques géomètres font usage.

$z=b^n, y=c^n, z=-y$; ensuite les valeurs $x=0, z=-y$ étant substituées dans les équations $\varphi(y,z)=\alpha^n, \varphi(z,x)=6^n, \varphi(x,y)=\gamma^n$, il en résulte $ny^{n-1}=\alpha^n, z^{n-1}=6^n, y^{n-1}=\gamma^n$. Donc $n\gamma^n=\alpha^n$.

Mais puisqu'on a $\theta=2kn+1$, si on appelle r un résidu quelconque de la puissance x^n, non divisible par θ, on sait par les propriétés de ces résidus (*Th. des N.* art. 336), que les $2k$ valeurs de r qui satisfont à l'équation $\mu^{2k}=1$, sont représentées par la suite $1, \mu, \mu^2 \ldots \mu^{2k-1}$, formée des puissances successives d'un même nombre μ, dont la propriété est telle que $\mu^k=-1$, et qu'aucune autre puissance de μ dont le degré serait inférieur à k, ne peut donner le reste -1. Il en résulte donc qu'on pourra faire $\alpha^n=\mu^i$ et $\gamma^n=\mu^e$, et alors l'équation $n\gamma^n=a^n$ donnerait $n=\mu^{i-e}$, donc n serait un résidu de puissance $n^{ième}$, ce qui est contre la supposition.

22. Tout se réduit par conséquent à prouver qu'il existe pour chaque valeur de n un nombre premier θ qui satisfait aux deux conditions mentionnées. Voici un tableau dressé à cet effet pour toutes les valeurs de n moindres que 100.

n	θ	r.	n	θ	r.
3	7= 2. 3+1	±1	43	173= 4.43+1	±(1,80)
5	11= 2. 5+1	±1	47	659=14.47+1	±(1,12,55,144,249,270,307)
7	29= 4. 7+1	±(1,12)	53	107= 2.53+1	±1
11	23= 2.11+1	±1	59	827=14.59+1	±(1,20,124,270,337,389,400)
13	53= 4.13+1	±(1,23)	61	977=16.61+1	±(1,52,80,227,252,357,403,439)
17	137= 8.17+1	±(1,10,37,41)	67	269= 4.67+1	±(1,82)
19	191=10.19+1	±(1,7,39,49,82)	71	569= 8.71+1	±(1,76,86,277)
23	47= 2.23+1	±1	73	293= 4.73+1	±(1,136)
29	59= 2.29+1	±1	79	317= 4.79+1	±(1,114)
31	311=10.31+1	±(1,6,36,52,95)	83	167= 2.83+1	±1
37	149= 4.37+1	±(1,44)	87	179= 2.89+1	±1
41	83= 2.41+1	±1	97	389= 4.97+1	±(1,115)

On voit dans ce tableau que l'équation $r'-r=1$ n'est satisfaite dans aucun cas, c'est-à-dire qu'il n'y a pas deux restes dont la différence soit égale à l'unité. On voit de même que l'exposant n n'est pas compris parmi les valeurs de r. Ainsi la proposition est démontrée, en quelque sorte d'un trait de plume, pour toutes les valeurs de n moindres que 100 (1).

23. Dans le tableau précédent on peut remarquer que la valeur de k qui sert à former le nombre auxiliaire $\theta=2nk+1$, est un terme de la série $1, 2, 4, 5, 7, 8$, où l'on ne trouve ni 3 ni 6. Cette suite s'étendrait plus loin si le tableau lui-même était prolongé au-delà de la limite $n=97$; mais on n'y trouverait aucun nombre divisible par 3. En effet si k était divisible par 3, il serait toujours possible de satisfaire à l'équation $r'=r+1$, et l'une des conditions exigées n'aurait pas lieu. Car en faisant $k=3i$, le nombre μ qui par ses puissances successives forme les $2k$ valeurs du résidu r, devra satisfaire à l'équation $\mu^k=-1$ ou $\mu^{3i}+1=0$. Rejetant dans le premier membre le facteur μ^i+1 qui ne peut pas être zéro par la nature du nombre μ (art. 21) on aura $\mu^{2i}-\mu^i+1=0$; ainsi en faisant $\mu^i=r'$, $\mu^{2i}=r$, on aurait $r'=r+1$.

24. Si l'on remarque que la valeur $\theta=2n+1$ s'applique à 9 des 24 cas contenus dans le tableau, on pourra présu-

---

(1) Cette démonstration qu'on trouvera sans doute très ingénieuse, est due à Mlle *Sophie Germain*, qui cultive avec succès les sciences physiques et mathématiques, comme le prouve le prix qu'elle a remporté à l'Académie sur les vibrations des lames élastiques. On lui doit encore la proposition de l'art. 13 et celle qui concerne la forme particulière des diviseurs premiers de α, donnée dans l'art. 11.

mer que la loi est générale; c'est-à-dire que toutes les fois que $2n+1$ est un nombre premier en même temps que n, ce nombre $2n+1$ ou θ satisfera aux deux conditions prescrites, savoir que l'équation $r'=r+1$ entre deux résidus $n^{\text{ièmes}}$ n'a pas lieu, et que n n'est pas un de ces résidus. En effet dans ce cas il n'y a que deux résidus $+1$ et -1, qui ne satisfont point à l'équation $r'=r+1$, et n n'est pas un de ces résidus.

25. On peut prouver de même que lorsqu'on a $\theta=4n+1$, ces deux conditions sont encore satisfaites. Dans ce cas il y aura 4 résidus r à déduire de l'équation $r^4-1=0$, laquelle se divise en deux autres $r^2-1=0$, $r^2+1=0$. La seconde d'où il faut déduire le nombre μ est facile à résoudre; car on sait que dans le cas dont il s'agit θ peut être mis sous la forme a^2+b^2, il suffira donc de déterminer μ par la condition que $a+b\mu$ soit divisible par θ, et μ^2+1 sera divisible par θ; de sorte qu'en omettant les multiples de θ, on pourra faire $\mu^2=-1$, et les quatre valeurs de r seront $r=\pm(1,\mu)$.

De là on voit que la condition $r'=r+1$ ne pourrait être satisfaite que dans le cas de $\mu=2$, alors on aurait $\theta=5$ et $n=1$, cas exclu. La seconde condition qui exigerait que $\mu=n$, donne en omettant les multiples de θ, $n^2=-1$; mais par la même omission on a $1+4n=0$, et $1=16n^2$; donc $n^2=-16n^2$, ou $17=0$, c'est-à-dire que 17 serait le nombre θ; mais alors on aurait $n=4$ qui n'est pas un nombre premier.

Donc toutes les fois que n et $4n+1$ seront l'un et l'autre des nombres premiers, le nombre $\theta=4n+1$ satisfera aux deux conditions requises.

26. L'analogie porte à croire qu'il en sera de même dans

le cas de $\theta = 8n+1$; c'est ce qu'il faut examiner. D'abord la valeur de μ devra être déterminée par l'équation $\mu^4 + 1 = 0$ qui peut être résolue sans tâtonnement de la manière suivante.

Le premier membre peut se mettre sous la forme $(\mu^2 - 1)^2 + 2\mu^2$, et comme θ nombre premier $8n+1$, doit être de la forme $a^2 + 2b^2$, on pourra faire $\mu^2 - 1 = 2\mu c$, en prenant pour c la plus petite valeur de y qui satisfait à l'équation $a - 2by = \theta x$.

Pour résoudre ensuite l'équation $\mu^2 - 2\mu c - 1 = 0$, ou $(\mu - c)^2 - (c^2 + 1) = 0$, on multipliera le premier membre par $4b^2$, et observant que $4b^2(c^2 + 1) = a^2 + 4b^2 = 2b^2$, on aura $4b^2(\mu - c)^2 - 2b^2 = 0$, ou $2(\mu - c)^2 - 1 = 0$. Mais le nombre θ de forme $8n+1$, peut être représenté par $2\alpha^2 - 6^2$; donc μ sera déterminé par la condition que $6(\mu - c) \pm \alpha$ soit divisible par θ.

Cela posé, les huit valeurs de r seront $r = \pm(1, \mu, \mu^2, \mu^3)$. Maintenant l'équation $r' = r + 1$, si elle pouvait avoir lieu, serait représentée par l'une des trois équations suivantes :

$$\mu^2 = \mu \pm 1, \quad \mu^3 = \mu^2 \pm 1, \quad \mu^3 = \pm\mu + 1 ;$$

et comme on a $\mu^4 = -1$, la seconde mise sous la forme $\mu^3 = \mu^2 \pm \mu^4$, et la troisième multipliée par μ, se réduisent à la première. Ainsi tout se réduit à prouver qu'on ne peut avoir $\mu^2 = \mu \pm 1$, ou $\mu^2 \mp 1 = \mu$. En effet si on élève chaque membre au carré, on aura $\mp 2\mu = \mu^2$, équation impossible. Si on admettait encore la combinaison $\mu^4 = \pm\mu^2 + 1$, il en résulterait $2 = \pm\mu^2$, et ensuite $4 = \mu^4 = -1$, équation impossible. Donc lorsqu'on aura $\theta = 8n+1$, l'équation $r' = r + 1$ sera impossible, et la première condition sera remplie.

Il reste à prouver que la seconde le sera également, c'est-

à-dire que n ne sera pas comprise parmi les valeurs de r. Si elle l'était on aurait $n^4 = \pm 1$; d'un autre côté on a $1 = -8n + \theta$, ou simplement $1 = -8n$, et par conséquent $1 = 8^4 n^4$, donc $n^4 = \pm 8^4 n^4$, ou $8^4 \pm 1 = 0$, ce qui veut dire que θ ne pourra être qu'un diviseur de $8^4 \pm 1$; or $8^4 + 1$ n'a pour diviseur aucun nombre premier de la forme $8n + 1$, et $8^4 + 1$ en a deux, savoir 17 et 241 ; mais ceux-ci supposent $n = 2$ et $n = 30$, l'un n'étant pas premier, l'autre n'étant pas impair. Donc nos deux conditions seront remplies sans aucune exception, toutes les fois qu'on aura $\theta = 8n + 1$.

27. Soit encore $\theta = 16n + 1$, on pourra toujours trouver une valeur de μ telle qu'en omettant les multiples de θ on ait $\mu^8 = -1$, et les 16 valeurs du résidu r seront ainsi représentées $r = \pm(1, \mu, \mu^2 \ldots \mu^7)$. Maintenant si l'équation $r' = r + 1$ entre deux résidus pouvait avoir lieu, elle se réduirait toujours à l'une des six équations

$$\mu^2 = \mu \pm 1, \quad \mu^3 = \pm \mu + 1, \quad \mu^4 = \mu \pm 1, \quad \mu^4 = \pm \mu^2 \pm 1,$$
$$\mu^5 = \pm \mu + 1, \quad \mu^5 = \mu^2 \pm 1.$$

Or de la première on déduit $(\mu^2 \mp 1)^2 = \mu^2$, ou $\mu^4 + 1 = \mu^2 (1 \pm 2)$, et le carré de celle-ci est $2\mu^4 = \mu^4 (1 \mp 2)^2$, ou $(1 \pm 2)^2 = 2$, équation impossible.

La seconde équation donne

$$\mu^2 (\mu^2 \mp 1)^2 = 1, \text{ ou } \mu^4 \mp 2\mu^2 + 1 = \frac{1}{\mu^2};$$

donc

$$\mu^4 + 1 = \pm 2\mu^2 + \frac{1}{\mu^2};$$

le carré de celle-ci est

$$2\mu^4 = 4\mu^4 \pm 4 + \frac{1}{\mu^4},$$

ou parce que $\frac{1}{\mu^4} = -\mu^4$, $\mu^4 = \mp 4$; donc $-1 = 16$, c'est-à-dire $\theta = 17$, valeur qui supposerait $n = 1$.

La troisième équation $\mu^4 \mp 1 = \mu$ étant élevée au carré, donne $\mp 2\mu^4 = \mu^2$; le carré de celle-ci est $-4 = \mu^4$, d'où résulte encore $16 = -1$, ou $\theta = 17$.

La quatrième $\mu^4 \mp 1 = \pm \mu^2$ élevée au carré, donne $\mp 2\mu^4 = \mu^4$, ou $1 = \mp 2$, équation impossible.

Enfin on trouvera de même que les équations $\mu^5 = \pm \mu + 1$, $\mu^5 = \mu^2 \pm \mu$, conduisent à des résultats impossibles.

Donc la première condition est satisfaite. Quant à la seconde on trouve également qu'elle l'est, à moins que θ ne soit diviseur de $16^8 \pm 1$ ou de $2^{32} \pm 1$. Or on sait (*Th. des N.*, art. 162) que le nombre $2^{32} - 1$ n'a d'autres diviseurs premiers $16n + 1$ que 17,257 et 65537 qui supposent..... $u = 1,16,4096$, valeurs exclues; on sait également par l'art. 157, que le nombre $2^{32} + 1$ n'a que les diviseurs premiers 641 et 6700417, qui supposent $n = 40$ et $n = 418776$, or ceux-ci ne sont pas des nombres prémiers. Donc il n'y a aucune exception et les deux conditions seront toujours remplies lorsqu'on aura $\theta = 16n + 1$.

28. On peut vérifier de la même manière que les deux conditions sont encore remplies pour les cas de $\theta = 10n + 1$, et $\theta = 14n + 1$. Dans le dernier cas la seconde condition ne souffrirait d'exception que pour les diviseurs premiers $14n + 1$ de $14^7 \pm 1$. Or $14^7 + 1$ est le produit de 15 par le nombre 7027567 qui est premier, mais pour lequel on aurait.. $n = 501969$ qui n'est pas premier; et $14^7 - 1$ est le produit de 13 par 8108731 qui est un nombre premier $14n + 1$, mais pour lequel n n'est pas premier. Ainsi la proposition dé-

montrée par la table pour tous les nombres premiers n moindres que 100, s'étend généralement à tous les nombres premiers n tels que dans les six formules $2n+1$, $4n+1$, $10n+1$, $14n+1$, $16n+1$, il y ait au moins un nombre premier, ce qui permet d'étendre immédiatement la table jusqu'à $n=197$ qui dépend du nombre premier $\theta=38n+1=7487$.

29. Dans le cas de $n=5$, ces six formules donnent les trois nombres premiers 11, 41, 71, qui remplissent par conséquent les conditions exigées dans la table; la formule $\theta=10k+1$ donne encore le nombre 101 qui satisfait aux deux mêmes conditions. Mais depuis 101 jusqu'à 1000 on ne trouve aucun nombre $10k+1$, ou plutôt $30k'+11$ (car $30k'+1$ est exclu par le n° 23), qui ne satisfasse à l'équation $r'=r+1$, ce qui doit faire présumer que 101 est le dernier des nombres qui remplissent les deux conditions de la table. Nous ne connaissons donc que les quatre nombres 11, 41, 71, 101 qui divisent nécessairement xyz dans l'équation $x^5+y^5+z^5=0$. Voici les résidus cinquièmes qui répondent à ces quatre valeurs de θ.

θ.	Résidus cinquièmes.
11	± 1,
41	$\pm(1, 3, 9, 14)$,
71	$\pm(1, 20, 23, 26, 30, 32, 34)$,
101	$\pm(1, 6, 10, 14, 17, 32, 36, 39, 41, 44)$.

D'où l'on voit que, non-seulement l'équation $r'=r+1$ n'est pas satisfaite, mais que 5 n'est pas compris parmi les rési-

dus. Cette dernière circonstance permet de démontrer que les trois nombres 11, 71, 101 divisent la même indéterminée x déja divisible par 5^2, et de plus que cette propriété n'appartient qu'au plus petit a des deux facteurs a, α, dont la valeur de x est composée. Voici les moyens de parvenir à cette démonstration, d'où l'on déduira quelques conséquences importantes pour les autres cas du théorème de Fermat.

30. Reprenons pour cet effet les équations de l'art. 8, savoir :

$$y+z=\frac{1}{n}a^n,\ x=-a\alpha=\frac{1}{2}\left(b^n+c^n-\frac{1}{n}a^n\right),\ \varphi(y,z)=n\alpha^n,$$

$$z+x=b^n,\ \ y=-b\beta=\frac{1}{2}\left(c^n+\frac{1}{n}a^n-b^n\right),\ \varphi(z,x)=\beta^n,$$

$$x+y=c^n,\ \ z=-c\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}a^n+b^n-c^n\right),\ \varphi(x,y)=\gamma^n,$$

et supposons que le nombre θ de la forme $2kn+1$ réunit les deux conditions exigées dans l'art. 21. On peut prouver en général que θ n'est point diviseur de b; car supposons, s'il est possible, que θ divise b, il divisera en même temps y et, en supprimant les multiples de b, on aura $b=0$ et $y=0$. De là on déduit $z=\frac{1}{n}a^n, x=c^n, z+x=0$, donc.... $\frac{1}{n}a^n+c^n=0$. Représentons par μ^i et μ^e, les résidus des puissances a^n et c^n, divisées par θ, nous aurons $\mu^i+n\mu^e=0$, ou $n=-\mu^{i-e}$; donc n serait un des résidus r compris dans la suite $\pm(1, \mu, \mu^2 \ldots \mu^{k-1})$, ce qui est contre la supposition. On prouvera de même que θ ne divise point c; donc θ ne divise point bc.

31. En second lieu, supposons que θ divise l'un des nom-

bres désignés par α, β, γ, puisque $\alpha\beta\gamma$ n'a aucun diviseur commun avec $nabc$, il faudra que θ ne divise aucun des nombres a, b, c; cependant comme il doit être diviseur de l'un des nombres x, y, z, on voit par les valeurs de ces nombres données ci-dessus, que l'une des quantités

$$b^n + c^n - \frac{1}{n}a^n, c^n + \frac{1}{n}a^n - b^n, \frac{1}{n}a^n + b^n - c^n,$$

doit être zéro, en rejetant les multiples de θ; et comme dans le même cas $\frac{1}{n} = -2k$, cette condition exige que parmi les résidus r, r', r'', etc., il y en ait deux r et r' qui satisfassent à l'équation $r' - r = 2k$. C'est ce qu'on vérifiera aisément en ajoutant $2k$ à tous les termes de la suite $\pm(1, \mu, \mu^2 \ldots \mu^{k-1})$, et voyant si la seconde suite ainsi formée a un ou plusieurs termes communs avec la première suite. Si elle n'en a point, l'équation $r' - r = 2k$ est impossible, donc θ ne saurait diviser $\alpha\beta\gamma$, et puisque d'ailleurs il ne divise pas bc, il divisera nécessairement le facteur a, l'un des deux dont x est composé.

Cette vérification, si elle réussit, dispensera des deux suivantes.

32. En général on peut par deux opérations assez simples déterminer si θ peut être diviseur de $\beta\gamma$ et s'il peut l'être de α.

Supposons 1° que θ divise β, alors en omettant les multiples de θ, on aura

$$\beta = 0, y = 0, z = \frac{1}{n}a^n = -2ka^n, x = c^n, z + x = b^n, \varphi(z, x) = 0.$$

Et d'abord pour résoudre cette dernière équation il faut

remonter à la valeur de la fonction

$$\varphi(z, x) = \frac{z^n + x^n}{z + x};$$

ainsi il faudra résoudre l'équation $x^n + z^n = 0$, c'est-à-dire $=$ un multiple de θ, et omettre la racine $x + z = 0$. Or on sait (*Th. des N.* art. 337) que la solution générale de cette équation est donnée par la formule $x = -z.\rho^m, \rho^m$ étant une puissance quelconque du nombre ρ qui satisfait à l'équation $\rho^n - 1 = 0$, c'est-à-dire $\rho^n - 1 =$ à un multiple de θ.

Cela posé, si on exclut la valeur $x = -z$, les $n - 1$ racines de l'équation $\varphi(x, z) = 0$, seront, en omettant toujours les multiples de θ, $x = -z(\rho, \rho^2, \rho^3 .. \rho^{n-1})$, et parce que $x = c^n$ et $z = -2ka^n$, on aura les $n - 1$ valeurs

$$c^n = a^n (2k\rho,\ 2k\rho^2,\ 2k\rho^3 .. 2k\rho^{n-1}).$$

Dans cette équation $\frac{c^n}{a^n}$ peut être considéré comme un résidu $n^{ième}$, donc il faudra que dans la suite

$$B = 2k\rho,\ 2k\rho^n,\ 2k\rho^2 .. 2k\rho^{n-1},$$

il se trouve un ou plusieurs termes communs avec la suite des résidus $M = \pm(1, \mu, \mu^2, \mu^3 .. \mu^{k-1})$.

S'il ne se trouvait aucun terme commun entre ces deux suites, on en conclurait que θ n'est point diviseur de β, ni par conséquent de γ, car l'épreuve est la même pour l'un et pour l'autre.

S'il y a un ou plusieurs termes communs entre ces deux suites, il faudra encore qu'ils satisfassent à la condition $z + x = b^n$; et parce que $\frac{b^n}{a^n}$ doit encore être un résidu $n^{ième}$, il faudra

que dans la suite

$$B'=2k(\rho-1),\ 2k(\rho^2-1),\ 2k(\rho^3-1)\ldots\ 2k(\rho^{n-1}-1),$$

il y ait encore un ou plusieurs termes qui appartiennent à la suite M; mais il faut de plus que les termes des suites B et B′ communs avec M, soient placés au même rang, c'est-à-dire que le terme $2k\rho^i$ de la suite B et le terme correspondant $2k\rho^i-2k$ de la suite B′, soient compris l'un et l'autre dans la suite M des résidus $n^{\text{ièmes}}$. Si cette double condition n'est pas remplie, on en conclura que θ n'est point diviseur de 6γ.

33. Supposons 2° que θ est diviseur de α, on trouvera semblablement que dans les deux suites

$$A=\rho,\ \rho^2,\ \rho^3\ldots\rho^{n-1},$$
$$A'=n(\rho-1),\ n(\rho^2-1),\ n(\rho^3-1)\ldots n(\rho^{n-1}-1),$$

il devra se trouver deux termes correspondans $\rho^i, n(\rho^i-1)$, qui soient compris l'un et l'autre dans la suite M.

Mais cette épreuve ne sera nécessaire que lorsque θ sera de la forme $2hn^2+1$; car on sait *a priori* (art. 10) que si le nombre premier θ est simplement de la forme $2kn+1$, dans laquelle k n'est point divisible par n, ce nombre ne peut être diviseur de α.

Au moyen de ces deux épreuves on décidera aisément dans chaque cas particulier, si θ peut-être diviseur de 6γ ou de α; s'il ne divise ni l'un ni l'autre, on sera assuré qu'il doit être diviseur de a.

34. Soit par exemple $n=5$, nous aurons à examiner suc-

cessivement les quatre diviseurs $\theta=11, 41, 71, 101$, dont nous avons donné les résidus 5^{ièmes}, art. 29.

Soit 1°. $\theta=11$, on aura $2k=2$, et $M=\pm 1$. L'équation $\rho^5-1=0$, où l'on néglige les multiples de 11, a pour une de ses racines $\rho=5$, ce qui donne les autres $\rho^2=3$, $\rho^3=4$, $\rho^4=-2$; d'après ces valeurs voici les quatre suites A, A', B, B', où nous conservons l'ordre des puissances de ρ :

$$A=+5,+3,+4,-2,\qquad B=-1,-5,-3,-4,$$
$$A'=-2,-1,+4,-4,\qquad B'=-3,+4,-5,+5.$$

On voit que B' n'a aucun terme commun avec $M=\pm 1$, et qu'il en est de même de A; donc 11 ne divise ni 6γ ni α, donc il divise le facteur de x désigné par a.

Soit 2°. $\theta=41$, on aura $2k=8$ et $M=\pm(1,3,9,14)$; on satisfait à l'équation $\rho^5-1=0$, c'est-à-dire à l'équation.. $\rho^5-1=\mathfrak{M}(41)$, par la valeur $\rho=-4$, de là ces quatre suites:

$$A=-4,+16,+18,+10,\qquad B=+9,+5,-20,-2,$$
$$A'=+16,-7,+3,+4,\qquad B'=+1,-3,+13,-10.$$

Les termes correspondans 9 et 1 pris dans B et dans B', sont compris dans la suite M; donc il n'y a pas d'impossibilité à ce que 41 divise 6γ.

Il était inutile dans ces deux premiers cas de former les séries A et A', parce que les nombres 11 et 41, ne sont pas de la forme $2hn^2+1$ ou $50h+1$; il en sera de même dans le cas suivant, mais elles deviendront nécessaires dans le cas 4ème, relativement au diviseur 101.

Soit 3°. $\theta=71$, on aura $2k=14$ et.................. $M=\pm(1,20,23,26,30,32,34)$; l'équation $\rho^5-1=0$ a pour

racine $\rho=5$, d'où résultent les valeurs suivantes :

$$B=-1,\ -5,\ -25,\ +17,$$
$$B'=-15,\ -19,\ +32,\ +3.$$

La suite B a le terme -1 et la suite B' le terme 32, communs avec M; mais ces deux termes ne sont pas placés au même rang dans les deux suites, donc 71 ne divise pas 6γ; il ne peut pas non plus diviser α, puisqu'il n'est pas de la forme $50h+1$; donc 71 est un diviseur de a.

Soit 4°. $\theta=101$, on aura $2k=20$, ... $M=\pm(1,6,10,14,17,32,36,39,41,44)$, et l'équation.... $\rho^5-1=0$, ayant pour racine $\rho=-6$, on en tire les valeurs suivantes :

$$A=-6,+36,-14,-17,\quad B=-19,+13,+23,-37,$$
$$A'=-35,-27,+26,+11,\quad B'=-39,-7,+3,+44,$$

La suite B n'a aucun terme commun avec M, donc 101 ne divise pas 6γ; il ne divise pas non plus α, parce que la suite A' n'a aucun terme commun avec M. Donc 101 est diviseur de a.

35. Il résulte de tout ce qui vient d'être démontré qu'on doit faire $a=5^2.11.71.101a'$, et par suite............... $y+z=\frac{1}{5}(5^2.11.71.101a')^5$; ainsi abstraction faite du facteur a' qui pourrait être plus grand que tous les autres, la valeur de $y+z$ a pour logarithme 30.775590; d'où l'on voit que l'une des indéterminées y et z serait un nombre composé de 31 chiffres au moins, si l'équation $x^5+y^5+z^5=0$ était possible. Alors le plus grand des trois termes de cette équation aurait au moins 153 chiffres, et le plus petit en aurait au moins 122.

36. Considérons maintenant le cas des septièmes puissances; si on cherche d'après l'art 25, les nombres premiers contenus dans les formules $2n+1$, $4n+1$, $8n+1$, $16n+1$, $10n+1$, $14n+1$, où $n=7$, on trouvera les trois nombres 29, 71, 113, qui doivent satisfaire aux deux conditions exigées n°. 21; voici les résidus septièmes de ces trois nombres :

θ	Résidus septièmes.
29	$\pm(1, 12)$,
71	$\pm(1, 5, 14, 17, 25)$,
113	$\pm(1, 15, 18, 35, 40, 42, 44, 48)$,

où l'on voit qu'en effet les résidus ne satisfont point à l'équation $r'=r+1$, et ne contiennent pas le nombre 7. Cela posé, on pourra démontrer que deux de ces nombres, savoir 29 et 71, ne peuvent diviser que le facteur a dans les formules de l'art. 8.

En effet, soit 1°. $\theta=29$, ce qui donne $2k=4$; comme dans ce cas les résidus 7^{ièmes} sont $\pm 1 \pm 12$, on voit que l'équation $r'=r+2k$ n'est pas satisfaite; car en ajoutant 4 à ces résidus, on aurait les quatre nombres $3, 5, -8, +16$, dont aucun n'est compris parmi les résidus. Donc suivant l'art. 31, il faut que 29 soit diviseur de a. Soit 2°. $\theta=71$, on aura $2k=10$, $M=\pm(1, 5, 14, 17, 25)$ et l'équation $\rho^7-1=0$, où l'on néglige les multiples de 71, aura pour racine $\rho=20$. De là résultent les valeurs de B et B' comme il suit :

$$B=-13, 24, -17, 15, 16, -35,$$
$$B'=-23, 14, -27, 5, 6, 26,$$

La première suite B contient le seul terme -17 commun avec la suite M, mais le terme correspondant -27 dans la suite B′ ne se trouve pas dans la suite M. Donc 71 ne divise pas 6γ.

Nous n'avons pas formé les suites A et A′, parce que 71 n'étant pas de la forme $2hn^2+1$, ou $98h+1$, on sait par l'art. 10 que 71 ne peut diviser α. Donc 71 est diviseur de a.

Soit 3°. $\theta=113$, on aura..............................
$2k=16$, $M=\pm(1,15,18,35,40,42,44,48)$, et l'équation $\rho^7=-1$ aura pour racine $\rho=-4$, ce qui donne

$$B=49,30,-7,28,\quad 1,-4,$$
$$B'=33,14,-23,12,-15,-20.$$

On voit que les deux nombres 1 et -15, situés au même rang dans les deux suites B et B′, sont compris dans la suite M. Donc 113 peut diviser 6γ, et ne doit pas être compris parmi les diviseurs de a.

Nous conclurons de là qu'on doit faire $a=49.29.71.a'$, ce qui donne $y+z=\frac{1}{7}(49.29.71\,a')^7$. Faisant abstraction du facteur a', on aura $\log.(y+z)=34.181864$; donc l'un des nombres y et z n'aura pas moins de 34 chiffres.

37. Dans l'équation du 11ème degré on trouvera semblablement que la même indéterminée x divisible par 11^2, doit l'être encore par 23 et par 89, ce qui donnera..........
$y+z=\frac{1}{11}(11^2.23.89a')^{11}$, et en faisant abstraction du facteur a', $\log.(y+z)=58.291540$. Donc l'un des nombres y et z aura au moins 58 chiffres, et l'équation $x^{11}+y^{11}+z^{11}=0$, ne pourra être vérifiée qu'avec des nombres dont le plus petit aurait au moins 585 chiffres.

Dans l'équation du $13^{\text{ème}}$ degré on trouvera immédiatement $y+z=\frac{1}{13}(13^2.53\,a')^{13}$, ce qui donne au moins 52 chiffres à l'un des nombres y et z, et 676 à l'une des puissances $13^{\text{èmes}}$ qui forment l'équation.

Dans l'équation du $17^{\text{ème}}$ degré on aura .... $y+z=\frac{1}{17}(17^2.137\,a')^{17}$, $\log.(y+z)=77.929074+17\log.a'$; donc l'une des indéterminées aurait au moins 78 chiffres.

Ces exemples suffisent pour donner une idée de la grandeur des nombres qui satisferaient à l'équation de Fermat, s'il y avait des cas où cette équation fût possible; ce qui est déja fort peu probable. Procédons maintenant à la démonstration de l'impossibilité dans le cas du $5^{\text{ème}}$ degré.

De l'Équation $x^5+y^5+z^5=0$.

38. Puisque l'une des indéterminées doit être divisible par 5, et même par 25, soit x cette indéterminée, on trouvera comme au n°. 8, que l'équation $y^5+z^5=-x^5$ se partage nécessairement en deux autres de cette manière :

$$y+z=5^4t^4,$$
$$y^4-y^3z+y^2z^2-yz^3+z^4=5r^5, \qquad (a)$$

ce qui suppose $x=-5tr$, r étant un nombre impair, positif et premier à $5t$.

Cela posé, il y a deux cas à distinguer selon que x sera pair ou impair.

Premier cas, où l'on suppose x pair.

39. Alors t est pair, y et z sont impairs et la seconde des équations (a) pourra se mettre sous la forme

$$5\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)^2-\left(\frac{y^2+2yz+z^2}{2}\right)^2=5r^5.$$

Divisant par 5 et mettant au lieu de $y^2+2yz+z^2$ sa valeur 5^8t^{10}, on aura

$$\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)^2-5\left(\frac{5^7t^{10}}{2}\right)^2=r^5.$$

Dans notre hypothèse, les nombres $\frac{1}{2}(y^2+z^2)$ et $\frac{1}{2}.5^7t^{10}$ sont des entiers ; d'ailleurs puisque le premier membre est de la forme p^2-5q^2, son diviseur r devra être de la même forme, de sorte qu'on pourra supposer $r=f^2-5g^2$, puis faisant $(f+g\sqrt{5})^5=\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{5}$, ce qui donne

$$\mathrm{F}=f(f^4+50f^2g^2+125g^4),$$
$$\mathrm{G}=5g(f^4+10f^2g^2+5g^4),$$

on aura $r^5=\mathrm{F}^2-5\mathrm{G}^2$, et par conséquent

$$\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)^2-5\left(\frac{5^7t^{10}}{2}\right)=\mathrm{F}^2-5\mathrm{G}^2.$$

Pour avoir une solution générale de cette équation, il faut prendre deux nombres m et n, tels qu'on ait............ $(9\pm4\sqrt{5})^k=m+n\sqrt{5}$, k étant un entier quelconque, ces nombres satisferont en général à l'équation $m^2-5n^2=1$, et on pourra supposer

$$\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{5^7t^{10}}{2}\sqrt{5}=(\mathrm{F}+\mathrm{G}\sqrt{5})(m+n\sqrt{5}),$$

ce qui donnera

$$\tfrac{1}{2}(y^2+z^2)=m\mathrm{F}+5n\mathrm{G},$$
$$\tfrac{1}{2}.5^7t^{10}=m\mathrm{G}+n\mathrm{F}.$$

40. Ces formules contiennent une infinité de solutions, puisqu'on peut prendre pour k un entier quelconque; mais ces solutions en nombre infini, ne sont susceptibles que de cinq formes différentes.

En effet, quel que soit l'exposant k, il sera toujours de l'une des cinq formes $5i, 5i\pm 1, 5i\pm 2$. Mais j'observe que la partie indéterminée $5i$ peut être supprimée comme étant comprise dans l'expression de r^5. Car on peut faire....... $(f+g\sqrt{5})(9\pm 3\sqrt{5})^i = f'+g'\sqrt{5}$, et on aura de nouveau $r=f'^2-5g'^2$, de sorte qu'il suffira de mettre f' et g' à la place de f et g dans les valeurs de F et G. Il ne reste donc à considérer que les cinq valeurs $k=0, \pm 1, \pm 2$, auxquelles répondent les valeurs de m et n, comme il suit :

$$m=1, \quad 9, \quad 161,$$
$$n=0, \pm 4, \pm 72,$$

41. Nous observerons encore que dans l'équation...... $\frac{1}{2}.5^7t^{10}=mG+nF$, où G est toujours divisible par 5, le terme nF ne peut être divisible par 5 qu'autant que n le sera : car r étant premier à $5t$, et sa valeur étant f^2-5g^2, f ne peut être divisible par 5, ni par conséquent F. Donc des cinq valeurs de n on ne peut admettre que la valeur $n=0$ qui répond à $m=1$, ce qui donnera pour seule solution admissible

$$\tfrac{1}{2}.5^7t^{10}=G=5g(f^4+10f^2g^2+5g^4),$$

ou

$$\tfrac{1}{2}.5^6t^{10}=g(f^4+10f^2g^2+5g^4).$$

Dans cette équation, les deux facteurs du second membre sont premiers entre eux, et il faut supposer g pair; car si g

était impair, f devrait être pair, et le second membre de notre équation serait impair, tandis que le premier est divisible par 2^9, puisque t est pair. On en conclura que l'équation précédente ne peut se partager en deux autres que de la manière suivante qui suppose $t=2ur'$,

$$g=5^6.2^9u^{10},$$
$$f^4+10f^2g^2+5g^4=r'^{10}.$$

Dans la seconde équation, le premier membre peut se mettre sous la forme $(f^2+5g^2)^2-5(2g^2)^2$; donc son diviseur r' doit être de la forme p^2-5q^2; il en est de même de r'^2, et on pourra par conséquent faire $r'^2=f'^2-5g'^2$, ce qui donnera $r'^{10}=F'^2-5G'^2$, F' et G' étant des fonctions semblables à F et G; on aura donc l'équation

$$(f^2+5g^2)^2-5(2g^2)^2=F'^2-5G'^2,$$

dans laquelle $2g^2=5^{12}.2^{19}u^{20}$, et on trouvera comme ci-dessus que la seule solution admissible est

$$5^{11}.2^{19}u^{20}=g'(f'^4+10f'^2g'^2+5g'^4).$$

Faisant encore $u=u'r''$, r'' étant premier à $10u'$, cette équation ne pourra se partager en deux autres que de cette manière

$$g'=5^{11}.2^{19}u'^{20},$$
$$f'^4+10f'^2g'^2+5g'^4=(r'')^{10}.$$

42. Nous retombons ainsi sur des équations qui sont toujours de même forme et dont la série peut se continuer à l'infini.

Or ayant fait successivement $x=-5tr$, $t=2ur'$, $u=u'r''$,

$u'=u''r'''$, etc., il s'ensuit que $t=2ur'=2u'r'r''=2u''r'r''r'''$, etc.; de sorte que le nombre des facteurs r augmente continuellement dans l'expression de t. Chacun de ces facteurs déterminé par une équation de la forme................. $r^{10m}=f^4+10f^2g^2+5g^4$, où f et g sont des nombres toujours croissans, puisqu'on a $g'=\frac{1}{5}(2g^2)^2, f'^2>5g'^2$, est certainement plus grand que 1, et ne peut comme nombre entier, être moindre que 2. Donc en supposant même que la suite u, u', u'', etc., eût pour limite 1, la valeur de t composée d'un nombre indéfini de facteurs 2, r', r'', r''', etc., qui ne peuvent être moindres que 2, surpassera bientôt toute quantité donnée, ce qui ne peut s'accorder avec la supposition faite que les valeurs primitives de x, y, z, sont données en nombres finis. Donc l'équation proposée est impossible, dans le premier cas où l'on suppose que l'une des indéterminées est divisible à la fois par 2 et par 5 (1).

Second cas, où l'on suppose x impair.

43. Alors les deux indéterminées y et z seront l'une paire, l'autre impaire, et la seconde des équations (a) pourra se mettre sous la forme

$$(y^2-\tfrac{1}{2}yz+z^2)^2-5(\tfrac{1}{2}yz)^2=5r^5,$$

(1) Par une analyse semblable à celle dont nous venons de faire usage, on pourrait démontrer l'impossibilité de l'équation $x^5+y^5=Az^5$, pour un assez grand nombre de valeurs de A; c'est ce qu'a fait M. Lejeune Dieterich, dans un Mémoire présenté récemment à l'Académie, et qui a obtenu son approbation.

5.

où l'on voit que $\frac{1}{2}yz$ sera toujours un nombre entier, et que $y^2 - \frac{1}{2}yz + z^2$ doit être divisible par 5, en effet on a...... $y^2 - \frac{1}{2}yz + z^2 = (y+z)^2 - 5(\frac{1}{2}yz) = 5^8 t^{10} - 5(\frac{1}{2}yz)$. L'équation précédente peut donc s'écrire ainsi :

$$(\tfrac{1}{2}yz)^2 - 5\left(\frac{y^2 - \frac{1}{2}yz + z^2}{5}\right)^2 = -r^5,$$

et puisque le nombre impair r est diviseur d'un nombre de la forme $p^2 - 5q^2$, où p et q sont premiers entre eux, il sera lui-même de cette forme; il en est de même de $-r$; car on sait que tout nombre de la forme $p^2 - 5q^2$ est en même temps de la forme $5a^2 - b^2$; nous pouvons donc supposer $-r = f^2 - 5g^2$, et faisant comme ci-dessus $(f + g\sqrt{5})^5 = F + G\sqrt{5}$, nous aurons $-r^5 = F^2 - 5G^2$, et l'équation à résoudre sera

$$(\tfrac{1}{2}yz)^2 - 5\left(\frac{y^2 - \frac{1}{2}yz + z^2}{5}\right)^2 = F^2 - 5G^2.$$

Supposant de nouveau $m + n\sqrt{5} = (9 \pm 4\sqrt{5})^k$, la résolution générale de cette équation s'obtiendra en faisant

$$\tfrac{1}{2}yz + \frac{y^2 - \frac{1}{2}yz + z^2}{5}\sqrt{5} = (F + G\sqrt{5})(m + n\sqrt{5}),$$

ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}yz = mF + 5nG,$$
$$\tfrac{1}{5}(y^2 - \tfrac{1}{2}yz + z^2) = mG + nF.$$

On tire de ces deux équations $\frac{1}{5}(y+z)^2 = (m+n)F + (m+5n)G$, ou

$$5^7 t^{10} = (m+n)F + (m+5n)G.$$

44. Puisque G est toujours divisible par 5 et que F ne

l'est pas, cette équation ne peut subsister à moins que $m+n$ ne soit divisible par 5. Or d'après les cinq valeurs de m et n rapportées ci-dessus, on trouve que cette condition ne peut être remplie qu'en supposant $m=9$, $n=-4$, ce qui donnera

$$5^7 t^{10} = 5F - 11G,$$

ou en divisant par 5 et substituant les valeurs de F et de G,

$$5^6 t^{10} = f^4(f-11g) + 10f^2g^2(5f-11g) + 5g^4(25f-11g).$$

On voit par cette équation que $f-g$ doit être divisible par 5; soit donc $f=g+h$, h étant un nombre divisible par 5, et on aura $f+g\sqrt{5}=h+g(2+\sqrt{5})$, de sorte qu'on pourra faire directement

$$\begin{aligned} F+G\sqrt{5} &= [h+g(1+\sqrt{5})]^5 \\ &= h^5 + 5h^4g(1+\sqrt{5}) + 28h^3g^2(3+\sqrt{5}) \\ &\quad + 80h^2g^3(2+\sqrt{5}) + 40hg^4(7+3\sqrt{5}) \\ &\quad + 16g^5(11+5\sqrt{5}). \end{aligned}$$

On déduit de là les valeurs séparées de F et de G, mais comme nous n'avons besoin que de la quantité $F-\frac{11}{5}G$, nous pourrons, dans cette équation, mettre $-\frac{11}{5}$ à la place de $\sqrt{5}$, ce qui donnera

$$F-\tfrac{11}{5}G = h(h^4-6h^3g+16h^2g^2-16hg^3+16g^4),$$

et par conséquent

$$5^6 t^{10} = h(h^4-6h^3g+16h^2g^2-16hg^3+16g^4).$$

45. Sachant déja que h est divisible par 5 et que g ne l'est pas, observant de plus que h doit être impair, et qu'ainsi les deux facteurs du second membre sont premiers entre

eux, la seule manière de satisfaire à cette équation est de la partager en deux autres, comme il suit :

$$h = 5^6 u^{10},$$
$$h^4 - 6h^3 g + 16h^2 g^2 - 16hg^3 + 16g^4 = r'^{10},$$

ce qui suppose $t = ur'$, r' étant premier $5u$.

La seconde équation peut se mettre sous la forme

$$r'^{10} = (h^2 - 3gh + 6g^2)^2 - 5(gh - 2g^2)^2,$$

d'où l'on voit que r' doit être de la forme $p^2 - 5q^2$; il en est de même de r'^2 ; on pourra donc faire $r'^2 = f'^2 - 5g'^2$, ce qui donnera $r'^{10} = F'^2 - 5G'^2$, et on satisfera généralement à l'équation précédente en faisant

$$h^2 - 3gh + 6g^2 = mF' + 5nG',$$
$$gh - 2g^2 = nF' + mG',$$

ce qui donne enfin h^2 ou

$$5^{12} u^{20} = (m + 3n)F' + (3m + 5n)G'.$$

Puisque G' est divisible par 5 et que F' ne l'est pas, cette équation ne peut subsister à moins que $m + 3n$ ne soit divisible par 5. Les seules valeurs de m et n à prendre pour cela, sont $m = 161$, $n = -72$, ce qui donnera, en divisant par 5,

$$5^{11} u^{20} = \tfrac{123}{5} G' - 11F',$$

ou en substituant les valeurs de F' et G',

$$5^{11} u^{20} = f'^4(123g' - 11f') + 10f'^2 g'^2 (123g' - 55f') + 5g'^4(123g' - 275f').$$

46. Cette équation fait voir que $3g' - f'$ est divisible par

5; soit donc $f''=3g'-h'$, on aura

$$F'+G'\sqrt{5}=[-h'+g'(3+\sqrt{5})]^5,$$

ou en faisant le développement :

$$F'+G'\sqrt{5}=-h'^5+5h'^4g'(3+\sqrt{5})-20h'^3g'^2(7+3\sqrt{5})$$
$$+80h'^2g'^3(9+4\sqrt{5})-40h'g'^4(47+21\sqrt{5})$$
$$+16g'^5(123+55\sqrt{5}).$$

Multipliant tout par -11 et mettant au lieu de $11\sqrt{5}$ la valeur fictive $-\frac{123}{5}$, on aura $\frac{123}{5}G'-11F'$, ou

$$5^{11}u^{20}=h'(11h'^4-42h'^3g'+64h'^2g'^2-48h'g'^3+16g'^4).$$

Maintenant h' étant divisible par 5 et g' ne l'étant pas, cette équation ne peut se partager en deux autres que de cette manière

$$h'=5^{11}u'^{20}$$
$$11h'^4-42h'^3g'+64h'^2g'^2-48h'g'^3+16g'^4=r''^{20},$$

ce qui suppose $u=u'r''$ et r'' premier à $5u'$.

Cette dernière équation peut être mise sous la forme

$$4r''^{20}=(8g'^2-12g'h'+7h'^2)^2-5h'^4,$$

d'où il suit que r'' doit être de la forme p^2-5q^2; il en est de même de r''^4, on peut donc faire $r''^4=f''^2-5g''^2$, ce qui donnera $r''^{20}=F''^2-5G''^2$. Soit maintenant $4=\mu^2-5\nu^2$, μ et ν étant des nombres impairs, on pourra supposer

$$8g'^2-12g'h'+7h'^2+h'^2\sqrt{5}=(F''+G''\sqrt{5})(\mu+\nu\sqrt{5}),$$

ce qui donnera

$$h'^2=\mu G''+\nu F''.$$

Mais puisque h' et G″ sont divisibles par 5 et que F″ ne l'est pas, cette équation ne peut subsister à moins que ν ne soit divisible par 5. Et comme on a en général $\mu+\nu\sqrt{5} = (3+\sqrt{5})(m+n\sqrt{5})$, ce qui donne $\mu=3m+5n$, $\nu=m+3n$, on ne pourra admettre que les valeurs $m=161$, $n=-72$, d'où résultent $\mu=123$, $\nu=-55$, de sorte qu'on aura h'^2 ou

$$5^{22}u''^{40}=123\,G''-55\,F''.$$

47. Nous retombons ainsi sur une équation semblable à l'équation déjà considérée $5^{11}u^{20}=123\,G'-55\,F'$; d'où il suit que les mêmes transformations pourront être continuées à l'infini, ce qui supposerait infinies les valeurs primitives des indéterminées.

Car ayant fait successivement $x=-5tr$, $t=ur'$, $u=u'r''$, $u'=u''r'''$, etc., on aura $t=ur'=u'r'r''=u''r'r''r'''$, etc., de sorte que le nombre des facteurs r augmente continuellement dans l'expression de t. Ces facteurs sont déterminés par des équations qu'on peut réduire à la même forme, savoir $r'^{10}=r^2+5rh^2+5h^4$, $r''^{20}=r'^4+5r'^2h^2+5h'^4$, etc., d'ailleurs on a $h=5^6u^{10}$, $h'=5^{11}u'^{20}$, $h''=5^{21}u''^{40}$, etc., de sorte que la suite h, h', h'', etc., est rapidement croissante, même en supposant que les nombres u, u', u'', etc., aient l'unité pour limite. Donc les nombres r, r', r'', etc., toujours plus grands que 1, ne pourront être moindres que 2, ce qui rendra infinie la valeur de t. Donc l'équation $x^5+y^5+z^5=0$ n'admet aucune solution en nombres entiers.

48. Il est maintenant démontré que l'équation.........
$x^n+y^n+z^n=0$, ne peut avoir lieu toutes les fois que n, qui est supposé impair, sera un multiple de 3 ou de 5. Quant aux autres cas du théorème de Fermat, ils ne semblent pas

pouvoir être démontrés par les méthodes employées pour le 3ème et le 5ème degré; nous savons seulement que la solution, s'il y en avait une, ne pourrait être donnée que par des nombres d'une grandeur excessive.

Nouvelle démonstration du théorème de Fermat dans le cas du troisième degré.

49. Nous supposerons qu'il existe trois nombres entiers x, y, z, positifs ou négatifs, qui satisfont à l'équation... $x^3+y^3+z^3=0$, avec la condition que ces trois nombres soient premiers entre eux, deux étant impairs et le troisième pair; nous verrons quelles conséquences résultent de cette supposition. Notre démonstration sera divisée en trois parties.

Ire. *L'un des nombres* x, y, z, *doit être divisible par* 3.

En effet, tout nombre non-divisible par 3, positif ou négatif, est de la forme $3m\pm1$, et son cube $27m^3\pm27m^2+9m\pm1$ est de la forme $9n\pm1$. Si donc aucun des nombres x, y, z, n'était divisible par 3, la somme de leurs cubes $x^3+y^3+z^3$ devrait être de l'une des quatre formes $9n\pm1$, $9n\pm3$ et ne pourrait par conséquent se réduire à zéro. Donc l'un des nombres x, y, z, est nécessairement divisible par 3.

IIe. *Celle des indéterminées qui est paire, est en même temps divisible par* 3.

Désignons par z l'indéterminée divisible par 2, et soit $z=-2^m u$, u étant un nombre impair, de sorte qu'on ait l'équation

$$x^3+y^3=2^{3m}u^3;$$

je dis que u devra être divisible par 3.

En effet supposons, s'il est possible, que u ne soit pas divisible par 3; le premier membre x^3+y^3 est le produit de deux facteurs $x+y$ et x^2-xy+y^2 qui ne peuvent avoir que trois pour commun diviseur (art. 7); et puisque 3 ne divise pas le second membre $2^{3m}u^3$, il s'ensuit que ces deux facteurs sont premiers entre eux. Leur produit doit être un cube, il faut donc que chacun d'eux soit un cube; si l'on observe d'ailleurs que x^2-xy+y^2 est toujours un nombre impair, on en conclura que 2^{3m} doit être facteur de $x+y$; ainsi on devra faire

$$x+y=2^{3m}\alpha^3$$
$$x^2-xy+y^2=\beta^3,$$

ce qui suppose $u=\alpha\beta$, β étant positif et premier à α.

Maintenant si l'on met la seconde équation sous cette forme

$$\beta^3=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

on voit que le second membre étant de la forme p^2+3q^2; son diviseur β, qui est un nombre impair, devra être de la même forme. Faisant donc $\beta=f^2+3g^2$, ensuite......... $(f+g\sqrt{-3})^3=F+G\sqrt{-3}$, ce qui donne

$$F=f(f^2-9g^2)$$
$$G=3g(f^2-g^2),$$

on aura $\beta^3=F^2+3G^2$; de sorte qu'on satisfera généralement à l'équation précédente en faisant

$$\frac{x+y}{2}=F,\ \frac{x-y}{2}=G,$$

ce qui donnera

$$x = f^3 + 3f^2g - 9fg^2 - 3g^3$$
$$y = f^3 - 3f^2g - 9fg^2 + 3g^3.$$

Or z étant supposé non-divisible par 3, il faudra que l'un des nombres x, y, soit divisible, ce qui exige que f soit aussi divisible par 3. Mais alors les deux nombres x et y seraient divisibles par 3, ainsi que le troisième z, ce qui est contre la supposition.

Donc l'indéterminée z divisible par 2 doit l'être aussi par 3, et on doit faire en général $z = -2^m 3^n u$, u étant premier au nombre 6; de sorte que l'équation proposée sera toujours de la forme $x^3 + y^3 = 2^{3m} 3^{3n} u^3$.

IIIe. *L'équation* $x^3 + y^3 = 2^{3m} 3^{3n} u^3$ *est impossible.*

Car supposons pour un moment qu'elle puisse être satisfaite, sans que l'une des indéterminées soit zéro, les deux facteurs du premier membre, savoir $x - y$ et $x^2 - xy + y^2$, ont pour commun diviseur 3 et non une puissance plus élevée de 3, comme il a été démontré art. 6; d'ailleurs le second facteur est impair; ainsi l'équation dont il s'agit se partagera nécessairement en deux autres comme il suit :

$$x + y = 2^{3m} 3^{3n-1} \alpha^3$$
$$x^2 - xy + y^2 = 3\beta^3,$$

et on aura en même temps $u = \alpha\beta$.

La seconde de ces équations peut être mise sous la forme :

$$\beta^3 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2,$$

d'où il suit que β est encore de la forme $p^2 + 3q^2$. Faisant

6.

donc comme ci-dessus $6=f^2+3g^2$ et $6^3=F^2+3G^2$, on aura l'équation $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2=F^2+3G^2$, à laquelle on satisfait généralement en prenant $\frac{x-y}{2}=F$, $\frac{x+y}{6}=G$. Cette dernière donne, en faisant les substitutions,

$$2^{3m-1}3^{3n-3}\alpha^3=g(f^2-g^2).$$

Dans cette équation où f^2-g^2 est impair, puisque f^2+3g^2 l'est, il faut que g soit divisible par 2^{3m-1}; soit donc...... $g=2^{3m-1}A$, $f+g=B$, $f-g=C$, on aura $(3^{n-1}\alpha)^3=ABC$. Maintenant puisque le produit ABC est un cube et que les facteurs A, B, C sont premiers entre eux, il faut que chacun de ces facteurs soit un cube; ainsi on devra faire $A=\lambda^3$, $B=\mu^3$, $C=\nu^3$, ce qui donnera $f+g=\mu^3$, $f-g=\nu^3$, $g=2^{3m-1}\lambda^3$, et en même temps $\lambda\mu\nu=3^{n-1}\alpha$. On tire de là l'équation.. $\mu^3-\nu^3=2g=2^{3m}\lambda^3$, semblable à la proposée, où il faut observer que l'un des trois nombres λ, μ, ν, doit contenir le facteur 3^{n-1}. Or, d'après ce qui a été démontré dans la seconde partie, le terme $2^m\lambda$ déja divisible par 2, est nécessairement aussi divisible par 3; donc il faut faire $\lambda=3^{n-1}\theta$, ce qui donnera

$$\mu^3-\nu^3=(2^m3^{n-1}\theta)^3.$$

Ainsi de l'équation $x^3+y^3=(2^m3^nu)^3$, où l'une des indéterminées est divisible par 3^n, on déduit une équation semblable où l'indéterminée correspondante est divisible par 3^{n-1}. Continuant donc ces transformations autant de fois qu'il y a d'unités dans n, on parviendra à une dernière transformée $x'^3+y'^3=z'^3$ dans laquelle aucun des nombres x', y', z' ne serait divisible par 3. Cette équation est impossible en vertu

de la première partie ; donc l'équation proposée $x^3+y^3+z^3=0$ est pareillement impossible.

De l'équation $x^3+y^3=2^m z^3$.

50. Dans cette équation où nous supposons $m=$ ou >1, les nombres x et y doivent être impairs, et on peut supposer que z l'est aussi ; d'ailleurs le premier membre est le produit des deux facteurs $x+y, x^2-xy+y^2$, qui ne peuvent avoir que 3 pour diviseur commun. Ainsi il faudra distinguer deux cas, selon que z est ou n'est pas divisible par 3.

Soit 1°. z divisible par 3, l'équation proposée se divisera nécessairement en deux autres comme il suit :

$$x+y=2^m 3^2 a^3,$$
$$x^2-xy+y^2=3r^3,$$

et l'on aura $z=3ar$, r étant premier à $3a$.

La seconde de ces équations peut se mettre sous la forme $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=3r^3$, ou $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2=r^3$; d'où l'on voit que r, qui est toujours un nombre impair, doit être de la forme f^2+3g^2. Faisant donc $r=f^2+3g^2$, puis $(f+g\sqrt{-3})^3=F+G\sqrt{-3}$, on aura $r^3=F^2+3G^2$, et de l'équation précédente on déduira $\frac{x-y}{2}=F, \frac{x+y}{6}=G$. Mais on a $G=3g(f^2-g^2)$; donc

$$g(f^2-g^2)=\frac{x+y}{18}=2^{m-1}a^3.$$

Dans cette équation g doit être divisible par 2^{m-}, car f^2-g^2 est nécessairement un nombre impair, puisque f^2+3g^2 en

est un; d'ailleurs les trois facteurs $g, f+g, f-g$, n'ayant aucun diviseur commun, l'équation précédente se décomposera en trois autres, savoir $g=2^{m-1}\alpha^3$, $f+g=\beta^3$, $f-g=\gamma^3$, d'où résulte $\beta^3-\gamma^3=2^m\alpha^3$, équation semblable à la proposée et composée de nombres beaucoup plus petits.

Soit 2°. z non divisible par 3, alors l'équation proposée se décomposera en ces deux-ci :

$$x+y=2^m a^3,$$
$$x^2-xy+y^2=r^3,$$

lesquelles supposent $z=ar$, et r premier à a.

La dernière étant mise sous la forme.................. $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=r^3$, on voit que r devra être de la forme f^2+3g^2; c'est pourquoi faisant, comme dans le premier cas, $r=f^2+3g^2$, $(f+g\sqrt{-3})^3=F+G\sqrt{-3}$, on aura....... $r^3=F^2+3G^2$; ce qui donnera la solution $\frac{x+y}{2}=F$, $\frac{x-y}{2}=G$. Mais on a $F=f(f^2-9g^2)$; donc $2^{m-1}a^3=f(f^2-9g^2)$. Les trois facteurs du second membre $f, f+3g, f-3g$, étant premiers entre eux et f^2-9g^2 étant toujours impair, cette équation ne peut subsister à moins qu'on n'ait $f=2^{m-1}\alpha^3$, $f+3g=\beta^3$, $f-3g=\gamma^3$, ce qui suppose $a=\alpha\beta\gamma$, les trois nombres α, β, γ étant premiers entre eux. De là résulte... $\beta^3+\gamma^3=2^m\alpha^3$, équation entièrement semblable à la proposée, et dans laquelle α sera, ainsi que a, non divisible par 3.

Puisque dans les deux cas l'équation proposée se réduit à une équation composée de nombres beaucoup plus petits; il s'ensuit que cette équation est impossible, excepté dans le seul cas $x+y=0$.

Nous avions déja démontré dans la Théorie des nombres le cas de $m=3i$ et celui de $m=1+3i$, i étant un nombre entier; la démonstration précédente qui s'applique à ces deux cas, comprend en outre le cas de $m=2+3i$.

De l'équation $x^3+y^3=Az^3$.

51. Il résulte de la démonstration précédente que cette équation est impossible pour les valeurs $A=1, 2, 4, 8, 16$, etc.; on peut faire voir qu'elle l'est encore pour les valeurs $A=3, 5, 6$.

Pour cet effet observons d'abord que si A est de la forme $9m\pm(3, 4)$, l'indéterminée z devra être divisible par 3; car si elle ne l'était pas, on pourrait faire $x=pz+9x'$, $y=qz+9y'$, et en rejetant les multiples de 9, on aurait....... $A=p^3+q^3$. Or un cube quelconque est toujours de l'une des trois formes $9m, 9m\pm1$; donc la somme de deux cubes, divisée par 9, ne peut laisser pour reste que $8, \pm1$ ou ±2. Donc si A donne pour reste ±3 ou ±4, z sera nécessairement divisible par 3.

52. Cela posé, considérons l'équation $x^3+y^3=3z^3$; puisque z doit être divisible par 3, cette équation ne pourra se partager en deux autres que de cette manière :

$$x+y=(3a)^3, \quad x^2-xy+y^2=3r^3,$$

où l'on suppose $z=3ar$, r étant impair et premier à $3a$.

La seconde de ces deux équations pouvant se mettre sous la forme $(x-y)^2+3(9a^3)^2=4r^3$, il faudra distinguer deux cas, selon que a est pair ou impair.

Supposons 1°. a impair, $x-y$ sera aussi impair; et puisque le premier membre de cette équation est de la forme p^2+3q^2,

son diviseur r sera de la même forme. On pourra donc faire $r=f^2+3g^2$, $r^3=F^2+3G^2$, et pour résoudre l'équation précédente, on fera $x-y+9a^3\sqrt{-3}=(1\pm\sqrt{-3})(F+G\sqrt{-3})$, ce qui donne

$$9a^3=G\pm F.$$

Mais puisqu'on a $G=3g(f^2-g^2)$ et $F=f(f^2-9g^2)$, il est visible que G est divisible par 3 et que F ne l'est pas; donc l'équation précédente ne saurait avoir lieu.

Supposons 2°. a pair et par conséquent $x-y$ pair, on aura $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+3\left(\frac{9a^3}{2}\right)^2=r^3$. Faisant toujours $r=f^2+3g^2$, $r^3=F^2+3G^2$, on aura $\frac{9a^3}{2}=G$, ou $\frac{3}{2}a^3=g(f^2-g^2)$. Les trois facteurs $g, f+g, f-g$, étant premiers entre eux, cette équation ne peut subsister qu'en faisant $g=12\alpha^3$, $f+g=6^3$, $f-g=\gamma^3$, ce qui suppose $a=2\alpha 6\gamma$, 6 et γ étant premiers à 6α. De là résulte $6^3-\gamma^3=2g=3(2\alpha)^3$, équation semblable à la proposée et composée de nombres beaucoup plus petits. Donc l'équation $x^3+y^3=3z^3$, est impossible.

53. On démontrera semblablement l'impossibilité des équations $x^3+y^3=5z^3$, $x^3+y^3=6z^3$.

Ainsi la série des valeurs de A depuis $A=1$ jusqu'à $A=6$, auxquelles on peut joindre la valeur $A=8$, ne donne que des équations impossibles; mais en continuant cette série on trouve immédiatement deux valeurs $A=7$, $A=9$, qui rendent l'équation possible.

On voit en effet que l'équation $x^3+y^3=7z^3$ est satisfaite en faisant $x=2$, $y=-1$, $z=1$, et que l'équation $x^3+y^3=9z^3$ l'est également en faisant $x=2$, $y=1$, $z=1$.

54. Il est remarquable au reste que si l'équation x^3+y^3

$=Az^3$ admet une solution, sans supposer $z=0$, elle en admet dès-lors une infinité qui se déduiront facilement de la solution primitive.

En effet supposons qu'on satisfasse à l'équation proposée par les valeurs $x=a, y=b, z=c$; on sait que la somme des deux cubes donnés a^3+b^3 sera égale à la somme de deux autres cubes p^3+q^3, si l'on prend $p=\frac{a(2b^3+a^3)}{a^3-b^3}$, $q=-\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}$. Donc de la solution donnée a, b, c, on déduira cette seconde solution $x=a(2b^3+a^3)$, ... $y=-b(2a^3+b^3)$, $z=c(a^3-b^3)$; les nombres de celle-ci étant désignés par a', b', c', on en déduirait semblablement une troisième solution a'', b'', c'', au moyen des valeurs

$$a''=a'(a'^3+2b'^3),\ b''=-b'(2a'^3+b'^3),\ c''=c'(a'^3-b'^3),$$

et ainsi à l'infini.

55. On voit que chaque solution est du quatrième ordre par rapport à la précédente, c'est-à-dire que le nombre des chiffres devient à peu près quadruple d'une solution à la suivante.

Ainsi la première solution de l'équation $x^3+y^3=7z^3$ étant donnée par les nombres 2, —1, 1, la seconde sera 12, 15, 9, ou plus simplement 4, 5, 3; de celle-ci on déduit la troisième 1265, —1256, 183, etc.

De même la première solution de l'équation $x^3+y^3=9z^3$ étant donnée par les nombres 2, 1, 1, on en déduit la seconde solution 20, —17, 7; de celle-ci la troisième....... 188479, —36520, 90391, et ainsi à l'infini.

56. Dans le cas de $A=-1$, on voit que s'il existait une

solution de l'équation $x^3+y^3+z^3=0$, donnée par les nombres a, b, c, on en déduirait une seconde a', b', c', au moyen des valeurs $a'=a(b^3-c^3)$, $b'=b(c^3-a^3)$, $c'=c(a^3-b^3)$; celle-ci en donnerait semblablement une troisième, et ainsi à l'infini.

Si on cherchait à prolonger la série de ces solutions dans le sens inverse, on devrait trouver de même une infinité de solutions, mais elles deviendraient bientôt irrationnelles; car puisque a' est de l'ordre a^4, si a^0 précède a, il faudra que a^0 soit de l'ordre $\sqrt[4]{a}$. Voici d'ailleurs la détermination de ces quantités.

Soit $a^0=x$, $b^0=y$, $c^0=z$, on aura à résoudre les équations

$$a=x(y^3-z^3),$$
$$b=y(z^3-x^3),$$
$$c=z(x^3-y^3),$$

qu'on peut combiner avec l'équation $x^3+y^3+z^3=0$. Or si l'on fait $3x^4=u$, on trouve pour déterminer u l'équation

$$u^4-6a^2u^2-8(b^3-c^3)u-3a^4=0,$$

équation qui est du nombre de celles qu'on peut résoudre à peu près aussi simplement que celles du second degré. Soit en effet $m=\sqrt[3]{4}$, et p une auxiliaire dont la valeur est

$$p=\sqrt{(a^2-bcm)},$$

on trouvera u ou

$$3x^4=-p+\sqrt{\left(3a^2-p^2-\frac{2(b^3-c^3)}{p}\right)}.$$

Des expressions semblables donneront les valeurs de $3y^4$ et

de $3z^4$, au moyen des auxiliaires

$$q = \sqrt{(b^2 - acm)},\ r = \sqrt{(c^2 - abm)}.$$

Ainsi à l'exception de la constante m qui dépend d'une racine cubique, il ne faut que de simples extractions de racines carrées pour déterminer les nombres x, y, z, et pour prolonger à volonté la série des solutions dans le sens opposé à celui où elles croissent avec beaucoup de rapidité.

Nous pourrions remarquer ici qu'on a entre les auxiliaires p, q, r et les quantités a, b, c, les trois équations rationnelles;

$$pq = ab + \tfrac{1}{2}m^2c^2,$$
$$3a^2 = p^2 - mqr,$$
$$3bc = -qr - \tfrac{1}{2}m^2p^2,$$

qui chacune en produisent deux autres semblables, et d'où résulte l'équation $p^3 + q^3 + r^3 = 0$. Mais ces propriétés ne se rapportent qu'à un genre d'analyse indéterminée différent de celui où l'on se propose seulement d'obtenir des solutions en nombres rationnels.

Théorèmes d'Analyse.

57. *Théorème* I. n étant un nombre premier, si on fait $x^n + y^n = (x+y)\mathrm{P}$, P désignant le polynome............. $x^{n-1} - yx^{n-2} + y^2x^{n-3}$ — etc., on sait qu'il est toujours possible de satisfaire à l'équation

$$4\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 \pm n\mathrm{Y}^2,$$

savoir $\mathrm{X}^2 + n\mathrm{Y}^2$ si n est de la forme $4k - 1$, et $\mathrm{X}^2 - n\mathrm{Y}^2$ si n

est de la forme $4k+1$. Cela posé:

» Je dis que le polynome X se déterminera en général » par la formule (1)

$$X = 2(x+y)^m,$$

» où $m = \frac{n-1}{2}$, pourvu qu'après avoir développé cette puis- » sance, on retranche des coefficients tous les multiples de n » qu'ils peuvent contenir, en ne conservant que les restes » moindres que $\frac{1}{2}n$. »

En effet la quantité $A = (a+1)^n - a^n - 1$ est toujours divisible par n, quel que soit l'entier a. Supposons $a+1$ non-divisible par n, alors $\frac{A}{a+1} = (a+1)^{2m} - \left(\frac{a^n+1}{a+1}\right)$ sera divisible par n; multipliant par 4 et observant que $4\left(\frac{a^n+1}{a+1}\right)$ peut être mis sous la forme $B^2 \pm nC^2$, on aura le nombre $4(a+1)^{2m} - B^2 \mp nC^2$, ou seulement sa partie $4(a+1)^{2m} - B^2$ qui sera divisible par n. Donc $2(a+1)^m \pm B$ sera encore divisible par n; et comme le signe de B est à volonté; on pourra faire $B = 2(a+1)^m$. C'est ce que donnerait la formule énoncée dans le théorème en faisant $x = ay$.

58. Soit par exemple $n = 11$, on aura $m = 5$, et

$$X = 2(x+y)^5 = 2x^5 + 10x^4y + 20x^3y^2 + 20x^2y^3 + 10xy^4 + 2y^5;$$

réduisant comme il vient d'être dit, les coefficients au-dessous de $\frac{1}{2}n$, on aura la vraie valeur de X, savoir

$$X = 2x^5 - x^4y - 2x^3y^2 - 2x^2y^3 - xy^4 + 2y^5.$$

---

(1) Cette formule offre pour déterminer X un moyen beaucoup plus simple que celui que nous avions indiqué dans la Théorie des nombres, art. 478.

Si on prend ensuite le carré de X et qu'on le retranche de $4P$, on aura la valeur de $11Y^2$ d'où résulte

$$Y=xy(x^3-y^3).$$

Cette seconde opération s'exécute par les règles ordinaires de l'analyse, sans faire aucune omission dans les coefficients.

Soit encore $n=17$, on aura $m=8$, ce qui donne

$$X=2(x+y)^8=\left\{\begin{array}{l}2x^8+16x^7y+56x^6y^2+112x^5y^3+140x^4y^4\\+2y^8+16xy^7+56x^2y^6+112x^3y^5\end{array}\right.$$

et en supprimant les multiples de 17,

$$X=2x^8-x^7y+5x^6y^2-7x^5y^3+4x^4y^4-7x^3y^5+5x^2y^6-xy^7+2y^8;$$

ensuite on trouve

$$Y=xy(x^6-x^5y+x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6).$$

59. *Théorème* II. « Soit n un nombre premier $4m+1$, si » l'on fait $(f+g\sqrt{n})^n=F+G\sqrt{n}$, ensuite $F=fP, G=ngQ$, » ce qui donne

$$P=f^{n-1}+\frac{n.n-1}{2}f^{n-3}.ng^2+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}f^{n-5}.n^2g^4+\text{etc.},$$

$$Q=f^{n-1}+\frac{n-1.n-2}{2.3}f^{n-3}.ng^2+\frac{n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5}f^{n-5}.n^2g^4+\text{etc.}$$

» Je dis que les polynomes P et Q peuvent en général se » mettre sous la forme X^2-nY^2, de sorte qu'on pourra faire

$$P=A^2-nB^2,\quad Q=C^2-nD^2,$$

» A, B, C, D, étant des polynomes en f et g du degré..... » $2m=\frac{1}{2}(n-1)$. »

En effet, si on fait $p=f+g\sqrt{n}$, $q=f-g\sqrt{n}$, on aura $P=\frac{p^n+q^n}{p+q}$; mais d'après cette formation on sait que la fonction $4P$ peut être mise sous la forme X^2-nY^2, dans laquelle on aura

$$X=\left\{\begin{array}{l} 2p^{2m}-p^{2m-1}q+(m+1)p^{2m-2}q^2+\text{etc.} \\ +2q^{2m}-q^{2m-1}p+(m+1)q^{2m-2}p^2+\text{etc.}\end{array}\right\}+Mp^mq^m,$$

$$Y=\left\{\begin{array}{l} p^{2m-1}q+\alpha p^{2m-2}q^2+\text{etc.} \\ +q^{2m-1}p+\alpha q^{2m-2}p^2+\text{etc.}\end{array}\right\}+Np^mq^m.$$

Et comme en général pq est rationnel ainsi que p^k+q^k, k étant un entier quelconque, il s'ensuit que X et Y sont des polynomes en f et g, homogènes et du degré $2m$; ces polynomes divisés par 2 seront les valeurs de A et B dans l'équation $P=A^2-nB^2$.

On aura semblablement $Q=\frac{1}{n}\cdot\frac{p^n-q^n}{p-q}$; mais en faisant.. $p^n-q^n=(p-q)H$, on aura

$$4H=4nQ=X'^2-nY'^2;$$

$$X'=\left\{\begin{array}{l} 2p^{2m}+p^{2m-1}q+(m+1)p^{2m-2}q^2+\text{etc.} \\ +2q^{2m}+q^{2m-1}p+(m+1)q^{2m-2}p^2+\text{etc.}\end{array}\right\}+M'p^mq^m,$$

$$Y'=\left\{\begin{array}{l} p^{2m-1}q-\alpha p^{2m-2}q^2+\text{etc.} \\ +q^{2m-1}p-\alpha q^{2m-2}p^2+\text{etc.}\end{array}\right\}+N'p^mq^m.$$

Les valeurs de X' et Y' sont donc pareillement des fonctions entières de f et g; et comme X' doit être divisible par n, en vertu de l'équation $4nQ=X'^2-nY'^2$, il faudra faire $X'=nZ'$, ce qui donnera $4Q=nZ'^2-Y'^2$. Donc la fonction Q peut être mise sous la forme $n(\frac{1}{2}Z')^2-(\frac{1}{2}Y')^2$; or puisque n est de la forme $4m+1$, et qu'ainsi l'équation $t^2-nu^2=-1$ est tou

jours possible, la même fonction Q pourra être mise aussi sous la forme $C^2 - nD^2$; il suffit pour cela de faire........ $C + D\sqrt{n} = (\frac{1}{2}Y' + \frac{1}{2}Z'\sqrt{n})(t \pm u\sqrt{n})$, ce qui donnera.... $C = \frac{1}{2}tY' \pm \frac{1}{2}nuZ'$, $D = \frac{1}{2}tZ' \pm \frac{1}{2}uY'$.

60. *Théorème* III. « Soit n un nombre premier de la » forme $4m+3$, si on fait $(f+g\sqrt{-n})^n = F + G\sqrt{-n}$, en- » suite $F = fP$, $G = ngQ$, ce qui donne

$$P = f^{n-1} - \frac{n.n-1}{2} f^{n-3}.ng^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4} f^{n-5}.n^2g^4 - \text{etc.},$$

$$Q = f^{n-1} - \frac{n-1.n-2}{2.3} f^{n-3}.ng^2 + \frac{n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5} f^{n-5}.n^2g^4 - \text{etc.}$$

» je dis que les polynomes P et Q pourront être partagés en » deux facteurs rationnels, de sorte qu'on aura

$$P = AB,\ Q = CD,$$

» A, B, C, D, étant des polynomes en f et g du degré..... » $2m + 1 = \frac{1}{2}(n-1)$. »

En effet, soit $p = f + g\sqrt{-n}$, $q = f - g\sqrt{-n}$, on aura $P = \frac{p^n + q^n}{p+q}$; et d'après cette forme on peut faire $4P = X^2 + nY^2$, ce qui donnera

$$X = \begin{cases} 2p^{2m+1} - p^{2m}q - mp^{2m-1}q^2 + \text{etc.}, \\ +2q^{2m+1} - q^{2m}p - mq^{2m-1}p^2 + \text{etc.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} p^{2m}q + 6p^{2m-1}q^2 + \text{etc.}, \\ -q^{2m}p - 6q^{2m-1}p^2 - \text{etc.} \end{cases}$$

Or j'observe que la valeur de X est réelle et rationnelle, puis-qu'elle ne dépend que de la valeur de pq et celle de $p^k + q^k$

qui sont réelles et rationnelles. Quant à la valeur de Y, elle est égale au produit de $p-q$ par le polynome ....
$Z = pq \cdot \frac{p^{2m-1}-q^{2m-1}}{p-q} + \mathit{6}p^2q^2 \cdot \frac{p^{2m-3}-q^{2m-3}}{p-q} + \text{etc.}$, dont la valeur est réelle et rationnelle comme celle de X ; donc puisque $p-q = 2g\sqrt{-n}$, on aura $4P = X^2 - 4n^2g^2Z^2$; donc P est égal au produit des deux polynomes $\frac{1}{2}X + ngZ$, $\frac{1}{2}X - ngZ$, lesquels seront les valeurs de A et B.

61. On aura semblablement $Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{p^n - q^n}{p-q}$; on pourra donc supposer $4nQ = X'^2 + nY'^2$, et on aura

$$X' = \begin{cases} 2p^{2m+1} + p^{2m}q - mp^{2m-1}q^2 + \text{etc.}, \\ -2q^{2m+1} - q^{2m}p + mq^{2m-1}p^2 - \text{etc.} \end{cases}$$

$$Y' = \begin{cases} p^{2m}q - \mathit{6}p^{2m-1}q^2 + \text{etc.}, \\ +q^{2m}p - \mathit{6}q^{2m-1}p^2 + \text{etc.} \end{cases}$$

La valeur de Y' se réduira, comme on voit, à une quantité réelle et rationnelle, c'est-à-dire, à un simple polynome en f et g du degré $2m+1$. Quant à la fonction X', elle est le produit de $p-q$ ou $2g\sqrt{-n}$ par le polynome

$$Z' = 2 \cdot \frac{p^{2m+2} - q^{2m+1}}{p-q} + pq \cdot \frac{p^{2m-1} - q^{2m-1}}{p-q} - mp^2q^2 \cdot \frac{p^{2m-3} - q^{2m-3}}{p-q} + \text{etc.},$$

dont la valeur est réelle et rationnelle ; donc on aura ... $X' = 2gZ'\sqrt{-n}$, et $X'^2 = -4ng^2Z'^2$, ce qui donne $4Q = Y'^2 - 4g^2Z'^2$; donc Q se décompose en deux facteurs rationnels $\frac{1}{2}Y' + gZ'$, $\frac{1}{2}Y' - gZ'$, qui seront les valeurs de C et D.

62. Voici des exemples de ces décompositions pour les cas de $n=7$ et $n=11$.

$$n=7.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}&=f^6-3n^2f^4g^2+5n^3f^2g^4-n^4g^6,\\
\mathrm{A}&=f^3+nf^2g-n^2fg^2+n^2g^3,\\
\mathrm{B}&=f^3-nf^2g-n^2fg^2-n^2g^3,\\
\mathrm{Q}&=f^6-5nf^4g^2+3n^2f^2g^4-n^2g^6,\\
\mathrm{C}&=f^3-nf^2g+nfg^2+ng^3,\\
\mathrm{D}&=f^3+nf^2g+nfg^2-ng^3.
\end{aligned}$$

$$n=11.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}&=f^{10}-5n^2f^8g^2+30n^3f^6g^4-42n^4f^4g^6+15n^5f^2g^4-n^6g^{10},\\
\mathrm{A}&=f^5+3nf^4g+2n^2f^3g^2+2n^2f^2g^3-n^3fg^4-n^3g^5,\\
\mathrm{B}&=f^5-3nf^4g+2n^2f^3g^2+2n^2f^2g^3-n^3fg^4+n^3g^5,\\
\mathrm{Q}&=f^{10}-15nf^8g^2+42n^2f^6g^4-30n^3f^4g^6+5n^4f^2g^8-n^4g^{10},\\
\mathrm{C}&=f^5+nf^4g-2nf^3g^2-2n^2f^2g^3-3n^2fg^4-n^2g^5,\\
\mathrm{D}&=f^5-nf^4g-2nf^3g^2+2n^2f^2g^3-3n^2fg^4+n^2g^5.
\end{aligned}$$

Au reste, la similitude qu'il y a entre les fonctions P et Q permettrait de trouver aisément les facteurs de Q en les déduisant des facteurs de P, ou réciproquement. Il faudrait pour cela mettre ng et f à la place de f et g respectivement.

63. Le théorème précédent peut être appliqué aux sections angulaires; car si on fait $f=\cos.\varphi$ et $g\sqrt{n}=\sin.\varphi$, on aura $f+g\sqrt{-n}=\cos.\varphi+\sqrt{-1}\sin.\varphi$; d'où résulte $\mathrm{F}=\cos.n\varphi$, $\mathrm{G}\sqrt{-n}=\sqrt{-1}\sin.n\varphi$, et par conséquent

$$\mathrm{P}=\frac{\cos.n\varphi}{\cos.\varphi},\quad \mathrm{Q}=\frac{\sin.n\varphi}{n\sin.\varphi}.$$

Ainsi toutes les fois que n sera un nombre premier de la forme $4m+3$, les expressions de $\frac{\cos.n\varphi}{\cos.\varphi}$ et $\frac{\sin.n\varphi}{n\sin.\varphi}$, pourront

être décomposées en deux facteurs rationnels du degré.. $2m+1$.

Par exemple, dans le cas de $n=7$, on aura

$$\frac{\cos.7\varphi}{\cos.\varphi}=\left\{\begin{array}{l}(\cos.^3\varphi+7^{\frac{1}{2}}\cos.^2\varphi\sin.\varphi-7\cos.\varphi\sin.^2\varphi+7^{\frac{1}{2}}\sin.^3\varphi)\times\\(\cos.^3\varphi-7^{\frac{1}{2}}\cos.^2\varphi\sin.\varphi-7\cos.\varphi\sin.^2\varphi-7^{\frac{1}{2}}\sin.^3\varphi),\end{array}\right.$$

$$\frac{\sin.7\varphi}{7\sin.\varphi}=\left\{\begin{array}{l}(\cos.^3\varphi-7^{\frac{1}{2}}\cos.^2\varphi\sin.\varphi+\cos.\varphi\sin.^2\varphi+7^{-\frac{1}{2}}\sin.^3\varphi)\times\\(\cos.^3\varphi-7^{\frac{1}{2}}\cos.^2\varphi\sin.\varphi+\cos.\varphi\sin.^2\varphi+7^{-\frac{1}{2}}\sin.^3\varphi).\end{array}\right.$$

64. Pour appliquer ces formules à un cas particulier, soit proposé de diviser le quart de la circonférence $\frac{\pi}{2}$ en 7 parties égales; on fera $\varphi=\frac{1}{14}\pi$, ce qui donnera $\cos.7\varphi=0$, et on trouvera $\cot.\varphi$ par la résolution de l'une ou l'autre des deux équations

$$\cot.^3\varphi+7^{\frac{1}{2}}\cot.^2\varphi-7\cot.\varphi+7^{\frac{1}{2}}=0,$$
$$\cot.^3\varphi-7^{\frac{1}{2}}\cot.^2\varphi-7\cot.\varphi-7^{\frac{1}{2}}=0,$$

La première s'applique aux arcs $\varphi=\frac{3\pi}{14},\frac{5\pi}{14},\frac{13\pi}{14}$, la seconde aux arcs $\frac{\pi}{14},\frac{9\pi}{14},\frac{11\pi}{14}$, qui sont les suppléments des précédents.

On aurait directement par les formules ordinaires

$$\frac{\cos7\varphi}{\cos.\varphi}=\cos.^6\varphi-21\cos.^4\varphi\sin.^2\varphi+35\cos.^2\varphi\sin.^4\varphi-7\sin.^6\varphi,$$

ce qui, dans le cas précédent, donnerait à résoudre l'équation

$$0=\cot.^6\varphi-21\cot.^4\varphi+35\cot.^2\varphi-7;$$

on a donc le choix ou de décomposer cette équation du sixième degré en deux autres du troisième, comme on vient

de le faire, ou d'employer la substitution $\cot.^2\varphi = x$ qui donne également à résoudre une équation du troisième degré.

Mais la décomposition que notre théorème fournit, a de plus l'avantage de faire connaître des propriétés nouvelles des sections angulaires. Car puisque dans notre exemple, les cotangentes des trois arcs $\frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}, \frac{13\pi}{14}$, sont les racines d'une même équation $x^3 + 7^{\frac{1}{2}}x^2 - 7x + 7^{\frac{1}{2}} = 0$, il s'ensuit qu'on a

$$\cot.\frac{\pi}{14} - \cot.\frac{3\pi}{14} - \cot.\frac{5\pi}{14} = \sqrt{7},$$

$$\cot.^2\frac{\pi}{14} + \cot.^2\frac{3\pi}{14} + \cot.^2\frac{5\pi}{14} = 21,$$

$$\cot.\frac{\pi}{14}\cot.\frac{3\pi}{14}\cot.\frac{5\pi}{14} = \sqrt{7},$$

comme on peut le vérifier par le calcul trigonométrique.

Il resterait à trouver pour une valeur quelconque de n, la loi générale des valeurs de φ qui servent à composer les racines de chaque équation. On aurait ainsi de nouvelles formules qui s'ajouteraient aux nombreuses formules connues dans la théorie des sections angulaires.

65. *Théorème* IV. « Si l'équation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ a » ses trois racines rationnelles, la quantité $A = p^2q^2 - 4q^3$ » $+ 18pqr - 4p^3r - 27r^2$, devra être un carré. »

En effet, soient α, β, γ, les racines rationnelles de l'équation proposée, en sorte qu'on ait $p = \alpha + \beta + \gamma, q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, r = \alpha\beta\gamma$; si l'on cherche les valeurs des quantités y et z ainsi composées :

$$y = \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha = \int \alpha^2\beta,$$

$$z = \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\beta = \int \alpha^2\gamma,$$

ces quantités devront être également rationnelles. Or par les formules connues on trouve $y+z=pq-3r$, $yz=q^3+p^3r-6pqr+9r^2$, donc $(y-z)^2=p^2q^2-4q^3+18pqr-4p^3r-27r^2$; le second membre doit donc être un carré parfait.

On obtiendrait le même résultat par la considération des deux quantités $\int\alpha^3\beta$, $\int\alpha^3\gamma$.

Corollaire. Il suit de ce théorème que dans le cas où l'équation $x^3-px^2+qx-r=0$ a ses trois racines rationnelles, l'expression de l'une de ces racines par la formule de Cardan, est toujours de la forme

$$x=\tfrac{1}{3}p+\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-\tfrac{1}{3}})}+\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-\tfrac{1}{3}})},$$

dans laquelle A et B sont rationnels, ainsi que $\sqrt[3]{(A^2+\frac{1}{3}B^2)}$.

Théorème V. « Si l'on propose de trouver combien il y a » de nombres premiers dans la progression arithmétique » A—C, 2A—C.. *n*A—C, où C est l'un des k nombres » plus petits que A et premiers à A, le nombre cherché x » sera donné par la formule

$$x=\frac{nA}{k(\log.(nA)-1.08366)},$$

» laquelle sera d'autant plus exacte que n sera plus grand. »

Par exemple, dans la progression 59, 119, 179, etc. dont le terme général est $60n-1$, on a $k=\frac{60}{2}(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=16$, et $x=\frac{\frac{15}{4}n}{\log.(60n)-1.08366}$. Ainsi dans les 100000 premiers termes de cette progression on devra trouver à très-peu-près 25820 nombres premiers.

MÉMOIRES

Sur le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique, en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité.

PAR M. DELAPLACE.

I.

Le développement des fonctions en séries est un des objets les plus importants de l'analyse : la plupart des applications du calcul aux phénomènes en dépendent. Ce développement pouvant se faire d'une infinité de manières, le choix de celle qui donne les séries les plus convergentes est une des choses les plus utiles à la solution des problèmes. Il est donc intéressant de connaître les conditions qui font converger les séries, et l'expression la plus simple dont leurs termes successifs approchent de plus en plus, et avec laquelle ils finissent par coïncider. Les méthodes que j'ai données dans ma Théorie analytique des probabilités, sur les approximations des formules fonctions de grands nombres, sont fort avantageuses pour cet objet. Je vais considérer ici les développements en séries, des coordonnées du mouvement elliptique.

L'excentricité des orbes elliptiques planétaires étant peu considérable, on développe le plus souvent le rayon vecteur et l'anomalie vraie, en séries ordonnées suivant ses puissances.

Mais si l'excentricité qui dans les orbes elliptiques ne surpasse jamais l'unité, en devenait fort approchante; on conçoit que les séries pourraient cesser d'être convergentes. Il importe donc de connaître si parmi les valeurs comprises entre zéro et l'unité, que l'excentricité peut avoir, il en est une au-dessus de laquelle ces séries seraient divergentes; et dans ce cas, de la déterminer. Prénons pour unité, le demi-grand axe de l'ellipse : désignons par e son excentricité, par t l'anomalie moyenne comptée du périgée, et par R le rayon vecteur; on aura par le n°. 22 du second livre de la Mécanique céleste,

$$\begin{aligned}
R = 1 + \frac{e^2}{2} - e.\cos.t \\
&- \frac{e^2}{1.2}.\cos.2t \\
&- \frac{e^3}{1.2.2^2}.(3.\cos.3t - 3.\cos.t) \\
&- \frac{e^4}{1.2.3.2^3}.(4^2.\cos.4t - 4.2^2.\cos.2t) \\
&- \frac{e^5}{1.2.3.4.2^4}.\left(5^3.\cos.5t - 5.3^3.\cos.3t + \frac{5.4}{1.2}\cos.t\right) \\
&- \frac{e^6}{1.2.3.4.5.2^5}.\left(6^4.\cos.6t - 6.4^4.\cos.4t + \frac{6.5}{1.2}.\cos.2t\right) \\
&- \text{etc.}
\end{aligned}$$

Le terme général de cette expression est

$$-\frac{e^i}{1.2.3\ldots\overline{i-1}.2^{i-1}}.\left\{\begin{array}{l}
i^{i-2}.\cos.it - i.(i-2)^{i-2}.\cos.(i-2)t \\
+ \frac{i.\overline{i-1}}{1.2}.(i-4)^{i-2}.\cos.(i-4)t \\
- \frac{i.\overline{i-1}.\overline{i-2}}{1.2.3}.(i-6)^{i-2}\cos.(i-6)t \\
+ \text{etc.}
\end{array}\right\};$$

la serie étant continuée jusqu'à ce que l'on arrive à un facteur $(i-2r)^{i-2}$ dans lequel $i-2r$ soit négatif. Si l'on fait t égal à un angle droit, ce terme devient nul lorsque i est impair; et dans le cas de i pair, il devient, abstraction faite du signe, égal à

$$\frac{e^i}{1.2.3\ldots\overline{i-1}.2^{i-2}}\cdot\left[i^{i-2}+\frac{i}{1}.(i-2)^{i-2}+\frac{i.\overline{i-1}}{1.2}.(i-4)^{i-2}+\text{etc.}\right];(a)$$

et il est alors le plus grand possible. Déterminons sa valeur, lorsque i est un très-grand nombre.

Il est facile de voir que les termes de la série

$$i^{i-2}+\frac{i}{1}.(i-2)+\frac{i.\overline{i-1}}{1.2}.(i-4)^{i-2}+\text{etc.};(a')$$

vont d'abord en croissant, et qu'ils ont un *maximum* après lequel ils diminuent. A ce *maximum*, deux termes consécutifs sont à très-peu-près égaux. Soit

$$\frac{i.\overline{i-1}.\overline{i-2}\ldots\overline{i-r+1}}{1.2.3\ldots r}.(i-2r)^{i-2}$$

le terme *maximum*. Le terme qui le précède, sera

$$\frac{i.\overline{i-1}\ldots\overline{i-r+2}}{1.2.3\ldots\overline{r-1}}.(i-2r+2)^{i-2};$$

en égalant donc ces deux termes, on aura

$$\frac{i-r+1}{r}.(i-2r)^{i-2}=(i-2r+2)^{i-2}.$$

Cette équation donne la valeur de r, et par conséquent, le rang que le terme le plus grand occupe dans la série. Si l'on prend les logarithmes des deux membres, on a

$$\log.\left(\frac{i-r+1}{r}\right)=(i-2).\log.\left(1+\frac{2}{i-2r}\right);$$

ou

$$\log.\left(\frac{i-r}{r}\right)+\log.\left(1+\frac{1}{i-r}\right)=(i-2).\log.\left(1+\frac{2}{i-2r}\right);\ (b)$$

or on a, lorsque i et r sont de très-grands nombres,

$$\log.\left(1+\frac{1}{i-r}\right)=\frac{1}{i-r}-\frac{1}{2.(i-r)^2}+\text{etc.};$$

$$\log.\left(1+\frac{2}{i-2r}\right)=\frac{2}{i-2r}-\frac{2}{(i-2r)^2}+\text{etc.};$$

l'équation (b) deviendra donc, en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i}$,

$$\log.\left(\frac{i-r}{r}\right)=\frac{2i}{i-2r};$$

ce qui donne

$$\frac{i-r}{r}=c^{\frac{2i}{i-2r}}.$$

c étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. En faisant $r=\omega i$, on aura

$$\frac{1-\omega}{\omega}=c^{\frac{2}{1-2\omega}};\ (c)$$

Si l'on nomme p le terme *maximum*

$$\frac{i.\overline{i-1}\ldots\overline{i-r+1}}{1.2.3\ldots r}.(i-2r)^{i-2};$$

le terme qui en est éloigné du rang t, sera

$$p.\frac{\overline{i-r}.\overline{i-r-1}\ldots\overline{i-r-t+1}}{\overline{r+1}.\overline{r+2}\ldots\overline{r+t}}.\left(\frac{i-2r-2t}{i-2r}\right)^{i-2}.$$

Son logarithme sera donc

$$\log.p + t.\log.(i-r) + \log.\left(1-\frac{1}{i-r}\right) + \log.\left(1-\frac{2}{i-r}\right) \ldots + \log.\left[1-\frac{(t-1)}{i-r}\right]$$
$$-t.\log.r - \log.\left(1+\frac{1}{r}\right) - \log.\left(1+\frac{2}{r}\right) \ldots - \log.\left(1+\frac{t}{r}\right)$$
$$+(i-2).\log.\left(1-\frac{2t}{i-2r}\right).$$

En développant en séries ces logarithmes, et négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{i^2}$, on aura

$$\log.p + t.\log.\left(\frac{i-r}{r}\right) - \frac{(1+2+3\ldots+\overline{t-1})}{i-r} - \frac{(1+2+3\ldots+t)}{r}$$
$$-(i-2).\left[\frac{2t}{i-2r} + \frac{2t^2}{(i-2r)^2}\right].$$

Par la nature de r, on a à très-peu-près, par ce qui précède,

$$\log.\left(\frac{i-r}{r}\right) + \frac{1}{i-r} = (i-2).\left[\frac{2}{i-2r} - \frac{2}{(i-2r)^2}\right];$$

la fonction précédente deviendra donc

$$\log.p - (1+2+3\ldots+t).\frac{i}{r.(i-r)} - \frac{(i-2).2t.(t+1)}{(i+2r)^2}.$$

En ne conservant ainsi parmi les termes de l'ordre $\frac{1}{i}$, que ceux qui sont multipliés par t^2, et observant que

$$1+2+3\ldots+t = \frac{t^2+t}{2};$$

cette fonction prendra la forme

$$\log.p - \frac{i^3 t^2}{2r.\overline{i-r}.(i-2r)^2};$$

ce qui donne pour le terme placé à la distance t, du terme p,

$$p.c^{\frac{-i^3t^2}{2r.\overline{i-r}(i-2r)^2}}.$$

Il est facile de s'assurer que cette même valeur a lieu à très-peu-près pour le terme placé avant p à la même distance. La somme de tous ces termes sera la série entière (a'). On aura, comme on sait, cette somme à très-peu-près égale à

$$p.\int dt.c^{\frac{-i^3t^2}{2r.\overline{i-r}.(i-2r)^2}}$$

l'intégrale étant prise depuis $t=-\infty$, jusqu'à $t=\infty$; ce qui donne, par les méthodes connues, la série (a') égale à

$$p.\sqrt{\pi}.\left(\frac{i-2r}{i}\right).\sqrt{\frac{2r.\overline{i-r}}{i}}.$$

π étant la circonférence dont le diamètre est l'unité. On a

$$p=\frac{1.2.3\ldots i.(i-2r)^{i-2}}{1.2.3\ldots\overline{i-r}.1.2.3\ldots r}.$$

La série (a) devient ainsi, abstraction faite du signe,

$$\frac{i.(i-2r)^{i-2}.\sqrt{\pi}}{1.2.3\ldots\overline{i-r}.1.2.3\ldots r}.\frac{\overline{i-2r}}{i}.\sqrt{\frac{2r.\overline{i-r}}{i}}.\frac{e^i}{2^{i-1}}.$$

On a à très-peu près, par les théorèmes connus,

$$1.2.3\ldots\overline{i-r}=(i-r)^{i-r+\frac{1}{2}}.c^{-(i-r)}.\sqrt{2\pi};$$
$$1.2.3\ldots r=r^{r+\frac{1}{2}}.c^{-r}.\sqrt{2\pi}.$$

La série (a) devient donc

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{i}}.(i-2r)^{i-1}.\left(\frac{ec}{2}\right)^i}{r^r.(i-r)^{i-r}.\sqrt{2\pi}}$$

ou

$$\frac{2}{i\sqrt{i}.(1-2\omega).\sqrt{2\pi}}.\left[\frac{ec.(1-2\omega)}{2\omega^{\omega}.(1-\omega)^{1-\omega}}\right]^i; \quad (d)$$

ω étant donné par l'équation (c).

On doit observer ici que la valeur de ω donnée par cette équation n'est pas rigoureuse. Nous avons négligé, pour former cette équation, les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$; et de plus nous avons supposé que le terme *maximum* p, était égal à celui qui le précède; ce qui n'est qu'approché. De là il suit que la valeur exacte de ω, est celle que donne l'équation (c), plus une correction de l'ordre $\frac{1}{i}$, que nous désignerons par $\frac{q}{i}$. Mais cette correction disparaît d'elle-même par la condition de p *maximum*. En effet, si on nomme D la fonction

$$\frac{ec.(1-2\omega)}{2\omega^{\omega}.(1-\omega)^{1-\omega}},$$

et D′ cette même fonction, lorsqu'on y change ω dans $\omega+\frac{q}{i}$; on aura

$$\log.D'^i = i.\log.\left[\left(1+\frac{q}{i}.\frac{dD}{D.d\omega}+\frac{q^2}{2i^2}.\frac{d^2D}{D.d\omega^2}+\text{etc.}\right).D\right].$$

En repassant des logarithmes aux nombres, et négligeant ensuite les quantités de l'ordre $\frac{1}{i}$, on aura

$$D'^i = D^i.c^{q.\frac{dD}{Dd\omega}}.$$

On a

$$\frac{dD}{D.d\omega} = -\frac{2}{1-2\omega}+\log.\frac{1-\omega}{\omega};$$

et l'équation (c) donne $\log.\frac{1-\omega}{\omega}=\frac{2}{1-2\omega}$; on a donc aux quantités près de l'ordre $\frac{1}{i}$, $D'^{i}=D^{i}$; d'où il est facile de conclure que, par le changement de ω dans $\omega+\frac{q}{i}$, la formule (d) reste la même. Si la quantité

$$\frac{ec.(1-2\omega)}{2\omega^{\omega}.(1-\omega)^{1-\omega}}$$

surpasse l'unité, la fonction (d) devient infinie, lorsque i est infini; l'expression du rayon vecteur devient donc alors divergente. La valeur de l'excentricité, déduite à l'équation

$$e=\frac{2\omega^{\omega}.(1-\omega)^{1-\omega}}{(1-2\omega).c}$$

est par conséquent la limite des valeurs de l'excentricité, qui font converger l'expression du rayon vecteur développé suivant les puissances de l'excentricité. En substituant au lieu de $\frac{1}{c}$ sa valeur $\left(\frac{1-\omega}{\omega}\right)^{\frac{1-2\omega}{2}}$ donnée par l'équation (c), cette expression de e devient

$$e=\frac{2.\sqrt{\omega.(1-\omega)}}{1-2\omega}.$$

L'équation (c) donne à peu près

$$\omega=0,08307;$$

d'où l'on tire

$$e=0,66195.$$

L'équation précédente de la limite de l'excentricité e, donne à cette limite

$$1-2\omega=\frac{1}{\sqrt{1+e^2}}$$

d'où il est facile de conclure

$$\frac{1-\omega}{\omega}=\frac{(1+\sqrt{1+e^2})}{e^2};$$

l'équation (c) donnera donc

$$1+\sqrt{1+e^2}=e.c^{\sqrt{1+e^2}};\ (m)$$

Les valeurs de e, supérieures à celle que cette équation donne, rendent l'expression en série du rayon vecteur R, divergente lorsque t est un angle droit. Pour toutes les valeurs inférieures, cette série est convergente quelque soit t. En effet, le terme général de l'expression de R développée en série ordonnée par rapport aux puissances de l'excentricité est, comme on la vu,

$$-\frac{e^i}{1.2.3\ldots\overline{i-1}.2^{i-1}}.(i^{i-2}.\cos.it-i.(i-2)^{i-2}.\cos.(i-2).t+\text{etc.}).$$

La plus grande valeur de ce terme, abstraction faite du signe, ne peut surpasser

$$\frac{e^i}{1.2.3\ldots\overline{i-1}.2^{i-1}}.\left[i^{i-2}+i.(i-2)^{i-2}+\frac{i.\overline{i-1}}{1.2}.(i-4)^{i-2}+\text{etc.}\right].$$

On vient de voir que cette valeur, lorsque i est infini, devient nulle par un facteur moindre que l'unité, élevé à la puissance i, lorsque l'excentricité e est au-dessous de celle qui résulte de l'équation aux limites ; la série est donc convergente, quel que soit t. Je vais maintenant établir qu'alors la série de l'expression de l'anomalie vraie développée de la même manière, est pareillement convergente.

II.

u étant l'anomalie excentrique, et v l'anomalie vraie;

on a, par le n°. 20 du second livre de la Mécanique céleste,

$$t = u - e\sin.u$$
$$R = 1 - e\cos.u;$$

ce qui donne

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{R};$$

or on a, par la loi des aires proportionnelles aux temps,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{R^2};$$

on a donc

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 . \sqrt{1+e^2}.$$

L'expression en série de u, du n°. 22 du livre cité, donne

$$\frac{du}{dt} = 1 + e.\cos.t + \frac{e^2}{1.2.2}.2^2.\cos.2t + \frac{e^3}{1.2.3.2^2}.(3^3\cos.3t - 3.\cos.t) + \text{tc.}$$

Le terme général de cette série est

$$\frac{e^i}{1.2.3\ldots i.2^{i-1}}.\Big[i^i.\cos.it - i.(i-2)^i.\cos.(i-2)t + \frac{i.\overline{i-1}}{1.2}.(i-4)^i.\cos.(i-4)t - \text{etc.}\Big],$$

et dans aucun cas, il ne peut surpasser

$$\frac{e^i}{1.2.3\ldots i.2^{i-1}}.\Big[i^i + i.(i-2)^i + \frac{i.\overline{i-1}}{1.2}.(i-4)^i + \text{etc.}\Big].$$

En suivant exactement l'analyse de l'article précédent, on trouve ce dernier terme égal à

$$\frac{2}{\sqrt{i}}.\frac{(1-2\omega)}{\sqrt{2\pi}}.\left[\frac{ec.(1-2\omega)^2}{2\,\omega^{\omega}.(1-\omega)^{1-\omega}}\right]^i; \quad (e)$$

ω étant donné par l'équation (c) de l'article précédent.

Maintenant, si l'on désigne par A la série

$$1+e+\frac{2^2.e^2}{1.2.2}\ldots\ldots+\frac{e^{i'}}{1.2.3\ldots i'.2^{i'-1}}.\Big[i'^{i'}+i'.(i'-2)^{i'}+\frac{i'.\overline{i'-1}}{1.2}.(i'-4)^{i'}+\text{etc.}\Big]+\text{etc.},$$

la série étant continuée jusqu'à $i'=i$; il est facile de voir que l'expression en série, de $\frac{du}{dt}$, sera moindre que le développement en série, de la fonction

$$A+\frac{2.(1-2\omega).q^i e^i}{\sqrt{2\pi}.(1-qe)}; (o)$$

en désignant par q la quantité

$$\frac{(1-2\omega).c}{2\omega^{\omega}.(1-\omega)^{1-\omega}}.$$

Car il est visible que le coefficient d'une puissance quelconque e^s dans le développement de la fonction (o) est positif, et qu'il est plus grand, abstraction faite du signe, que le coefficient de la même puissance, dans le développement de $\frac{du}{dt}$. L'expression de $\frac{dv}{dt}$, ou de $\left(\frac{du}{dt}\right)^2.\sqrt{1-e^2}$, est donc moindre

$$\left[A+\frac{2.(1-2\omega).q^i e^i}{\sqrt{2\pi}.(1-qe)}\right]^2.\sqrt{1-e^2};$$

or, le développement de $\sqrt{1-e^2}$ est moindre que celui de $\frac{1}{1-e^2}$; le développement de $\frac{dv}{dt}$ est donc moindre que celui de

$$\frac{\left[A+\frac{2.(1-2\omega).q^i e^i}{\sqrt{2\pi}.(1-qe)}\right]^2}{1-e^2}; (p)$$

c'est-à-dire que le coefficient d'une puissance quelconque de e^s dans le développement de cette fonction, est positif et plus grand, abstraction faite du signe, que le coefficient de la même puissance dans le développement de $\frac{dv}{dt}$.

Donnons à la fonction (p) cette forme

$$\frac{A^2}{1-e^2}+\frac{4A.(1-2\omega).q^i e^i}{\sqrt{2\pi}.(1-qe)(1-e^2)}+\frac{2.(1-2\omega)^2 q^{2i} e^{2i}}{\pi.(1-qe)^2.(1-e^2)}.$$

Le terme $\frac{A^2}{1-e^2}$ développé en série, donne une série convergente. Car, quelque grand que l'on suppose i, pourvu qu'il soit fini, A^2 sera composé du nombre fini de termes. En désignant par $me^{i'}$ l'un de ces termes, $\frac{me^{i'}}{1-e^2}$ développé en séries donnera une série convergente, e étant supposé moindre que l'unité. Ainsi $\frac{A^2}{1-e^2}$ donnera un nombre fini de séries convergentes, et dans leur somme le terme dépendant de e^s deviendra nul lorsque s est infini.

Le terme

$$\frac{4A.(1-2\omega).q^i e^i}{\sqrt{2\pi}.(1-qe)(1-e^2)}$$

donnera un nombre fini des termes de la forme

$$\frac{ne^{i'}}{(1-qe)(1-e^2)};$$

or la fraction

$$\frac{1}{(1-qe)(1-e^2)}$$

se décompose dans les trois suivantes

$$\frac{1}{2(1-q)}\cdot\frac{1}{1-e}+\frac{1}{2(1+q)}\cdot\frac{1}{1+e}-\frac{q^2}{1-q^2}\cdot\frac{1}{1-qe}.$$

Chacune d'elles développée en série, donne une série convergente; car, par la supposition, qe est moindre que l'unité. On voit donc que le terme

$$\frac{4A.(1-2\omega).q^i e^i}{\sqrt{2\pi}.(1-qe).(1-e^2)}$$

donne un série convergente. Pareillement le terme

$$\frac{2.(1-2\omega)^2.q^{2i}e^{2i}}{\pi.(1-qe)^2.(1-e^2)}$$

donne une série convergente; comme il est facile de le voir, en décomposant la fraction

$$\frac{1}{(1-qe)^2.(1-e^2)}$$

en fractions partielles; $\frac{dv}{dt}$ développé en série ordonnée par rapport aux puissances de l'excentricité, donne par conséquent une série convergente, lorsque qe est moindre que l'unité. Il est facile d'en conclure que l'expression de $(v-t)$ ainsi développée forme une série convergente; car l'intégration de dv, faisant acquérir des diviseurs à ses termes, on voit que, quel que soit t, $v-t$ sera moindre que

$$\frac{\left[A+\frac{2.(1-2\omega).q^i e^i}{\sqrt{2\pi}.(1-qe)}\right]^2}{1-e^2}$$

qui, comme on vient de le voir, forme une série convergente.

Il résulte de ce qui précède, que la condition nécessaire pour la convergence des séries qui expriment le rayon vecteur et l'anomalie vraie, développés suivant les puissances

de l'excentricité, est que l'excentricité soit moindre que

$$\frac{2.\sqrt{\omega.(1-\omega)}}{1-2\omega},$$

ω étant donné par l'équation

$$\frac{1-\omega}{\omega}=c^{\frac{2}{1-2\omega}}.$$

Les deux séries sont alors convergentes; c'est ce qui a lieu pour toutes les planètes, même pour les planètes télescopiques. Les valeurs supérieures de l'excentricité font diverger la série du rayon vecteur, et alors il faut recourir à d'autres développements. Tel est le cas de la comète à courte période.

III.

On développe encore les expressions de l'anomalie vraie et du rayon vecteur, suivant les sinus et cosinus multiples de l'anomalie moyenne. Soit alors

$$v=t+a^{(1)}.\sin.t+a^{(2)}.\sin.2t\ldots+a^{(i)}.\sin.it+\text{etc.}$$

$a^{(1)}, a^{(2)}$, etc. étant des fonctions de l'excentricité. On peut facilement démontrer que la série est toujours convergente. En effet, on a

$$\int(v-t).dt.\sin.it=\pi.a^{(i)}$$

l'intégrale étant prise depuis t nul, jusqu'à t égale 2π. Or, on a dans ces limites, en intégrant par parties,

$$dt.(v-t).\sin.it=\frac{1}{i}.\int dt\left(\frac{dv}{dt}-1\right).\cos.it=-\frac{1}{i^2}.\int dt\sin.it.\frac{ddv}{dt^2};$$

on aura donc

$$a^{(i)}=-\frac{1}{i^2\pi}.\int dt.\sin.it.\frac{ddv}{dt^2}.$$

l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{R^2}$$

donne

$$\frac{ddv}{dt^2} = -\frac{2.\sqrt{1-e^2}}{R^3}.\frac{dR}{dt}.$$

Au périhélie et à l'aphélie, $\frac{dR}{dt}$ est nul: $\frac{dR}{R^3}dt$ est positif, en allant du premier de ces points au second; et négatif, du second au premier. Soit k sa plus grande valeur positive; $-k$ sera sa plus grande valeur négative. En supposant donc que les valeurs de sin. it soient positives et égales à l'unité, depuis le périhélie jusqu'à l'aphélie, et négatives et égales à -1, depuis l'aphélie jusqu'au périhélie; on voit que l'intégrale $\int dt \sin. it.\frac{\frac{dR}{dt}}{R^3}$ prise depuis la périhélie jusqu'à l'aphélie, sera moindre, abstraction faite du signe, que $2k\pi$. De là il suit que $a^{(i)}$, abstraction faite du signe, est moindre que

$$\frac{4\pi.k.\sqrt{1-e^2}}{i^2}.$$

Ce terme devient nul, lorsque i est infini. De plus, la série de l'expression précédente de v, à partir de i supposé très-grand, est moindre que

$$\frac{4\pi.k.\sqrt{1-e^2}}{i};$$

quantité qui devient nulle, lorsque i est infini. Cette série est donc convergente.

Considérons de la même manière l'expression de R développée dans une série ordonnée par rapport aux cosinus de t et de ses multiples. Soit

$$R = b^{(0)} + b^{(1)}.\cos.t \ldots + b^{(i)}.\cos.it + \text{etc.}$$

on aura

$$\pi.b^{(i)} = \int R\,dt.\cos.it$$

l'intégrale étant prise depuis t nul jusqu'à t égal à 2π; ce qui donne

$$\pi.b^{(i)} = -\frac{1}{i^2}.\int dt.\cos.it.\frac{ddR}{dt^2}.$$

Les formules du mouvement elliptique donnent

$$\frac{ddR}{dt^2} = \frac{1 - e^2 - R}{R^3}.$$

Cette dernière quantité est toujours négative. Désignons par $-k'$ son *maximum*, et supposons $\cos.it$ égal à l'unité; on aura, abstraction faite du signe, $\pi b^{(i)}$ moindre que $\frac{2k'\pi}{i^2}$; d'où il suit que la série de l'expression de R est convergente.

On peut, en suivant la méthode exposée dans le n° précédent, déterminer la valeur approchée de $b^{(i)}$, lorsque i est un grand nombre. Pour cela j'observe que l'expression de R développée en série par rapport aux puissances de l'excentricité, et que nous avons rapportée dans l'article premier, donne

$$b^{(i)} = -\frac{e^i.i^{i-2}}{1.2.3\ldots i.2^{i-1}}.\left[i - \frac{\overline{i+2}}{1.\overline{i+1}}\left(\frac{ei}{2}\right)^2 + \frac{\overline{i+4}}{1.2.\overline{i+1}.\overline{i+2}}.\left(\frac{ei}{2}\right)^4 - \frac{\overline{i+6}}{1.2.3.\overline{i+1}.\overline{i+2}.\overline{i+3}}.\left(\frac{ei}{2}\right)^6 + \text{etc.}\right].$$

Le terme général de cette expression est

$$\pm \frac{e^i . i^{i-2}}{1.2.3\ldots i.2^{i-1}} \cdot \frac{(i+2r).\left(\frac{ie}{2}\right)^{2r}}{1.2.3\ldots r.\overline{i+1}.\overline{i+2}\ldots\overline{i+r}}.$$

Si l'on observe que r étant un très-grand nombre, on a à fort peu près

$$1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots\overline{i+r} = r^{r+\frac{1}{2}}.(i+r)^{i+r+\frac{1}{2}}.c^{-i-2r}.2\pi;$$

on peut donner à ce terme, la forme

$$\pm \frac{e^i.c^i.i^{i-2}.(i+2r)}{2^i.\pi.(i+r)^i.\sqrt{r.\overline{i+r}}} \cdot \left(\frac{e^2\, i^2 .c}{4r.\overline{i+r}}\right)^i;$$

quantité qui devient nulle, lorsque r est infini. La série de l'expression de $b^{(i)}$ est donc convergente.

Pour avoir sa valeur approchée, je considère la série

$$i + \frac{\overline{i+2}}{1.\overline{i+1}} \cdot \left(\frac{ei}{2}\right)^2 + \frac{\overline{i+4}}{1.2.\overline{i+1}.\overline{i+2}} \cdot \left(\frac{ei}{2}\right)^4 + \text{etc.}; \quad (m)$$

dont le terme général est

$$\frac{(i+2r).\left(\frac{ie}{2}\right)^{2r}}{1.2.3\ldots r.\overline{i+1}.\overline{i+2}\ldots\overline{i+r}}.$$

On aura, par la méthode exposée dans l'article premier, la somme de cette série, fort approchée lorsque i est un très-grand nombre. Nommons p le terme précédent, et supposons qu'il soit le plus grand des termes de la série. Pour avoir le rang qu'il y occupe, on l'égalera, suivant la méthode citée, au terme qui le précède; ce qui donne

$$(i+2r-2).r.\overline{i+r} = (i+2r).\frac{i^2\, e^2}{4};$$

d'où l'on tire à fort peu près

$$r = \frac{i.\sqrt{1+e^2} - i}{2}.$$

Le terme qui suit p, d'un rang supérieur de t, est

$$\frac{p.\frac{i+2r-t}{i+2r}.\left(\frac{ci}{2}\right)^{2t}}{\overline{r+1}.\overline{r+2}\ldots\overline{r+t}.\overline{i+r+1}.\overline{i+r+2}\ldots\overline{i+r+t}}.$$

En appliquant ici l'analyse de l'article premier, il est facile de voir que le logarithme de ce terme est à très-peu-près,

$$\log.p - \frac{t}{i+2r} + 2t.\log.\frac{ei}{2} - t.\log.r - \frac{(1+2+3\ldots+t)}{r}$$
$$- t.\log.\overline{i+r} - \frac{(1+2+3\ldots+t)}{i+r}.$$

Mais on a à très-peu-près

$$\log.(r.\overline{i+r}) = 2\log.\frac{ei}{2};$$

en ne conservant donc, conformement à la méthode citée, parmi les termes de l'ordre $\frac{1}{i}$, que ceux qui sont multipliés par t^2, et observant que

$$1+2+3\ldots+t = \frac{t^2+t}{2};$$

le logarithme du terme placé à la distance t du terme *maximum* sera

$$\log.p - \frac{\overline{i+2r}.t^2}{2r.\overline{i+r}};$$

ce terme sera donc

$$p.c^{-\frac{\overline{i+2r}.t^2}{2r.\overline{i+r}}}.$$

Il est facile de voir que ce sera aussi l'expression du terme qui précède p, du même intervalle t. La somme de la série (m) sera donc à très-peu-près

$$p.\int dt.c^{-\frac{(i+2r).t^2}{2r.\overline{i+r}}}$$

l'intégrale étant prise depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=\infty$; ce qui donne cette somme égale à

$$p.\sqrt{2\pi}.\sqrt{\frac{r.\overline{i+r}}{i+2r}}.$$

Si dans l'expression précédente de p, on substitue au lien du produit

$$1.2.3\ldots r.\overline{i+1}.\overline{i+2}\ldots\overline{i+r}$$

sa valeur très-rapprochée

$$\frac{(r.\overline{i+r})^r.(i+r)^i.2\pi.c^{-i-2r}.\sqrt{r.\overline{i+r}}}{1.2.3\ldots i}$$

on aura

$$p=\frac{1.2.3\ldots i.(i+2r).c^{i+2r}}{2\pi.\sqrt{r.\overline{i+r}}.(i+r)^i};$$

ce qui, en observant que $i+2r$ est égal à $i.\sqrt{1+e^2}$, et que $i+r$ est égal à

$$\frac{i\sqrt{1+e^2}+i}{2};$$

donne pour la somme de la série (m),

$$\frac{1.2.3\ldots i.(1+e^2)^{\frac{1}{4}}.2^i.c^{i\sqrt{1+e^2}}.\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi}.i^i.(\sqrt{1+e^2}+1)^i}.$$

En changeant e^2 dans $-e^2$, dans cette expression, on aura

la valeur fort approchée de la série

$$i - \frac{\overline{i+2}}{1.\overline{i+1}}\cdot\left(\frac{ei}{2}\right)^2 + \frac{\overline{i+4}\cdot\left(\frac{ei}{2}\right)^4}{1.2.\overline{i+1}.\overline{i+2}} - \frac{\overline{i+6}\cdot\left(\frac{ei}{2}\right)^6}{1.2.3.\overline{i+1}.\overline{i+2}.\overline{i+3}} + \text{etc.}$$

Ces passages du positif au négatif, comme du réel à l'imaginaire, ne doivent être employés qu'avec une grande circonspection. Mais ici, e^2 était indéterminé, on peut les employer sans crainte. J'en ai reconnu d'ailleurs l'exactitude, par une autre analyse. On a ainsi

$$b^{(i)} = -\frac{2.(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}{i\sqrt{i}.\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{c^{i\sqrt{1-c^2}}.e^i}{(1+\sqrt{1-e^2})^i}.$$

Lorsque i est infini, cette valeur de $b^{(i)}$ reste toujours infiniment petite, quel que soit e, pourvu qu'il n'excède pas l'unité.

MÉMOIRE

Sur l'état de la végétation au sommet du Pic du Midi de Bagnères;

PAR M. L. RAMOND.

Lu à l'Académie les 16 janvier et 13 mars 1826.

DÈS mes premiers voyages au Pic du Midi, mon attention se porta sur les plantes que j'apercevais au sommet. On en voit d'abord fort peu : le regard s'arrête sur quelques espèces plus apparentes. Je ne tardai pas à en accroître la liste, et à les recueillir avec l'intérêt que m'inspirait leur séjour sur une cime également remarquable par son isolement et par sa hauteur. Peu à peu je conçus l'idée de compléter la Flore de ce site particulier. Les bornes de l'espace suffisaient déja pour faire de cette petite Flore un objet de curiosité : la nature du lieu la sort de la classe des curiosités stériles.

En effet, on s'est plu de tout temps à considérer la distribution des plantes sur le penchant des montagnes, comme une représentation de l'échelle végétale, prise de la base de ces montagnes au pôle. C'est un de ces grands aperçus qui naissent d'un premier coup d'œil sur l'ordonnance de la nature, et qui appartiennent à l'instinct de la science plutôt qu'à ses méditations. Ils devancent l'observation, mais en même temps ils l'éveillent, lui tracent de nouvelles routes,

et lui doivent à leur tour le degré de précision qui leur manque.

Nul doute que l'abaissement progressif de la température ne dispose les végétaux à se ranger sur les divers étages des monts comme aux différentes zones de la terre. Il est reconnu, par exemple, que les arbres s'arrêtent à certaines hauteurs, comme à certaines latitudes, et qu'il y a une analogie remarquable entre les plantes voisines des glaces arctiques et les plantes voisines des glaces alpines; mais on doit s'attendre aussi à trouver cette conformité plus ou moins modifiée par la nature des deux stations et les circonstances qui les distinguent. Des températures qui semblent pareilles, à ne considérer que leur terme moyen, sont loin d'avoir la même marche et d'être pareillement graduées. On ne retrouve au nombre de leurs éléments, ni le même ordre de saisons, ni une succession semblable des jours et des nuits. L'état de l'air, le poids de ses colonnes, sa constitution et ses mélanges, la nature des météores dont l'atmosphère locale est habituellement le théâtre, viennent encore apporter, dans la similitude générale, des dissemblances particulières. Ensuite les terrains ont leurs exigences; la dissémination, les migrations des végétaux ont leurs caprices; et les diverses régions du globe, diversement dotées dans les distributions primitives, livrent à l'influence de climats analogues, des séries d'espèces souvent très-différentes.

Ainsi la similitude qui paraît régner entre la végétation alpine et la végétation polaire, doit se borner à des ressemblances générales, et porter plus rarement sur les espèces, plus souvent sur certains genres et certaines classes. Les observations de détail qui tendent à spécifier exactement les

faits, parviendront seules à fixer le caractère de ces classes. Considérée sous ce point de vue, la végétation des hautes cimes acquiert un nouvel intérêt, et celle du Pic du Midi devient un objet de comparaison de quelque importance, par le nombre des espèces qui se trouvent réunies sur un point aussi caractéristique et dans un espace aussi borné.

Ce pic est situé sur la lisière de la chaîne, et les longues crêtes dont il forme le comble, n'offrent à la vue aucune autre sommité saillante, si ce n'est le Pic de Montaigu, qui en est éloigné de deux lieues, et lui est inférieur de 560 mètres.

Du côté du sud, la partie de la chaîne qui le surpasse en élévation se trouve à une distance où elle lui devient à peu près étrangère. La masse du Marboré et du mont Perdu en est éloignée de 32,000 mètres, Vignemale de 24,000 au moins; les groupes de Néouvielle et du Pic Long sont à trois lieues; et les montagnes intermédiaires s'abaissant rapidement aux approches du Pic du Midi, laissent son sommet dominer sans obstacle tout l'espace qui le sépare des montagnes supérieures.

Du côté du nord, l'isolement est bien plus absolu encore. Là le Pic plonge brusquement vers de profondes vallées, et les commande de si haut qu'à peine on compte quelques échelons entre sa cime et la plaine.

Ainsi son atmosphère particulière est suffisamment libre, assez indépendante de l'influence des montagnes méridionales, pour que le climat de son sommet puisse être considéré comme régi uniquement par l'élévation combinée avec la latitude; et l'état de la végétation, comme l'expression nette et simple de l'action réunie de ces deux causes,

s'exerçant sur l'ensemble des espèces qui leur ont été livrées par la dissémination originaire et ses extensions successives.

La latitude du Pic est de 42° 56′. Quant à sa hauteur, elle avait été fixée à 1507 toises, par les opérations de Vidal et Reboul, dont j'ai, dans le temps, adopté les résultats. De nouvelles observations déterminent aujourd'hui M. Reboul à réduire cette hauteur à 1493 (Ann. de chimie et de phys., juillet 1817, tom. V, pag. 249). La correction porterait, non sur l'élévation du Pic au-dessus de Tarbes : (celle-là est bien certaine), mais sur l'élévation du sol de Tarbes au-dessus de la mer, et celle-ci ne me semble rien moins que définitivement déterminée, car mettant à part tout autre motif d'incertitude, encore faudrait-il, avant tout, savoir si l'Océan et la Méditerranée sont précisément au même niveau. Au reste, en attendant que nos doutes soient levés par les opérations géodésiques récemment entreprises, nous ne risquerons pas de nous éloigner beaucoup de la vérité, en évaluant la hauteur de cette montagne à 1500 toises, ou 2924 mètres.

L'abaissement de la colonne de mercure est d'accord avec cette évaluation. J'ai porté seize fois les instruments météorologiques au sommet du Pic. La hauteur moyenne du baromètre, ramenée à la température 12° 5, du therm. cent., a été 54^{c} 3^{mm}, 68 ou 20$^{p.}$ 1$^{l.}$ 02. La plus grande élévation que j'aie eu occasion d'observer, est 54^{c} 9^{mm} 95 (20$^{p.}$ 3$^{l.}$ 79). Pour obtenir le minimum, j'ai saisi l'instant d'une baisse considérable, survenue durant la bourrasque de l'équinoxe d'automne; et ayant gravi la montagne en hâte, de nuit et par un très-mauvais temps, je vis le baromètre descendre à 55^{c}, 6^{mm} 28 (19$^{p.}$ 9$^{l.}$ 54). Ainsi l'étendue totale de la variation que j'ai été à portée de constater, est de 13$^{mm.}$ 67, ou un peu

plus de six lignes ; et quant à l'intervalle de temps qu'elle embrasse, elle se rapporte aux mois de juillet, août, septembre et octobre, pris dans l'espace de cinq années successives.

A l'appui de ces observations, je suis heureux d'avoir à citer celles que firent, il y a un demi-siècle et sur le même sommet, deux savants dont la mémoire nous est chère. Le 28 août 1774. Darcet et Monge y virent le baromètre à $19^{p.}$ 11 , et le 31 du même mois, à 20 $^{p.}$ $2^{l.}$ $\frac{2}{3}$. Ce sont là les extrêmes de la variation qu'ils ont eu occasion d'observer : elle se réduit à $3^{l.}$ $\frac{1}{3}$: cette variation, comme ces hauteurs barométriques, se trouvent exactement comprises dans les limites des miennes.

Je puise ces détails dans la Dissertation sur l'état des Pyrénées, publiée en 1776, par Darcet, ouvrage extrêmement remarquable pour le temps où il a paru (*voyez* p. 105, 109, 111). J'y trouve aussi l'indication de la plus grande chaleur que ce savant ait observée au sommet du Pic : en éliminant les observations qui ont été faites, le thermomètre placé à terre ou exposé au soleil, cette chaleur s'est élevée, le 31 août 1774, à 13° $\frac{1}{2}$ (*voy.* p. 209). C'est précisément celle que j'y éprouvai trente-un ans après Darcet, le 30 août 1805, et c'est aussi la plus forte que j'aie observée dans mes nombreux voyages. Le thermomètre centigrade monta à 16° 8, et je constatai de mon mieux cette température, en écartant plusieurs indications, ou équivoques, ou visiblement altérées par des accidents passagers. Or, le même jour, dans mon cabinet à Barèges, le thermomètre marquait 28° 2, et cette chaleur est réputée forte, dans un lieu élevé de 1270 mètres au-dessus de la mer. Elle y outrepasse rarement ces limites; en sorte

que 16 à 17°, qui représentaient cette température au haut du Pic, y sont vraisemblablement le maximum des étés ordinaires. Mais comme j'ai vu aussi, à Barèges, le thermomètre atteindre le 29ᵉ et le 30ᵉ degré, ce qui, au reste, ne m'est arrivé que deux fois, à sept années d'intervalle, et comme il est à présumer qu'au Pic l'augmentation aura été proportionnelle, j'admettrai sans peine que dans ces étés extraordinaires, on y aurait trouvé le thermomètre à 18 ou 19 degrés. Ce qu'il y a toutefois de bien certain, c'est qu'on ne le verra guère à cette hauteur, si l'on a de bons instruments, s'ils sont convenablement placés, exposés à l'air libre, et pourtant suffisamment garantis de l'action directe et indirecte du soleil, mais surtout défendus, autant qu'il est possible, du rayonnement du sol. Car ce sol aride et noirâtre s'échauffe quelquefois à un tel point, que j'y ai vu une fois le thermomètre s'élever à 35°, tandis qu'au soleil, mais à l'air libre, il marquait seulement + 5°6, et à l'ombre + 4°,0.

Je ne connais pas d'observations plus délicates que celles de la température au sommet des montagnes. Les moyens imaginés jusqu'ici pour le placement des thermomètres, ne remplissent qu'imparfaitement leur objet. Cet instrument suspendu à 5 ou 6 pieds du sol, en est encore beaucoup trop voisin pour n'y pas puiser ou du chaud ou du froid. D'ailleurs, si on lui ménage de l'ombre, on lui ôte de l'air; et si, dans la vue de lui donner de l'air, on réduit l'ombre à celle du bâton qui le porte, le soleil, en dardant ses rayons aux limites de cette ombre, communique de la chaleur à l'étroite lame d'air interposée; enfin autour de lui, c'est un perpétuel échange de petites atmosphères locales, apportées par les vents des sommités voisines, soulevées de la plaine ou des

vallées adjacentes, échauffées dans un lieu, refroidies dans un autre. Le thermomètre monte, baisse, varie à tous moments. Bien que je me sois assidûment appliqué à discerner ce qui, dans ces variations, appartenait aux accidents, je ne sais si j'ai toujours réussi à me préserver d'erreur. Et comme en été presque toutes les perturbations vont dans le sens de la chaleur, je demeure persuadé que les évaluations auxquelles je me suis arrêté, pèchent plutôt par excès que par défaut.

Quoi qu'il en soit, le maximum du thermomètre au Pic du Midi, tel que je viens de le fixer, assimile déja le climat de sa cime à celui des contrées fort avancées vers le pôle. Pour compléter les comparaisons, il faudrait avoir, en outre, constaté le minimum, ce qui ne me semble guère praticable en un lieu pareil. Je ne l'ai pas tenté; mais à défaut d'observations directes, quelques analogies viendront à notre secours. Dans nos régions, la variation mensuelle du thermomètre n'est pas moindre de 18 à 20 degrés. S'il en est ainsi au Pic, il y doit geler jusque dans les mois qui présentent le maximum de chaleur, et ces gelées doivent même aller jusqu'à un ou deux degrés au-dessous de zéro. On n'a donc pas besoin de recourir au rayonnement et à l'évaporation pour s'expliquer la formation de la glace très-solide, qu'il n'est pas rare de rencontrer en juillet et en août, dans les parties humides de ses pentes. Quant au minimum de l'hiver, les moyens de vérification nous manquent entièrement, mais nous savons que la variation annuelle du thermomètre est pour nous d'environ 45 degrés, et excède souvent cette étendue. En partant donc du maximum observé, nous serons fondés à conclure que, dans les hivers ordinaires, le froid ne peut guère être moindre de 26 ou 28 degrés, et qu'il doit

atteindre à 30° ou 35° dans les hivers rigoureux. Ainsi, sous le rapport des extrêmes de la température, ce n'est rien exagérer que de comparer le climat de la cime du Pic du Midi à celui des contrées comprises entre le 65ᵉ et le 70ᵉ degré de latitude.

Cependant il n'y a point ici de neiges permanentes. Dès la fin de l'été on n'en aperçoit plus que des lambeaux confinés dans des creux abrités du soleil. Rarement ils subsistent d'une année à l'autre, et ne durent jamais assez pour avoir le temps de former une couche, tandis qu'à peu de distance on voit sur les flancs de Néouvielle et du pic Long, des glaciers fort étendus à une élévation bien moindre.

Cette différence s'expliquerait déja par la position seule du Pic. La limite inférieure des neiges permanentes est au minimum d'élévation absolue vers le centre des chaînes, parce que là se réunissent toutes les causes de froid : cette même limite s'élève d'autant plus qu'on approche davantage de la lisière, parce qu'ici plusieurs de ces causes cèdent, d'une part, à l'abaissement graduel des montagnes, et de l'autre, à l'invasion de l'atmosphère des plaines (*voy.* mes Obs. sur les Pyrénées, chap. XIV); mais quand bien même l'élévation relative du Pic du Midi le soustrairait à une partie des conséquences de sa position, sa forme et ses aspects suffiraient pour le défendre de l'invasion des glaciers. Les neiges ne sauraient s'accumuler nulle part; une seule de ses faces leur prêterait appui, et celle-là est précisément exposée au midi : elles n'y résistent ni à l'ardeur du soleil, ni à l'impétuosité dévorante des vents du sud, qui sont à ces hauteurs les vents les plus habituellement dominants. Au nord, au levant, au couchant, c'est une longue suite de précipices où

elles ne demeurent passagèrement suspendues que pour s'écrouler bientôt en lavanges. Quant aux cimes, leur superficie a si peu d'étendue que les neiges ne sauraient s'y maintenir contre le soleil qui les attaque, la pluie qui les lave, les pentes qui les attirent, le vent qui les y pouse.

Une crête de 18 à 20 pieds de long sur 5 ou 6 de large, courbée un peu en croissant, mais dont la direction générale est de l'est à l'ouest, voilà le point culminant du Pic en entier. Sur ses abords, les débris entassés d'un schiste micacé, dur et noirâtre; au pourtour, quelques-uns des ses feuillets debout; entre ces feuillets et ces débris, de menus fragments en gravier, en sable : voilà le sol aride où nous cherchons des plantes quand tout autre œil que celui du botaniste y apercevrait à peine des traces de végétation.

De l'extrémité orientale de cette crête dominante, on descend par une langue fort étroite vers un prolongement du sommet, placé dans la même direction, mais moins élevé de quelques toises. Cette langue ou cet isthme présente, du côté du nord, un escarpement en forme de ravin, et presque toujours comblé de neiges : elles y subsistent souvent jusqu'aux approches de l'hiver, et doivent se rencontrer quelquefois avec celles de l'année suivante : c'est le point de la montagne où elles sont le plus durables. Au midi, la pente est moins roide et assez bien gazonnée; la végétation a même gagné jusqu'à l'arête de notre isthme, et le gravier qui en constitue le sol est mélangé d'une portion sensible d'humus.

Le second sommet est inférieur au premier de 15^{m} 6 (48 pieds). Il a un peu plus d'étendue et un sol tout différent. Le calcaire blanc primitif, élément principal de la masse hétérogène du Pic du Midi, se montre là sans autre mélange

que celui d'un peu de gneiss granitiforme en veines irrégulières. Le terrain formé de ses débris est d'une blancheur éclatante, absorbe moins de chaleur que celui du sommet supérieur, en réfléchit davantage, exclut par conséquent quelques-unes des plantes de celui-là, et en nourrit à son tour quelques-unes qui lui sont particulières, mais offre d'ailleurs la même apparence d'aridité à quiconque n'y jette qu'un regard superficiel.

Au reste, la nudité d'une grande partie de ces cimes tient bien moins à la sécheresse du sol qu'à sa nature, à l'étendue que les rochers y occupent, à la mobilité des fragments dont les espaces intermédiaires sont formés. Sans doute l'eau ne saurait séjourner sur des terrains ainsi constitués, mais ils sont humectés long-temps par des neiges durables, ensuite ils le sont souvent par des neiges passagères, par les pluies, par les brouillards : où la végétation trouve assiette et repos, on voit croître une plante, et l'éclat de sa verdure dit assez que pour peu que la terre soit propice, ce n'est pas le ciel qui lui refuse ses faveurs.

Les deux cimes que je viens d'indiquer, et l'isthme qui les lie, cessent d'être séparément discernables aussitôt que l'on s'en éloigne, et forment en commun le sommet du Pic, quand on l'envisage d'une certaine distance. C'est là le sommet dont j'ai entrepris la Flore. La cime orientale est la limite inférieure de mes herborisations. Du côté du grand Pic je me suis prescrit les mêmes limites ; elles sont marquées par la cabane que Vidal et Reboul ont habitée, en 1787, et dont les ruines se trouvent précisément de niveau avec le sommet inférieur, c'est-à-dire à 48 pieds au-dessous du sommet principal.

Ce segment du Pic, ce rocher de 48 pieds de haut et d'une couple d'ares d'étendue, élancé à plus de 1300 toises au-dessus des plaines adjacentes; cette île, perdue dans l'océan de l'air, battue de ses tempêtes, et livrée à la froidure des régions supérieures, offrait à mon observation une localité spéciale, une des extrémités de notre globe, dont il m'a paru curieux de constater les productions.

J'y suis monté trente-cinq fois, en quinze années différentes. J'ai vu sa végétation à toutes ses époques, les années dans toutes leurs diversités.

Il me serait néanmoins difficile de fixer précisément l'instant où l'on verrait poindre les premières fleurs. En juin et souvent dans le milieu de juillet, les pentes sont encombrées de neiges, et quand même telle ou telle pointe de rocher s'en trouverait accidentellement dégagée, l'accès des cimes est ordinairement trop périlleux pour qu'on soit tenté d'y aller épier les premiers développements de la végétation. D'ailleurs les années diffèrent beaucoup entre elles, soit pour la quantité de neiges accumulées, soit pour l'époque du déblaiement. Ces variations avancent ou retardent la floraison d'une quinzaine de jours. Cependant il me paraît généralement vrai qu'il n'y a point de fleurs avant le solstice, et qu'il y en a quelques-unes vers le 1er juillet.

C'est donc avec notre été que le printemps du Pic commence. Les premières fleurs appartiennent principalement aux familles des véroniques et des primulacées.

En août la floraison devient générale : on entre en été.

Elle se soutient en septembre. Plusieurs espèces même ne fleurissent qu'alors. C'est le mois le plus favorable à l'ascension du Pic, celui où le temps est le plus assuré, le ciel plus

pur, l'air plus transparent, l'horizon plus net : ces avantages sont ceux de l'automne; ils ne se prolongent guère au-delà du terme marqué par la bourrasque de l'équinoxe.

Dès les premiers jours d'octobre la floraison a achevé de parcourir son cercle. Passé le 10 ou le 15, il n'y a plus rien. L'automne du Pic a fini quand le nôtre a commencé.

Ainsi trois mois et demi constituent à peu près toute la belle saison de ces cimes. Le reste appartient à l'hiver; et sa rigueur est loin encore de s'épuiser dans le cours des huit ou neuf mois qui lui sont dévolus : il gèle en juillet, en août; il tombe de la neige; et rien de moins extraordinaire que de voir, au milieu de l'été, le Pic blanchir à la suite d'un orage, et la neige s'y maintenir une couple de jours.

Voilà le climat : j'ai décrit le lieu; c'est là que j'ai réussi à constater l'existence de 133 espèces; savoir : 62 cryptogames et 71 phanérogames. Quelque considérable que ce nombre puisse paraître, eu égard à la petitesse de l'espace, à l'aridité du sol, aux intempéries de l'atmosphère, je l'aurais augmenté encore, si je m'étais appliqué à démêler ce que les rochers nourrissent de lichens imperceptibles ou défigurés; si j'avais réussi à déterminer tout ce que je voyais de brins de mousses dépourvues de fructification.

Les lichens forment la majeure partie des cryptogames, j'en ai reconnu 51 espèces. Plusieurs n'avaient pas été observés ailleurs. La Flore française indique celles que j'avais reconnues à l'époque de sa publication. Mon énumération contient la description des espèces que j'ai découvertes depuis.

Les hépatiques, les mousses et les fougères ne m'ont donné ensemble que 11 espèces.

Au reste, les cryptogames n'avaient qu'une part secon-

daire à mon attention. Je ne devais pas m'attendre à saisir, dans cette classe, la manifestation de l'influence que le climat exerce sur la distribution des autres végétaux. Soit qu'une organisation plus obtuse émousse en eux l'impression des vicissitudes atmosphériques, soit qu'au contraire une organisation plus subtile et plus souple les plie sans effort aux exigences des climats et au caprice des saisons, ils se répandent sur toute la surface de la terre, ne tenant compte pour leur développement que d'un petit nombre de circonstances également indépendantes, et de l'élévation des lieux et de leur latitude.

Les plantes phanérogames excitaient tout autrement mon intérêt, et j'ai lieu de croire qu'en quinze années de recherches, il m'en a peu échappé. Les 71 espèces que j'ai recueillies sont réparties en 50 genres et 23 familles. Les syngenèses forment à elles seules plus d'un sixième du total; les cypéracées, réunies aux graminées, un septième; les crucifères un douzième, les cariophyllées un autre douzième; les lysimachies, les joubarbes, les saxifrages, les rosacées, les légumineuses, chacune un dix-huitième. Les autres familles sont réduites à une ou deux espèces, et au terme de ma liste figure un amentacé, *salix retusa*, arbre par la conformation, sous-arbrisseau par la stature, herbe par l'aspect et les dimensions, unique représentant de sa tribu à une élévation qui laisse loin au-dessous d'elle ces grands végétaux dont la résistance échouerait contre les ouragans des cimes: ici rien ne subsiste que ce qui rampe, ou se cache ou plie.

Au reste, les nombres qui expriment le rapport de nos diverses familles entre elles, sont loin de s'accorder toujours

avec ceux que des comparaisons plus étendues ont fournis, soit aux laborieuses recherches de MM. Brown, Pursch, Wahlenberg, Decandolle, etc., soit aux vastes considérations développées par M. de Humboldt, dans la partie de ses immenses travaux qui concerne la distribution des formes végétales. Si l'on consulte le tableau où il établit le rapport des diverses familles à la masse totale des phanérogames (1), on trouve sans doute une conformité suffisante entre le nombre de nos légumineuses, de nos syngenèses, de nos glumacées, de nos crucifères, et les nombres que ce tableau leur assigne, tantôt pour les contrées arctiques, tantôt pour les contrées tempérées. On voit aussi la proportion des cryptogames relativement aux phanérogames, approcher de l'égalité qu'elle atteint au voisinage du pôle ; et nous apercevons, en général, une certaine tendance de nos rapports vers les quotients de la zone glaciale. Mais en même temps, plusieurs de nos familles se refusent à ces comparaisons, et des sections entières les déconcertent et les déplacent, alors même qu'elles ne les repoussent pas. Dans les unes prévalent les proportions du Nord, dans les autres ce sont les proportions du Midi. Ainsi le rapport de nos monocotylédones à la totalité des phanérogames est d'un à sept : nulle part on ne les a trouvées en si petite quantité ; il faudrait aller jusqu'à l'équateur, et là on rencontre seulement les rapports d'un à cinq et d'un à six. C'est vers le pôle, au contraire, qu'il faut tourner ses regards pour y chercher une proportion des cryptogames qui serve d'exemple à la nôtre. Encore

---

(1) Dict. d'hist. nat., t. XVIII, p. 436.

reste-t-il de notre côté une singularité qui n'en a point : nos lichens forment à eux seuls les cinq sixièmes de la classe, et les mousses à peine un dixième, en sorte que les deux cinquièmes de notre Flore sont la part d'une unique famille de cryptogames.

Ces anomalies n'ont rien qui doive nous surprendre. Un groupe de 133 espèces, prises en un seul et même lieu, est loin d'offrir une base assez large aux compensations qui ramèneraient les exceptions à la règle. La cime du Pic du Midi n'est pas une contrée : c'est un point dont le sol est aussi uniforme que limité. Ses rochers appellent les lichens; ses débris repoussent ce qui exige un terrain substantiel, demande l'ombre ou recherche l'humidité. On ne saurait appliquer qu'avec réserve à la végétation toute spéciale d'une localité toute particulière, des considérations générales qui embrassent à la fois de vastes pays, leurs sites divers et l'ensemble de leurs productions.

Quant à leur durée, nos plantes se partagent en deux séries dont la disproportion est remarquable : sur 71 espèces phanérogames, cinq seulement sont annuelles, une paraît bisannuelle, 65 sont vivaces. La nature, dira-t-on, se fiant plus ici à la durée des racines qu'à la fécondité des semences, s'est plu à mettre la végétation en harmonie avec la constitution physique du lieu. On dira tout de même que la constitution physique du lieu a opéré le triage des espèces tombées pêle-mêle des mains de l'inépuisable nature; et, en effet, les plantes annuelles n'ont qu'une existence précaire dans une région dont les intempéries compromettent tour-à-tour la fécondation des germes, la maturation du fruit, la germination des graines; tandis que les plantes vivaces

épuisent les chances par la longévité de leurs racines, et traversent les années en attendant les jours réservés à leur reproduction. Elles ont conquis le sol : les espèces annuelles ne font que l'emprunter. Un coup de vent les apporte, une gelée les détruit; celles que j'ai rencontrées au sommet du Pic, comme moi étrangères, ont peut-être disparu de même, et d'autres peut-être les remplacent pour être recueillies par d'autres que moi.

La végétation du sommet du Pic du Midi représente, à très-peu de chose près, celle de toutes les hautes sommités de cette partie des Pyrénées. L'absence ou la présence de telle ou telle plante sur l'une ou l'autre de ces diverses sommités, dépend uniquement de circonstances locales, qui tantôt attirent des pentes vers les cimes, tantôt repoussent des cimes vers les pentes, des espèces que les montagnes de cet ordre possèdent en commun. Mais il n'est pas sans intérêt de voir de quoi se compose la liste de celles qui sont confinées sur les sommets dont l'élévation excède celle du Pic du Midi.

La partie accessible des cimes de Néouvielle n'est élevée que d'environ 120^{m} de plus. Mais elle se trouve au point de départ d'un vaste glacier, et serrée de près par les neiges éternelles. J'y ai recueilli 21 espèces phanérogames, dont seize appartiennent à la cime du Pic du Midi, et deux ne lui sont pas étrangères. La première de celles-ci, *Luzula spicata,* se trouve peu au-dessous du sommet; et la seconde, *Potentilla frigida*, est représentée sur ses pentes par le *P. Brauniana* dont elle se distingue à peine. Il en reste trois seulement que je n'ai point vues au Pic, savoir : *Draba tomentosa, Ranunculus glacialis*, et *Saxifraga androsacea.*

Mais la première est au pic d'Ereslids, et j'ai rencontré les deux autres au sommet du Mont-Perdu ou sur ses abords.

Les sommets de Vignemale sont bien plus élevés, et dominent le Pic du Midi de 400 à 450 mètres; mais leurs crêtes ont beaucoup d'étendue, et la roideur des escarpements en écarte les neiges. Ces crêtes m'ont fourni 22 espèces, dont 15 se trouvent au sommet de notre Pic, et les sept autres sur ses pentes.

Au sommet du Mont-Perdu j'ai trouvé sept espèces de phanérogames. Cinq appartiennent à la cime du Pic du Midi; les deux autres, *cerastium alpinum* et *saxifraga androsacea*, se rencontrent ailleurs à des élévations bien moindres. Je les vis en fleur le 10 août; le temps était orageux, le soleil ardent; le vent soufflait avec impétuosité du sud-ouest, et pourtant le thermomètre centigrade ne s'éleva pas au-dessus de 6°.9 (5°.5. Réaum.): voilà les jours d'été de cette cime. Ici d'ailleurs l'espace accessible à la végétation est tellement resserré, il est si étroitement bloqué par les neiges, que c'est beaucoup si entre leur retraite et leur retour, nos plantes ont six semaines pour végéter et fleurir. Souvent même cet intervalle doit se réduire au point de ne pas leur en laisser le temps; et l'on est fondé à présumer qu'il y a telle année où le sol qui les nourrit ne voit pas entr'ouvrir le voile qui les couvre.

Qui sait jusqu'où peut se prolonger l'état de léthargie auquel ces plantes sont alors condamnées? et qui sait ce qu'il y en a d'enfouies sous les neiges et les glaces du Mont-Perdu, en attendant l'accident qui leur fera revoir le jour? J'ai une fois saisi la nature sur le fait: c'était au bord du glacier de Néouvielle. Je connaissais parfaitement ce glacier et ses li-

mites accoutumées, lorsqu'en 1796 il subit une retraite extraordinaire. Dans le ravin qu'il abandonnait, j'assistai au reveil de quelques plantes sortant d'un sommeil dont je n'ose évaluer la durée : elles végétaient vigoureusement et fleurirent au milieu de septembre, pour se rendormir bientôt sous de nouvelles neiges, que les années suivantes ont transformées en glace, et que je n'ai plus vues reculer.

J'y ai compté sept espèces. Cinq d'entre elles se rencontrent rarement sur les sommets, parce qu'elles recherchent l'ombre ou l'humidité; mais elles n'en appartiennent pas moins à cette tribu de plantes nivales, dont les affections ne sont satisfaites que dans les hautes régions où nous les trouvons. Il leur faut une année tout autrement partagée que la nôtre; il leur faut un petit nombre de beaux jours, et une végétation accélérée, suivie d'un long et profond repos. Elles craignent des chaleurs vives, et surtout des chaleurs soutenues; elles ne craignent pas moins le froid, et en sont préservées par les neiges qui, dans leur patrie, devancent les fortes gelées. Transportées dans nos plaines, ce sont de toutes les plantes étrangères à notre sol, celles qui se montrent les plus intraitables. On ne peut les plier au cours de nos saisons : notre printemps se traîne, notre été est trop chaud et trop long, notre hiver trop âpre et trop court; en juillet elles nous demandent de l'ombre, en décembre un abri, et sur le total de l'année, neuf ou dix mois de sommeil que nos climats leur refusent.

Les plantes des contrées polaires ont les mêmes besoins et se trouvent dans la même condition. Plusieurs d'entre elles viennent spontanément se mêler avec les nôtres, et l'on est moins étonné de les rencontrer que de ne pas les voir en

plus grand nombre. Aux hautes latitudes, en effet, le climat, quoique autrement modifié, n'agit pas autrement sur la vitalité des végétaux. Peu leur importe, durant tout le temps où ils sommeillent, comment se succèdent les jours et les nuits, comment procèdent les mois et les saisons. Des degrés de froid très-divers ne leur sont pas moins indifférents sous le manteau de neige qui égalise pour eux les températures. Ce qui les concerne, c'est la coupe générale de l'année; c'est la proportion établie entre la période du repos et celle des développements; c'est surtout la durée, la marche et la mesure de la chaleur qui préside aux diverses fonctions de leur vie active. Sous tous ces rapports, les plantes arctiques et les plantes alpines sont traitées de la même manière. Étroitement associées par cette communauté de condition, elles forment ensemble un groupe distinct dans le règne végétal, une petite tribu douée d'un tempérament particulier et d'une physionomie qui lui est propre. Leur aspect est le même : on serait bien en peine d'y démêler un caractère qui indiquât la diversité d'origine, ou pût servir à distinguer les espèces exclusivement affectées à une région, de celles que les deux régions possèdent en commun. Quel que soit le caprice des causes qui ont présidé à la répartition des espèces, et séparé les unes par d'énormes distances, tandis que les mêmes distances n'opposaient aucun obstacle à la rencontre des autres, nul doute, au moins, qu'elles ne pussent habiter toutes indistinctement les mêmes lieux, si la nature avait obéi seulement à la loi des climats, et si ses distributions n'eussent été primitivement soumises à des nécessités dont il nous est bien difficile de pénétrer le mystère.

La végétation de nos sommets nous présente toutes les anomalies de ces distributions.

A la cime du Pic du Midi, nous remarquons d'abord quelques plantes triviales, qu'il possède en commun avec les plaines adjacentes. Elles font peu de sacrifices à l'âpreté d'un climat aussi sévère. Seulement leur développement est restreint, et leurs dimensions sont amoindries. Quelques-unes se distinguent encore par un vert plus glauque, et cette modification est ordinairement accompagnée d'une moindre porosité de l'épiderme, d'où résulte la résistance qu'elles opposent à la dessiccation : voilà pour elles la part du climat tout entière.

Sauf ces plantes que le Pic à dû recevoir de proche en proche, sa végétation se compose généralement d'espèces étrangères aux contrées limitrophes, mais dont on retrouve la plus grande partie dans diverses chaînes, et plus particulièrement dans les Alpes du Dauphiné, de la Suisse et du Piémont. Ici les communications deviennent déja plus difficiles à supposer, vu la grandeur des intervalles, et la constitution physique des plaines interposées. Ajoutons que si l'on compare une à une les espèces qui paraissent habiter indifféremment les Alpes et les Pyrénées, il est rare qu'on n'y voie pas l'origine empreinte, et le caractère normal modifié par le caractère de la patrie.

Outre les plantes qui leur sont communes, chacune des deux chaînes en a qui lui sont propres. Le sommet de notre Pic en réunit dix ou douze, faisant partie de la végétation locale des Pyrénées; et dans ce nombre on en remarque une couple, si exactement calquées sur certaines espèces des Alpes, qu'on les dirait destinées à représenter ici le type de celles qu'à leur tour les Pyrénées ne possèdent pas.

Enfin, tandis que ces deux chaînes, presque contiguës, refusent de se communiquer une portion notable de leurs plantes respectives, elles vont l'une et l'autre emprunter aux régions les plus septentrionales, des espèces qu'on ne retrouve plus dans l'immense intervalle qui les en sépare.

Ces contrées glaciales, vers lesquelles nos végétations alpines nous rappellent sans cesse, offrent à notre examen des combinaisons absolument pareilles. On pourrait en choisir partout des exemples : le voyage du capitaine Parry et le beau travail de R. Brown sur les plantes de l'île Melville, nous dispensent de chercher ces exemples ailleurs.

Sans doute les hivers de cette île sont beaucoup plus âpres que ceux du Pic du Midi; mais nous savons que pour les végétaux, l'abondance des neiges annulle ces différences. Les étés de ces deux régions ont au contraire beaucoup de ressemblance. Les gelées de juillet et d'août ne paraissent pas plus fortes à Melville qu'à la cime de notre Pic; et quant à la chaleur de ces mois, elle est à peu près pareille. Le maximum observé par le capitaine Parry, n'est guère inférieur au nôtre que d'un degré, et cette différence peut disparaître par des observations ultérieures, car ce maximum est établi sur les observations d'une seule année, et ce serait un grand hasard si l'on avait justement rencontré une des années les plus chaudes de l'île Melville. Je conviens que ces analogies sont incomplètes, et que le caractère des climats ne réside pas uniquement dans les extrêmes de la température; mais ce sont au moins des traits de ressemblance qui ont leur valeur dans les rapprochements que j'essaie. L'île Melville nous fournit 116 espèces : c'est 17 de moins que n'en possède à lui seul le sommet du Pic du

Midi; mais nonobstant son indigence, cette flore hyperborée est une flore générale et complète. On doit s'attendre à y trouver les classes et les familles dans un tout autre rapport que sur le terrain uniforme et borné du Pic. En effet, les phanérogames y sont aux cryptogames comme 5 à 2, et les dicotylédones dans la même proportion eu égard aux monocotylédones. Les graminées, réunies aux cypéracées, forment plus d'un quart des phanérogames ; les crucifères un septième, les saxifrages tout autant, les syngénèses un treizième seulement. Sur 49 cryptogames on compte 30 mousses : au sommet du Pic du Midi je n'en ai compté que 6; mais ici nous avons 51 lichens, et là il n'y en a que 15 : voilà de grandes différences; ce sont celles d'un pays comparé à un site; elles diminuent à mesure qu'on recule les limites de celui-ci. Presque tous les lichens de l'île Melville et une bonne partie de ses mousses, habitent les Pyrénées et les Alpes; et les deux chaînes partagent avec elle plus d'un tiers de sa végétation. On pourrait même ajouter à ce tiers, plusieurs espèces trop faiblement distinguées des nôtres, pour n'être pas considérées comme de simples variétés locales; et dans le nombre de celles qui sont réellement différentes, aucune ne nous offre un type qui nous soit étranger. Si nous nous réduisons aux plantes dont l'identité spécifique est hors de contestation, le sommet du Pic du Midi, dans son étroite circonscription, ne renferme pas moins de 10 à 12 espèces de l'île Melville. Mais si nous faisons entrer dans nos comparaisons celles qu'une étroite analogie semble avoir destinées à se représenter réciproquement, dès-lors une portion notable de la végétation de chacune des deux stations est en quelque sorte la copie de la végétation de l'autre; et, ce qui est assez singulier en ce genre pour mériter d'être

remarqué : l'île Melville ne possède comme la cime du Pic du Midi qu'un seul arbrisseau, et cet arbrisseau est de même un saule, réduit aux mêmes dimensions, couché de même, et bien moins distingué du nôtre par ses caractères spécifiques, qu'il n'est semblable par ses caractères habituels.

Ainsi, avec des éléments en partie différents, la Flore de cette île glaciale offre la contre-épreuve de la Flore de notre sommet : espèces en nombre à peu près égal, appartenant aux mêmes familles et souvent aux mêmes genres, plus ou moins analogues aux nôtres quand elles ne sont pas exactement identiques, semblables de port et d'aspect, et se trouvant dans des rapports pareils avec la végétation de lieux tantôt voisins et tantôt éloignés : c'est d'abord, comme au Pic du Midi, un certain nombre de plantes qui paraissent exclusivement propres à cette région ; c'est ensuite un fonds de végétation qu'elle partage avec les régions environnantes; c'est enfin quelques espèces qui se retrouvent isolées de leur cortège, dans des contrées fort distantes, comme pour attester l'analogie de climats séparés par des intervalles de 20 et 30 degrés.

Tout est à deux faces dans ces distributions si singulières. Les espèces qui vivent également au voisinage du pôle et au sommet de nos montagnes, peuvent être, si l'on veut, l'indication pure et simple du climat, et constater la conformité physique des deux stations, en ce qui concerne les besoins de la vie végétale. Considérées sous un autre point de vue, elles seront seulement des espèces plus dociles et susceptibles de se plier aux différences inaperçues de situations d'ailleurs suffisamment analogues. Le même doute ne s'élève pas à l'égard des plantes que nos sommets possèdent,

soit en propre, soit en commun, avec les hautes Alpes : celles-ci indiquent le climat, combiné avec la position géographique, et représentent l'influence de l'un, appliquée aux formes végétales que l'autre lui fournit. A mesure que l'on descend de nos cimes, on voit prédominer de plus en plus le caractère de la position, et l'échelle des températures tracée par la succession des espèces locales. Bientôt s'y mêlent, en proportion croissante, ces plantes cosmopolites qui n'indiquent plus ni climat ni position. Plus bas des arbrisseaux, puis quelques conifères rabougris, annoncent les forêts que l'on va trouver dans les vallées. Peu à peu la latitude prend le dessus, la base des montagnes est envahie par la végétation des plaines; les espèces méridionales paraissent. Sur ces limites, où les deux régions sont en contact, on doit s'attendre à un singulier mélange des deux végétations; mais ce qui peut exciter l'étonnement, c'est de voir paraître, au milieu des plantes du pays, des espèces notables échappées aux Flores du Portugal, de l'Espagne, de la Barbarie, de la Grèce, de l'Angleterre, pénétrant jusque dans les gorges des Pyrénées françaises, sans que la diversité des climats, les distances, l'interposition des montagnes et des mers, aient mis obstacle à des rencontres aussi extraordinaires. (*Merendera Bulbocodium. N.* — *Crocus multifidus.* N. — *Scilla umbellata.* N. — *Silene tridentata. Desf.* — *Pinguicula lusitanica.* L. — *Narcissus Bulbocodium*, etc.)

Cette esquisse suffit pour établir la nature de l'analogie qui règne entre l'échelle végétale prise de la base de nos montagnes à leur sommet, et la même échelle prise de nos latitudes au pôle : la première représente en raccourci la seconde, mais la représente d'une manière abstraite et éga-

lement indépendante soit de la similitude, soit de la diversité des espèces que la dissémination primitive a livrées, de part et d'autre, aux distributions tracées par le décroissement des températures.

Il en est partout de même, et sans sortir du cercle étroit où nos observations se renferment, nous avons rencontré sous nos pas tout ce que la répartition des végétaux à la surface du globe, offre de combinaisons inattendues et de problèmes à résoudre. La confusion naît pour nous sur chacun des points où s'entre-croisent les effets de diverses causes, également simples, mais devenues complexes par leur concours. Il y a d'abord des créations spéciales, appropriées aux terrains, aux eaux et à leurs diversités; il y a ensuite des créations locales, les unes affectées à certains climats, les autres renfermées dans certaines circonscriptions géographiques; il y a des créations plus étendues et plus vaguement limitées, qui tantôt environnent celles-là, et tantôt se confondent avec elles; enfin, à travers les plantes que leur organisation confine dans des lieux déterminés, se jette une multitude d'espèces vagabondes qui vont se propageant de proche en proche, par des moyens de dissémination réguliers, ou bien franchissent tout-à-coup de vastes intervalles, par des accidents dont les migrations de l'homme et des animaux font partie, mais qui se retrouvent aussi dans des localités où l'on ne saurait s'expliquer leur présence, sans imaginer l'existence d'anciennes communications dont la trace est aujourd'hui effacée, ou bien sans supposer autant de créations locales que nous observons de ces répétitions.

A la rencontre de ces végétations diverses, rien de régulier, de constant, d'absolu, dans le rang qu'occupent à leur égard

les différentes influences auxquelles on les voit simultanément soumises; et parmi les combinaisons infiniment variées du climat, de l'habitation, du lieu, chacune de ces causes est tour-à-tour prédominante et subordonnée. Ici la végétation locale étend son caractère propre jusqu'à la végétation du climat; là celle du climat conserve le sien, au milieu de formes qui lui sont étrangères; sur tel point, les conditions imposées par l'habitation commandent au climat et au lieu; sur tel autre, ces conditions reçoivent la loi de tous deux. Et ce n'est pas tout : les diverses formes végétales sont loin de se prêter aux mêmes influences, avec une égale docilité. Nous voyons des types plus fermes et plus rebelles, résister à toute modification; tantôt exclusivement affectionnés à certaines positions, ils refusent obstinément d'en sortir; tantôt disséminés çà et là, ils n'ont fait à la diversité des lieux le sacrifice d'aucune portion de leurs caractères, et se représentent partout comme des nécessités de la création végétale. D'autres types, au contraire, ont tant de flexibilité que l'on ne saurait les concevoir que d'une manière en quelque sorte abstraite : c'est un module autour duquel la nature se joue; elle le copie, l'imite, l'altère, le modifie de mille manières : ce sont des groupes d'espèces où tout diffère, où tout se ressemble, où rien ne se distingue sans rappeler une forme commune qui n'est ni l'une ni l'autre de ces espèces, et qui les renferme toutes.

Quelle idée nous formerons-nous de la parenté de celles-ci? Sont-elles nées distinctes, mais dans des circonstances assez semblables pour que la conformité de ces circonstances explique ce que leurs formes ont d'analogie? ou bien y verrons-nous les variations de quelques espèces primitives, sub-

divisées en races constantes par l'action réunie des lieux et du temps?

Le problème embrasse plus de terrain qu'il ne semble. On ne sait bientôt plus quelle portion du règne végétal soustraire à ces doutes; et les mêmes questions se renouvellent à l'aspect de chacune des divisions du règne organique. Les animaux nous présentent également et des types plus tenaces et des types plus flexibles, des formes affectées aux lieux, aux climats, à certaines divisions géographiques, des espèces stationnaires, des espèces errantes, des migrations, des mélanges et toute la confusion qui en est la suite. Dans l'état où nous trouvons les choses, quelle est la part d'action des causes premières? quelle part a été abandonnée aux causes secondes? et celles-ci quelles sont-elles, et quelle a été leur puissance dans les temps reculés où les forces productrices déployaient toute leur énergie? Nous voilà en présence des révolutions du globe: le botaniste interroge le géologue; le géologue appelle en témoignage les trois règnes de la nature; et les questions et les témoignages vont se perdre ensemble au sein des ténèbres qui enveloppent l'enfance de notre vieux monde.

Observons, comparons, amassons patiemment des faits, et arrêtons-nous, s'il se peut, devant ces obscurités qu'éclairerait mal l'incertaine lumière de nos conjectures. A peine une question s'élève: d'autres naissent en foule de son sein, et nous ont bientôt entraînés hors de la portée de notre vue. A l'aspect d'un ordre de phénomènes que l'observation aperçoit, mais qu'elle ne saurait atteindre, il faut bien s'arrêter, et laisser l'hypothèse, bien ou mal assise sur le peu que nous savons, hasarder ses sondes dans les profondeurs où se cache l'origine des choses.

OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES.

Ce que j'avais d'observations météorologiques faites antérieurement à 1802, soit au Pic, soit sur d'autres cimes, soit enfin à Barèges et à Bagnères, m'a été enlevé avec dix années de travaux, par un grand événement dont mes pertes sont un incident trop peu considérable pour mériter d'être remarqué.

Les observations qui me sont restées, datent de l'époque où je fis choix du Pic du Midi pour essayer la formule barométrique de la Mécanique céleste et déterminer la valeur de son coefficient. Leur nombre, au reste, suffit à l'objet auquel je les applique aujourd'hui. Elles forment seize séries, réparties entre cinq années très-différentes de constitution et de température. On y prendra donc une idée assez juste de la marche des instruments à la cime de notre montagne, ainsi que des modifications habituelles de son atmosphère, durant la portion de l'année où les végétaux y jouissent de la vie active.

Elles ont été faites avec divers baromètres dont j'ai tour-à-tour essayé l'usage. Aucun ne me donnait directement la hauteur absolue de la colonne de mercure : je les ai donc successivement comparés avec les baromètres alors employés à l'Observatoire, et j'y ai ramené toutes les hauteurs qu'ils m'avaient fournies.

Ces hauteurs sont ici réduites, selon ma coutume, à la température 12°, 5 du thermomètre centigrade. J'ai choisi cette température parce qu'elle est une moyenne entre les variations ordinaires, et resserre les limites d'une correction

qui, dans la pratique et surtout à l'air libre, n'est jamais exempte de quelque incertitude. A l'Observatoire on a adopté un autre terme : celui de la glace fondante. On y ramènera mes observations en les diminuant de 1^{mm}, 26, ou seulement de 1^{mm}, 12, si l'on veut tenir compte de la dilatation du laiton, comme je suis dans l'usage de faire.

OBSERVATIONS.

1802.

		Bar. à 12°,5	Th. cent.	
26 juill.	10^h, m.	54^c. 3.85	+ 11°. 0	Vent sud-ouest impétueux sur les cimes. — Vent nord dans le bas.
	11	4.54	10 . 6	
	0	5.02	11 . 6	Nuages. Soleil. Chaleur du sol + 36°. 0.
15 sept.	0	54^c. 5.39	+ 8°. 6	Vent sud très-fort. — Ciel pur.

1803.

		Bar. à 12°.5	Th. cent.	
4 sept.	11^h. m.	54^c. 3.59	+ 6°. 5	Nord-est vif. — Brouillards venant de la plaine. Chaleur du sol + 25°, 0.
	0	3.67	8 . 1	
	0. 30′	3.76	8 . 8	
12 sept.	11. m.	54 . 5.19	+ 10 . 6	Sud-est faible. Très-beau temps.
	0	4.94	10 . 4	A midi, le thermomètre exposé au soleil marque 16°, 9
23 sept.	0	54 . 1.43	+ 8 . 1	Sud-ouest intermittent. Air limpide. — Thermomètre au soleil + 12°, 5.
27 sept.	11. m.	53 . 8.88	+ 3 . 8	Sud intermittent. Nuages arrêtés sur les crêtes méridionales.
	0	8.87	4 . 0	
	0. 30′	8.90	4 . 4	Thermomètre au soleil + 5°, 6 — à terre + 35°, 0.
30 sept.	6 m.	53 . 6.28	+ 4 . 3	Sud-est fort. Ciel voilé de nuages élevés. Pluie fine mêlée de neige. Les montagnes méridionales sont couvertes; mais la plaine, quoique privée de soleil, se déploie sous les yeux avec une telle netteté qu'on y discerne les moindres objets jusqu'aux bornes de l'horizon. Dans mon cabinet de Barèges (environ 1260^m au-dessus de la mer), le baromètre, à 2^h. 30′, marqua 65. 4. 80 — A Tarbes, (environ 300^m au-dessus de la mer), il marquait à 6^h, 30 m. 72. 7. 87, et le thermomètre + 14.8.
	6. 30′	6.28	4 . 3	
	7. 30′	6.50	4 . 5	
	8	6.65	4 . 6	
	8. 15′	6.52	5 . 0	
	8. 30′	6.52	5 . 0	
				C'est le jour où j'ai vu le baromètre le plus bas au Pic.

1805.

		Bar. à 12°.5	Th. cent.	
30 août.	10h. m.	54c.9.95	+14°.0	Sud-ouest soufflant par bourrasques. Soleil pâle et pourtant ardent. La chaleur est extraordinaire dans la plaine. A Barèges, le thermomètre marquait 28°, 2 vers midi et s'est élevé probablement davantage. Au Pic, je l'ai vu monter momentanément jusqu'à 19, mais c'était l'effet du soulèvement de quelques portions de l'air échauffé dans les vallées adjacentes. La chaleur de ce jour est la plus forte que j'aie éprouvée au Pic. Quant à Barèges, les plus hautes températures qui j'y ai observées sont les suivantes : 30 juillet 1803 + 28°, 1 — 17 août 1809 + 29°, 0 — 7 août 1802 + 30°, 5.
	10 .30	9.94	14 .2	
	11	9.88	15 .5	
	0	9.84	16 .4	
	0 .30	9.72	16 .8	
	1	9.66	16 .2	
15 sept.	10 m.	54 .7.57	+ 7 .0	Sud-ouest, entraînant les nuages qui passent à une grande hauteur au-dessus du Pic. Nord-est dans la plaine et jusqu'à sa cime. — Beau soleil.
	10 .30′	7.59	7 .5	
	11	7.44	7 .7	
	0	7.28	8 .0	
	1 . s.	7.00	7 .6	
	2	6.82	7 .4	

1809.

15 août.	11h.30′	54c.5.21	+ 7°.4	Sud-ouest soufflant à la cime du Pic, et retenant à distance les brouillards amenés de la plaine par un vent bas, soufflant du nord.
	0	5.21	8 .2	
	0 .30	5.15	8 .3	
	1 . s.	5.09	8 .6	
	2	5.13	8 .6	
	2 .30	5.16	8 .5	
22 sept.	11 m.	54 .7.32	+ 5 .5	Nord-ouest fort au sommet du Pic. — Calme dans les fonds. Ciel parfaitement pur : on ne peut juger de la direction du vent qui règne dans les couches supérieures.
	0	7.18	6 .0	
	1 . s.	7.43	6 .5	
7 oct.	0	54 .0.37	+ 2 .5	Ouest très-fort, et nuages. — Le Pic est tout couvert de neiges récentes.
	1 . s.	0.37	3 .5	
19 oct.	0	54 .3.77	+ 2 .5	Nord-est assez fort. Brouillards passagers. Il y a encore beaucoup de neige sur le Pic.
	3 . s.	3.50	1 .4	

1810.

11 sept.	0h.	54c.2.41	+ 7°.0	Sud-ouest fort sur le Pic. — Ouest sur la plaine. Elle est couverte de nuages au-dessus desquels on voit surgir la cime du Pic de Montaigu, dont l'élévation n'est que de 2350m. Les montagnes méridionales, au contraire, sont entièrement visibles, mais coiffées de nuages élevés qui oscillent avec ceux de la plaine, et finissent par franchir la barrière. A 4 heures, les deux masses sont réunies.
	0 .30	2.28	7 .7	
	1 . s.	2.09	7 .9	
	3 .30	1.28	8 .0	

		Bar. à 12°.5	Th. cent.	
22 sept.	11h. m.	54c.4.16	+ 4°.5	Ouest-sud-ouest dans la région supérieure, formant un remous nord-est au sommet du Pic qui est environné de brouillards. Courtes éclaircies entre une heure et demie et deux heures et demie.
	0	4.10	5 .8	A 2h ,30' grêle, suivie de grésil se terminant par la neige.
	1 . s.	4.07	5 .4	A 3h il neige. Tonnerre lointain. — En descendant du Pic je vois la neige se changer en pluie à 200 mètres au-dessous de la cime, et l'orage envahir tout l'intervalle qui nous sépare des crêtes méridionales.
	1 .30	3.68	4 .0	
	3	3.46	3 .0	
28 sept.	0	54 .2.84	+ 5°.2	Sud-ouest dans la région supérieure. — Ouest-nord-ouest en bas. Les hautes cimes méridionales sont coiffées de nuages qui ne les franchissent pas. La plaine est sans soleil, mais on la découvre en entier, et l'on aperçoit aux limites de son horizon des brouillards qui avancent peu à peu et finissent par atteindre le Pic. Leur approche fait reculer les nuages des sommets méridionaux.
	0 .30	2.85	5 .5	La température du sol, observée à 4h, ne s'élevait qu'à + 10°, 0.
	1 . .	3.13	6 .1	
	3 .30	2.97	7 .2	

	Bar. à 12°.5		Th. cent.	
Maximum	54c.9.95	le 30 août 1805 à 10h m.	+ 16°.8	le 30 août 1805 à midi et demi.
Minimum	53 .6.28	le 30 sept. 1803 à 6h. m.	+ 1 .4	le 19 oct. 1809 à 3h.s.
Différence	1c.3.67		15°.4	

Moyennes des seize jours d'observations à midi, en y comprenant l'observation faite le 30 sept. 1803 à 8h 30 m., qui n'a pu différer beaucoup de celle de midi.

Baromètre 54.3.68 — Thermomètre + 7°.3.

HYGROMÈTRE.

Ayant reconnu l'imperfection de plusieurs hygromètres que j'avais employés, je me borne à rapporter ici quelques observations faites avec des hygromètres à cheveu, dont j'avais soigneusement vérifié la marche.

			OBS. DIRECTE.	TEMPÉRATURE.	OBS. RÉDUITE A 12°.5.
1803	4 septembre.	midi.	79°	+ 8°.1	71°.5
	12 *id.*	midi.	73	+10 .4	69 .8
	23 *id.*	midi.	46	+ 8 .1	42 .3
	27 *id.*	midi.	62	+ 3 .8	51 .8
	30 *id.*	6h.30m.	93 .5	+ 4 .3	76 .4
1805	30 août.	midi.	52 .5	+16 .4	57 .0
	15 septembre.	midi.	70 .5	+ 8 .7	64 .8

Dans ces observations, la première chose que je ferai remarquer, est la prédominance des vents méridionaux. Ils soufflent habituellement à la cime du Pic, tandis que des vents différents et souvent opposés règnent sur la plaine. A ces hauteurs, nous approchons de la région où s'est élevé l'air échauffé entre l'équateur et nous, formant une couche qui s'écoule vers les contrées polaires et va en s'abaissant à mesure qu'elle perd de sa température. Mais nous sommes encore au-dessous et dans une région intermédiaire, livrée aux combats de vents d'origine diverse. Ceux-ci atteignent, contrarient, fléchissent les couches inférieures du courant méridional, et cependant réussissent rarement à en suspendre la marche; mais ils l'égarent : le courant cède en se détournant, revient sans cesse et plonge sur nous, tantôt comme un hâle doux et tiède qui descend peu à peu des hauteurs de l'atmosphère sur nos sommets, et des sommets sur les vallées; tantôt en impétueuses rafales que l'on entend bruire dans les airs long-temps avant qu'elles ne fondent sur les plaines. Une fois établi, le vent souffle ordinairement du sud-ouest, plus rarement du sud-est, souvent des points intermédiaires, toujours dans une direction différente de celle où nous frapperaient les couches supérieures du même courant, abandonnées à leur mouvement propre, combiné avec la rotation de la terre; mais toujours le même, quel que soit le point d'où il nous arrive, la diversité des directions n'apporte aucun changement aux propriétés physiques qui le caractérisent.

L'air refroidi dans les contrées septentrionales, nous revient au contraire par le bas, à travers les obstacles multipliés que la configuration des terrains lui oppose, modifié par l'effet

d'une foule d'actions et de réactions nées du contact de la terre, fléchi enfin ou entraîné par les vents qu'engendrent sur divers points du globe, la raréfaction ou la condensation des atmosphères locales.

Cependant, et malgré ces déviations et ces mélanges, rien de plus évident que l'existence et la superposition des deux courants principaux. Y a-t-il des nuages? chacun a les siens, les forme, les porte, les entraîne à sa manière. Ceux du courant septentrional rasent la terre, ou demeurent suspendus à des hauteurs médiocres. Nous les voyons, du Pic, occuper une zone ordinairement comprise entre mille et deux mille mètres au-dessus du niveau de la plaine. Les nuages du courant méridional, au contraire, se soutiennent à une élévation qui excède habituellement celle de nos cimes, et planent souvent à quatre ou cinq mille mètres au-dessus.

Envisagées de la plaine, les distances disparaissent; les deux couches de nuages se confondent; et à moins que l'opposition de leur marche n'avertisse l'œil de l'observateur, on ne distingue plus entre eux ceux de diverse origine, si ce n'est à cette physionomie qu'ils tiennent de la région où ils ont pris naissance, et dont le caractère est aussi aisé à reconnaître que difficile à décrire. Sur nos sommets tout se débrouille et reprend sa place; les deux couches se séparent : nous sommes au point de partage, témoins des accidents qui signalent leur rencontre, et placés précisément sur l'un des obstacles dont l'interposition donne à ces accidents une forme particulière.

Deux barrières, en effet, s'opposent ici au libre passage des vents. Du côté du nord, c'est le Pic du Midi et le chaînon qu'il domine; au sud, c'est le Mont-Perdu et les longues

crêtes du Marboré. Dans la lutte des deux courants, chacune de ces deux barrières signale sa résistance par quelque phénomène digne d'attention.

Les nuages formés dans le bassin de la Méditerranée ou sur le sol de l'Espagne, viennent-ils à atteindre les Pyrénées? on les voit, durant plusieurs jours, attachés aux cimes méridionales, s'y amonceler de plus en plus, et ne pouvoir les franchir. Transportons-nous sur la barrière où ils demeurent arrêtés : le soleil nous accompagne jusqu'au tranchant de la crête; là, nous trouvons l'orage battant avec furie le revers des montagnes. La crête est exactement la ligne de partage; et la masse de nuages s'élevant au-dessus à perte de vue, est invariablement maintenue sur le prolongement vertical de cette limite, par la direction ascendante que prend le vent impétueux qui heurte les pentes. Mais peu à peu l'amas s'accroît, et le moment de la surcharge arrive. On croirait que ces nuages vont s'écouler par le haut, car il n'y a là aucun obstacle visible; point du tout : c'est par le bas qu'ils se mettront en marche; ils s'emparent d'abord de tous les défilés, de tous les créneaux de la crête, parce que l'étranglement y redouble la vîtesse du vent, et franchissent le détroit par pelotons, saluant à la fois d'une double détonation les deux parois de la brèche qui leur a livré passage.

La barrière une fois forcée, l'intervalle de sept à huit lieues qui sépare le Marboré de la chaîne septentrionale, est bientôt envahi. Celle-ci n'oppose qu'une faible résistance; le Pic du Midi est foudroyé en passant, et l'orage s'étend sur la plaine.

M. Balitoro a publié, il y a vingt-cinq ans, des observations desquelles il résulterait que la foudre ne frappe jamais la partie nord et nord-est des édifices. Le Pic du Midi ferait

exception à cette loi. Les traces de la foudre, et elles sont très-nombreuses, s'y montrent précisément dans toute la partie du sommet qui regarde l'orient, depuis le sud jusqu'au nord. Là, ses roches offrent de vastes espaces et surtout des angles manifestement fondus à la surface, et couverts de bulles vitrifiées. Mon observation pourtant ne contredit en aucune façon celle de Balitoro. La foudre frappe les édifices dans le sens où marchent les orages, et c'est du côté du sud et de l'ouest qu'ils sont atteints dans les plaines, parce que rien n'y dévie le cours naturel des nuages : au Pic, l'appareil orageux est nécessairement entraîné vers les gorges ouvertes à l'orient ; c'est donc la face orientale de la montagne qui provoque et reçoit la décharge électrique.

Le Pic oppose peu d'obstacles aux vents méridionaux, parce qu'ils le prennent par ses cimes : il résiste long-temps à l'invasion des vents septentrionaux, parce qu'ils l'attaquent par ses bases. Rien de plus ordinaire que de voir, du sommet, la plaine chargée de nuages, et ces nuages remonter le long de ses pentes avec le vent qui les entraîne. Les observations météorologiques sont alors affectées de deux erreurs dont on ne peut estimer avec précision l'étendue. Le courant ascendant fait baisser le baromètre, en diminuant la pression de la colonne d'air, et il fait monter le thermomètre en lui apportant l'atmosphère de la plaine. Cet accident est fréquent dans les montagnes ; il a altéré, à l'insu de Saussure, les observations qu'il a faites au sommet du Mont-Blanc ; à plus forte raison altère-t-il un bon nombre de ces observations que nous voyons faire en courant de cimes en cimes, sans la moindre défiance des influences variées qu'exercent tour-à-tour, les vents, les lieux, les heures et le temps. Mais je

dois à une circonstance pareille d'avoir été témoin de l'un des plus rares phénomènes que m'ait offert l'atmosphère de ces hautes régions.

Je montai au Pic, le 8 août 1792, avec un ciel pur et le plus beau soleil. Arrivé à la cime, à trois heures et demie après midi, je trouvai non-seulement la plaine entièrement couverte de nuages, mais ces nuages pressés contre l'escarpement septentrional de la montagne, et se dressant perpendiculairement sur ma tête à une hauteur que je n'estime pas moindre de cent cinquante mètres. La distance était facile à mesurer : trente pas, au plus. Sur cet immense rideau, dont la surface était parfaitement plane, se projetait mon ombre, celles de trois personnes qui m'accompagnaient, et l'ombre du tronçon de sommet au haut duquel nous étions placés, le tout environné d'un iris dont le diamètre m'a paru de quarante degrés au moins, et à peu près égal à celui des halos que nous voyons autour de la lune. La continuité de cette vaste circonférence n'éprouvait d'autre interruption que celle d'un arc de quelques degrés, intercepté par l'image de notre piédestal. Les couleurs de l'iris étaient d'une vivacité admirable, et nos ombres d'une telle netteté qu'un miroir n'en aurait pas plus fidèlement représenté les contours. Nous contemplâmes ce tableau, l'espace de trois quarts d'heure, sans qu'il éprouvât la plus légère altération. Sur ce rocher, sous ce ciel, à la vue de ce magique spectacle, on eût cru assister vivant à son apothéose.

Bouguer avait autrefois observé, sur les Cordillières, un phénomène de même sorte, mais sous une forme très-différente (1). Ceux auxquels il s'est présenté depuis, l'ont presque

(1) Préface du Traité de la figure de la terre, p. 43.

tous vu de la même manière. Ainsi, les fils de Saussure, se trouvant le 7 janvier 1796 sur la montagne de Salêve, virent le soleil projeter leurs ombres sur le brouillard, et ces ombres, celles de leurs têtes surtout, entourées d'auréoles ou de cercles concentriques colorés, exactement conformes à la description qu'en donne Bouguer (1).

C'est encore sous des apparences à peu près semblables que ce phénomène a été observé vers la même époque, par Mirbel dans les basses Pyrénées, et par Aubert du Petit-Thouars à l'île de Bourbon.

Beaunier seul a eu le bonheur de le revoir tel qu'il m'a apparu, quoique sous une forme moins imposante et dans de moindres dimensions. Le 27 septembre 1800, se trouvant au sommet du Puy de Sancy, et appuyé avec son guide contre la croix qui y est placée, il remarqua sous ses pieds un petit nuage blanc, éclairé du soleil, sur lequel se peignait un cercle complet, brillant des couleurs de l'iris, au milieu duquel se projetait l'ombre des deux spectateurs (2).

Quant à Omalius d'Halloy, de qui nous tenons les détails de l'observation de Beaunier, celle qu'il a eu occasion de faire lui-même le 27 août 1807, aux environs de Spa, lui a offert le phénomène sous sa forme la plus ordinaire : il a vu sur un brouillard l'ombre de son corps, où la tête seule était entourée d'une auréole large de plus d'un mètre, formée de cercles concentriques, lumineux et faiblement irisés (3).

Les caractères distinctifs du tableau qui s'est présenté à

(1) Saussure, Voyage dans les Alpes, §. 2235, en note.

(2) Journal des Mines, tom. 27, p. 407.

(3) *Ibid.*

mes yeux, la netteté des ombres, la correction de leurs contours, l'unité et l'étendue du cercle irisé, s'expliquent tout naturellement par la forme de ce nuage, qu'un courant d'air, à la fois rapide et continu, déployait devant moi comme l'eût été un rideau bien tendu. Les nuages, au contraire, où Bouguer, les fils de Saussure et d'autres observateurs ont vu leur image imparfaite ou tronquée, et leurs têtes seulement environnées d'auréoles, avaient sans doute la forme ordinaire, et offraient cet assemblage de surfaces convexes, qui donne un aspect floconneux aux amas de vapeurs abandonnés à eux-mêmes.

Il n'est pas aussi aisé d'expliquer le phénomène lui-même. Voir son ombre sur un brouillard, est une chose fort ordinaire; mais voir cette ombre entourée d'un cercle coloré, est une chose si rare, que la formation de cet iris semble exiger le concours d'une condition tout-à-fait extraordinaire. Bouguer pensait que les particules du nuage étaient glacées. Saussure partage son opinion, et l'appuie de ce qu'il gelait sur la montagne de Salève, au moment où ses fils furent témoins du phénomène. Beaunier, au contraire, ne trouve dans sa propre observation rien qui autorise cette conjecture, et Omalius-d'Halloy ne croit pas du tout à la congélation des particules, dans un brouillard qu'il rencontrait le 27 août, à une élévation très-médiocre au-dessus du niveau de la mer. Je ne puis que me ranger à leur avis, bien qu'il y eût dans les dimensions de mon iris, de quoi favoriser l'opinion de Saussure; mais, certes, il ne gelait pas le 8 août au Pic du Midi, et j'aurais peine à me persuader qu'il gelât dans cette nue, vivement éclairée du soleil, que je touchais de la main, et qui remontait de la plaine.

Au reste, je ne discuterai pas ici ce point de physique. Il me suffit d'avoir fait apercevoir, en exposant les phénomènes, l'existence de certaines modifications qui sont particulières aux hautes sommités, et contribuent à distinguer leur climat de tous ceux dont il se rapproche d'ailleurs par la conformité générale des températures. Les contrées polaires, où nous avons cherché nos points de comparaison, sont placées dans le courant de l'atmosphère qui s'écoule incessamment du pôle à l'équateur, et l'échange des masses d'air s'opère uniquement par le ministère des vents horizontaux. Nos sommets, au contraire, touchent au courant qui se dirige de l'équateur au pôle, et outre les vents horizontaux, il y a encore tous les vents verticaux, naissant tant de l'oscillation diurne que du rebroussement des courants dont les pentes sont frappées.

On conçoit l'effet que ces derniers produisent sur la température de notre Pic, en mêlant immédiatement et subitement à son atmosphère, celle d'un climat tout différent et qui pourtant n'en est séparé que de la distance mesurée par sa hauteur. Les brusques variations dues à cette cause, sont au nombre des conditions particulières, imposées ici à l'existence organique.

Quant au courant méridional dont les cimes sont habituellement baignées, ce qu'il y apporte de chaleur propre est renfermé dans l'échelle de température qui a servi de base à nos comparaisons. Mais il a encore d'autres propriétés, et agit sur l'organisme d'une manière toute particulière. Le *Sirocco* des Italiens, le *Foen* des hautes Alpes, la *Balaguère* des Pyrénées, vents chauds et souvent fougueux, tous compris entre le S. E. et le S. O., sont bien connus par leur in-

fluence débilitante, l'abattement où ils jettent les hommes et les animaux, l'atonie subite et mortelle dont ils frappent les maladies aiguës. Ils ne me sont pas moins connus par l'activité prodigieuse que leur invasion imprime à la végétation des montagnes, lorsqu'elle en est à ses premiers développements, et par la célérité avec laquelle ils en précipitent le dépérissement à l'époque où elle est sur le retour. Ces propriétés, qui paraissent résider principalement dans un certain état de l'électricité, se manifestent, selon les circonstances, avec des degrés d'énergie différents, mais ne demeurent jamais complètement endormies. Personne ne croira que des plantes qui vivent sous l'influence permanente de ce courant équinoxial, se trouvent, même à température égale, dans une condition parfaitement analogue à celle des plantes habituellement exposées à l'action du courant polaire, dont les propriétés physiques sont diamétralement opposées.

Bien d'autres causes concourent à marquer le climat des montagnes élevées, d'un caractère qui lui est propre. Mes observations font foi du haut degré de chaleur que l'irradiation solaire peut communiquer au sol. Cette chaleur est souvent hors de toute proportion avec la température de l'air. Sans doute, elle s'accumulerait déja jusqu'à une certaine mesure, dans un terrain que sa couleur sombre et sa constitution graveleuse disposent singulièrement à la retenir; mais l'intensité qu'elle y acquiert tient encore à autre chose : à l'extrême vivacité de la lumière qui éclaire et inonde ces hautes régions. Nous en sommes avertis, non par nos yeux qui l'ont reçue graduellement et s'y sont accoutumés peu à peu, mais par l'impression cuisante que le soleil fait sur la

peau, et surtout par la puissance remarquable du foyer caustique : une lentille de très-petit diamètre enflamme sur-le-champ des substances qu'en plaine une lentille d'une surface double échaufferait à peine; et ceci fournirait un expédient pour comparer plus exactement, et réduire à une échelle convenue, les degrés de cette chaleur lumineuse que le thermomètre exposé au soleil n'accuse pas sans ambiguïté, parce que la température de l'air est comprise dans ses indications.

La vivacité de la lumière et l'échauffement du sol sont deux circonstances trop favorables à l'accroissement des plantes, pour n'être pas comptées au nombre de celles qui impriment à la végétation alpine son caractère distinctif. L'une et l'autre dépendent de la pureté de l'air; elles ont leur origine commune dans la diminution de la pression atmosphérique.

La puissance de cette dernière cause ne saurait atteindre l'organisation végétale par les voies qui lui ouvrent l'accès de la nôtre; et l'action qu'elle exerce sur les plantes n'a ni son modèle ni sa mesure dans l'action qu'elle exerce sur nous. La raréfaction de l'air, au degré où nous pouvons la supporter sans incommodité, exalte toutes nos facultés, et double pour nous le sentiment de l'existence. Les hommes qui naissent et vivent au sein de cette atmosphère, marquent leurs premières années par un développement rapide, et fournissent leur aventureuse carrière avec la plénitude de la force, que seconde l'élan de la pensée. Mais le mouvement imprimé à la vie n'en hâte pas la jouissance sans en précipiter le cours : comme il l'excite et la presse, de même il l'use et l'abrége, si toutefois c'est abréger la vie que lui rendre en sensations ce qui lui est retiré en durée.

Le système nerveux est à la fois l'intermède et l'agent de ces modifications de notre être. Les végétaux, privés de ce point de contact avec la nature, sont affectés d'une autre manière, et atteints par d'autres conséquences de la raréfaction de l'air.

Nous venons de voir que la vivacité de la lumière est une de ces conséquences. L'accélération de l'évaporation en est une autre; et celle-ci agit en même temps, mais diversement, sur les végétaux et sur nous.

On en éprouve l'effet, lorsqu'à la cime des montagnes on ressent un froid que l'observation du thermomètre ne justifie pas. Cette sensation singulière, qui a autrefois frappé Darcet au sommet du Pic du Midi, est aussi facile à expliquer aujourd'hui qu'elle paraissait alors inexplicable. C'est encore à la facilité avec laquelle s'exécute la perspiration cutanée et pulmonaire que nous devons de n'avoir rien à redouter de la répercussion de la sueur, quand nous atteignons ces cimes, bien que nous ayons passé du chaud au froid, et du mouvement au repos; tandis qu'au contraire, cette répercussion est fort à craindre quand nous descendons des sommets vers la plaine, quoique alors la fatigue soit bien moindre, et la transition du froid au chaud.

Quant aux végétaux, soumis comme nous à l'évaporation, ils semblent en redouter ici l'excès, et ne l'éprouver que pour être avertis de s'en défendre. Cette disposition se fait apercevoir plus ou moins dans un grand nombre de nos plantes alpines : elle est surtout manifeste dans certaines espèces que nous trouvons plus bas garnies de feuilles vertes, minces, se desséchant très-facilement, et que nous retrouvons sur les cimes, avec des feuilles glauques, épaisses, et revêtues d'un épiderme imperméable.

Elles ont bien d'autres épreuves à subir de l'instabilité du temps, durant ces étés si fugitifs et que l'hiver ne cesse d'assiéger. Sans parler des perturbations générales, dont les montagnes sont toujours plus fortement assaillies que les plaines, au soir des plus beaux jours, l'activité de l'évaporation a bientôt refroidi le terrain que le soleil avait si puissamment échauffé : la nuit survient, et le rayonnement de ces cimes solitaires, vers un ciel dont rien n'égale la transparence et la pureté, ne manque guère d'y ramener la température au terme de la congélation.

Ce refroidissement des cimes donne naissance à un petit phénomène, visible des plaines adjacentes, et qui entre dans les pronostics de leurs habitants. Le Pic du Midi se coiffe quelquefois, et souvent au matin de très-beaux jours, d'une calotte de vapeurs demi-transparentes, dont les bords se perdent en mourant dans l'air qui les environne. Ce n'est autre chose que l'humidité de cette couche de l'atmosphère, condensée jusqu'à une certaine distance, par le froid du sommet; et quel que soit le vent qui règne au bas de la montagne, on ne se trompe guère si l'on infère de cette apparence, qu'un vent méridional s'est emparé de la région supérieure, et que le sommet du Pic s'est couvert de gelée blanche. Le Puy-de-Dôme m'a souvent offert le même phénomène, et il a été remarqué depuis long-temps en Suisse, au Mont-Pilate qui en a tiré son nom, *Mons Pileatus*. Il se pourrait fort bien que le Pic du Midi eût autrefois partagé cette qualification, car son lac, aujourd'hui appelé *Oncet,* du nom du bassin où il est situé, a long-temps porté et porte encore dans la carte de Cassini, celui de *Lac Peylade.*

Arrêtons-nous ici. La météorologie des montagnes est un

sujet fort vaste : je n'avais à l'envisager que relativement à un lieu et sous un seul de ses aspects. Tout se rapporte au même point de vue. Les observations qui constatent le poids et la température de l'air ou concernent les divers phénomènes que j'ai décrits, ont donc reçu une application limitée à mon objet : savoir, de caractériser celles des modifications de l'atmosphère qui intéressent particulièrement la végétation, durant la seule saison de l'année à laquelle il lui soit donné de prendre une part active.

Mais la nature même de cette application dirigeait nécessairement nos regards vers les causes productrices des modifications principales, et l'examen de ces causes nous a aidés à démêler quelques-uns des éléments très-complexes, dont le climat des hautes cimes se compose. Nous avons vu l'élévation agir sur l'organisme, non-seulement par l'abaissement de la température, mais aussi par la raréfaction de l'air et ses conséquences prochaines; nous avons vu cette même élévation aller au-devant du courant supérieur de l'atmosphère, la situation des montagnes décider de certains accidents météorologiques, et leur pente de la direction des vents; actions puissantes, infiniment variées, et pourtant subordonnées toujours au climat, dont l'empire s'étend de la base des montagnes jusqu'à leur sommet, et donne naissance, en se combinant avec leur climat particulier, à un ordre de phénomènes qu'aucune latitude ne peut représenter sans le concours de l'élévation, comme aucune élévation ne les représenterait sous l'influence d'une autre latitude.

Ces considérations réduisent à des termes plus précis les comparaisons essayées entre les régions alpines et les régions

polaires, sous le double rapport de leur climat et de leurs productions. Appliquées aux conditions imposées à l'existence des végétaux, elles indiquent comment et en quoi ces conditions diffèrent. Appliquées à l'impression que font ces différences de condition sur les formes végétales, elles portent à rechercher quels sont les degrés de leur importance, et l'ordre dans lequel leur action s'exerce sur ces formes.

Jetons un coup d'œil sur les deux régions.

Notre climat a pour caractère dominant, l'inconstance des vicissitudes et l'extrême mobilité des phénomènes. Cette instabilité marche à la suite des subdivisions de notre année, coupée en courtes périodes par la succession des saisons, des mois et des jours, tels que notre position géographique nous les mesure. Sur nos sommets, l'influence d'une pareille cause ne se démentira pas plus que la cause elle-même. Les modifications atmosphériques, dépendantes de l'élévation, s'ajoutent à celles qui dépendent de la latitude, et l'instabilité des variations s'augmente de tous les accidents dont la haute région est le théâtre.

Rien de semblable dans les contrées polaires que j'ai prises pour exemple. L'élément de l'élévation y manque. Nulle différence de niveau assez considérable pour diminuer le poids de l'atmosphère à ce point où les effets de la raréfaction de l'air deviendraient sensibles. D'autres vents dominent; ils se meuvent sur un seul et même plan. Une autre distribution du temps, une autre coupe des saisons, des jours et des nuits, tout concourt à modérer la célérité du mouvement; tout se réunit pour donner aux phénomènes un caractère qui nous est étranger, une continuité qui nous est inconnue.

Cependant, malgré ces dissemblances fondamentales, et

nonobstant toutes les dissemblances secondaires qui en dérivent, la proportion relative des hivers et des étés, la longueur de ceux-là et la température de ceux-ci, sont des traits de conformité si saillants, des circonstances tellement prédominantes, qu'il n'en a pas fallu davantage pour imprimer aux productions des deux climats une ressemblance qui tient de l'air de famille. Nous reconnaissons dans les plantes des deux régions, un aspect qui leur est commun, les mêmes types et souvent les mêmes espèces; la flexibilité de l'organisme s'est prêtée à ce que les conditions respectives avaient de divers. Mais cette flexibilité a ses bornes : au terme qu'elle ne pouvait dépasser s'arrête également la conformité des espèces; et d'autres espèces se sont introduites, modifiées de manière à satisfaire aux nécessités locales, sans altérer l'unité du modèle commun. Les premières représentaient la similitude générale des deux climats, et dissimulaient les différences; les dernières représentent les différences, sans cesser de représenter les analogies. Les êtres organiques, instruments d'une délicatesse exquise et accessibles à toutes les impressions, subissent et révèlent à leur manière l'influence d'une foule d'actions physiques, sur lesquelles l'observation directe n'a pas de prise. Ils disent tout, mais en un langage qui ne nous est pas toujours intelligible. Aussi long-temps que nous le comprenons, nous voyons ordre, harmonie, économie d'efforts, accord admirable entre les fins et les moyens. Cessons-nous d'entendre? là commencent pour nous les caprices de la nature.

ÉNUMÉRATION DES PLANTES

QUI CROISSENT AU SOMMET DU PIC DU MIDI.

CRYPTOGAMES.

LICHENS.

1. Lecidea petræa β. *Achar. lich. univ.* p. 165, n° 4.
Patellaria petræa. Var. *Excentrica.* — *Decand. flor. fr.* 2, p. 348.
Sommet supérieur, 8 août 1809.

2. Lecidea lapicida. *Achar. lich. univ.* p. 159, n° 10.
Patellaria lapicida. — *Dec. fl. fr. suppl.,* p. 181.
Sommet inférieur, 27 septembre 1803.

3. Lecidea biformis N.
Patellaria biformis. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 353.
Sommet supérieur, 30 septembre 1803. — Sommet inférieur, 19 juillet 1801.

Croûte grumeleuse, jaunâtre; tubercules noirs, blancs au-dedans, d'abord bordés, puis convexes, difformes, agglomérés et saillants; quelques-uns pédiculés par un prolongement de la croûte, circonstance d'où j'ai tiré le nom spécifique. Decandolle rapproche ce lichen du *Lecanora Sulfurea;* dans la méthode d'Acharius, il diffère de genre, par ses tubercules entièrement dépourvus de rebord accessoire.

4. LECIDEA CONFLUENS. *Ach. lich. univ.* p. 174. Var. δ. *Albozonaria?*

Patellaria albozonaria. — Dec. fl. fr. 2, p. 348?

Sommet supérieur.

Tout-à-fait semblable d'aspect au *L. confluens*, ce lichen m'a paru s'en distinguer uniquement par le noyau blanc qui forme le centre de ses tubercules.

5. LECIDEA SILACEA. *Ach. lich. un.* p. 164, nº 18.

Patellaria silacea. — Dec. fl. fr. 2, p. 351.

Par petites taches, sur les rochers du sommet supérieur.

6. LECIDEA UMBILICATA. N.

An. *L. petræa* δ. *globulata. — Ach. l. un.* p. 156?

Sommet inférieur.

Croûte farineuse, très-blanche, un peu fendillée, bordée de noir. Tubercules très-noirs, à rebord, ayant en outre un ombilic proéminent, et souvent quelques rides en spirale sur leur disque. Ils sont d'abord planes et sessiles, puis convexes, confluents et difformes.

7. LECIDEA PARASEMA θ. *crustulata. — Ach. l. un.* p. 176.

Patellaria parasema γ. *rupestris. — Dec. fl. fr.* 2 p. 347.

Sommet supérieur.

8. LECIDEA MUSCORUM. *Ach. lich. un.* p. 179, nº 49.

Patellaria muscorum. — Dec. fl. fr. 2, p. 349.

Sommet supérieur, sur des tiges pourries de carex; septembre 1803.

9. LECIDEA CANDIDA. *Ach. lich. un.* p. 212, nº 112.

Psora candida α. *Dec. fl. fr.* 2, p. 369.

Sommet supérieur, à terre; 11 août 1799.

10. Lecidea vesicularis. *Ach. lich. un.* p. 212, n° 113.

Psora vesicularis. — Dec. fl. fr. 2, p. 368.

Lichen radicatus. — Vill. Delph. 3, p. 948, tab. 55.

Sommet supérieur, au nord.

Il s'empare de la roche très-dure qui constitue cette cime, y introduit ses racines; elles se glissent entre les feuillets, divisent les cristaux que ces feuillets enveloppent, et finissent par réduire en sable une pierre très-cohérente et qui résiste à toutes les injures du temps. Dans cet état particulier, où on ne le rencontre guère, ce lichen répond parfaitement à la description et à la figure de Villars.

11. Lecidea obscura. N.

Confer: L. paradoxa.— Ach. lich. un. p. 214, n° 116.

Rochers du sommet supérieur, 30 septembre 1803.

Croûte d'un brun marron foncé et luisant, composée de glomérules convexes, pressés les uns contre les autres, et du sommet desquels naissent des scutelles noires, à rebord, se développant avec l'âge en gros tubercules souvent difformes et se crevassant irrégulièrement du centre à la circonférence. Ils sont blancs à l'intérieur : il en est de même de la croûte, mais celle-ci pose sur une couche radicale noire qui forme bordure autour du lichen.

A la première vue on confondrait cette espèce avec notre *Rhizocarpon atrobrunneum*, n° 15 ; mais dans celui-là les glomérules sont distincts, et les scutelles naissent, non de leur sommet, mais dans leurs interstices et de la couche radicale elle-même.

12. Rhizocarpon geographicum. N. *In Dec. fl. fr.* 2, p. 365.

Lecidea atrovirens. α. β. *Ach. lich. un.* p. 163, n° 15.

Sur les deux sommets.

13. Rhizocarpon morio. N. *In Dec. fl. fr.* 2, p. 366.

Sur les deux sommets, 27 septembre 1803.

14. RHIZOCARPON ARMENIACUM. N. *In Dec. fl. fr.* 2, p. 366.
Un peu au-dessous du sommet supérieur, 12 septembre 1803.

15. RHIZOCARPON ATROBRUNNEUM. N. *In Dec. fl. fr.* 2, p. 367.
Sommet principal, 19 juillet 1801.

Ce genre que j'ai proposé aux botanistes, et que Decandolle a adopté, est très-naturel et fort bien caractérisé par ses tubercules naissants de la couche radicale; mais, dans la méthode d'Acharius, il ne peut entrer que comme subdivision de son genre *Lecidea*. Je ne doute pas qu'il ne l'eût introduit sous cette forme, s'il avait connu les belles espèces que les Pyrénées m'ont fournies, et examiné sous ce point de vue un bon nombre de *Lecidea* où l'on retrouve les mêmes caractères.

16. GYROPHORA PROBOSCIDEA. *Ach. lich. un.* p. 220, n° 2. — *Brown. chlor. melv.*, n° 100.
Umbilicaria proboscidea. β. γ. *Dec. fl. fr.* 2, p. 410.
Sur les rocs schisteux du sommet principal.

17. VERRUCARIA SCHRADERI. *Ach. lich. un.* p. 284, n° 21.
V. rupestris. — *Schrad.* — *Dec. fl. fr.* 2, p. 317.
Sommet inférieur, sur les rochers calcaires.

18. VERRUCARIA UMBRINA. *Ach. lich. un.* p. 291, n° 38.
V. nigrescens. — *Pers.* — *Dec. fl. fr.* 2, p. 319.
Roches calcaires du sommet inférieur.

19. VERRUCARIA CINCTA. N.
Roches calcaires du sommet inférieur.

Tubercules très-gros pour ce genre, et fort saillants au-dessus de la croûte. Celle-ci est blanche et pulvérulente. Les tubercules sont plus ou moins saupoudrés de cette farine, et elle les ceint, en outre, d'un anneau blanc. Ce caractère ne permet pas de confondre cette espèce avec le *V. exserta*, autre espèce également nouvelle que j'ai découverte à *Lhierins*, et à laquelle elle res-

semble d'ailleurs par la grosseur et la saillie de ses tubercules, tandis que ces derniers caractères, communs aux deux espèces, les distinguent nettement l'une et l'autre de toutes les verrucaires que l'on rencontre sur les rochers et les murs.

20. Endocarpon complicatum. *Ach. lich. un.* p. 303, nº 17. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 413.

Sommet principal.

21. Urceolaria bryophila. α. *Ach. lich. un.* p. 341, nº 17. *U. scruposa.* β. γ. *Dec. fl. fr.* 2, p. 372.

Sommet principal, à terre, sur les mousses et les tiges pourries du *Carex curvula*, 19 juillet 1801.

22. Urceolaria cinerea. γ. *Ach. lich. un.* p. 337, nº 11. *U. tessellata* γ. *Dec. fl. fr.* 2, p. 371.

Sommet principal, sur la roche micacée, 1803.

23. Urceolaria? castanea. N. *In Dec. fl. fr.* 2, p. 371.

Sommet principal. Mêlée avec le *L. miniatus.*

Elle est composée de folioles convexes, d'un brun marron luisant, séparées et arrondies, ou rapprochées et difformes, au centre desquelles s'ouvre un urcéole d'abord indiqué par un point, puis épanoui en bassin, toujours enfoncé dans la foliole, et d'un brun encore plus foncé. Cette espèce se place entre les urcéolaires et le *Peltidea.* Il faudra peut-être la ranger dans ce dernier genre.

24. Lecanora atra. α. *Ach. lich. un.* p. 344, nº 1. *Patellaria tephromelas.* — *Dec. fl. fr.* 2, p. 362.

Sommet principal.

25. Lecanora argopholis. *Ach. lich. un.* p. 346, nº 2. (*Ex descriptione.*)

Sommet principal.

Très-semblable au précédent; mais ses scutelles sont brunes et

non pas noires, très-grandes, souvent difformes, entourées d'un rebord très-saillant, ondulé, crénelé et dominant toujours le disque, qui demeure plane ou même creux à tous ses âges.

26. Lecanora glaucoma. *Ach. lich. un.* p. 362, n° 24.
Patellaria glaucoma. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 352.

Sommet principal.

27. Lecanora craspedia. *Ach. lich. un.* p. 391, n° 62.
Patellaria craspedia. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 355.

28. Lecanora epibryon. *Ach. lich. un.* p. 396, n° 66.
Patellaria hypnorum. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 362.

Ce lichen et le précédent sont indiqués dans mon ancien catalogue de 1803. Ne les ayant plus sous les yeux, je ne puis m'assurer si cette indication est fondée.

29. Lecanora bicincta. N.

Sommet supérieur sur la roche micacée, 30 septembre 1803.

Belle espèce, très-apparente, que je ne trouve décrite nulle part. Croûte lisse, mais fendillée en aréoles irrégulières; elle est d'une couleur jaune fauve, bordée de noir. Scutelles nombreuses, sessiles, de grandeur médiocre, souvent irrégulières; leur disque est noir, légèrement poudré de poussière glauque, et environné d'un rebord propre, parfaitement noir, ceint à son tour d'un second rebord jaunâtre fourni par la croûte. Ces scutelles finissent par devenir convexes, sans perdre ni l'un ni l'autre de leurs rebords. Ce lichen a de l'analogie avec le *L. confluens.*

30. Lecanora badia. γ. *Fuscata.* — *Ach. lich. un.* p. 407, n°. 85.
Patellaria badia. α. *Dec. fl. fr.* 2, p. 361. *Ex ipso.*

Sommet supérieur, au nord.

31. Lecanora decipiens. *Ach. lich. un.* p. 409, n° 87.
Lecidea decipiens. — *Ejusd. meth. lich.* p. 80.

Psora decipiens. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 369.

Autour du sommet, sur les débris du *Polytrichum commune.*

Acharius rompt tous les rapports naturels en plaçant ce lichen dans ses lécanores. Je ne puis discerner un *margo thallodes* autour de ses tubercules; et quand même ils en offriraient quelquefois l'apparence, il n'est pas clair que le *L. luridus* et d'autres *Lecidea* ne donnassent lieu à des remarques semblables, quand le *Thallus* accompagne les tubercules dans leur premier développement. Souvent, dans le doute, Acharius a su se décider par des considérations tirées du port: c'était bien le cas ici, car on ne saurait affirmer que la présence ou l'absence du rebord soit un caractère de telle importance qu'il doive l'emporter sur l'habitude entière de la plante. Le *L. decipiens* se place à côté du *luridus*, au voisinage des *Psora* à tubercules noirs, latéraux, tels que le *candidus*, le *vesicularis*, avec lesquels il a certainement plus de rapports qu'il n'en a avec le *Lecanora crassa, cartilaginea*, *rubina*, dont les tubercules évidemment bordés, autrement faits, autrement colorés, et naissant sur le disque même des folioles, repoussent une association purement systématique et démentie par la nature.

32. Lecanora cartilaginea. *Ach. lich. un.* p. 415, nº 96.

Squamaria cartilaginea. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 376.

Sur la crête occidentale, descendante du sommet supérieur, 19 juillet 1801.

33. Lecanora melanophthalma.

Squamaria melanophthalma. N. *Dec. fl. fr.* 2, p. 376.

Sommet supérieur, 16 août 1795, 19 juillet 1801.

34. Lecanora electrina.

Squamaria electrina. N. *Dec. fl. fr.* 2, p. 374.

Sommet supérieur.

35. Lecanora concolor. N.

Sommet supérieur, appliqué sur ses rochers, 12 septembre 1803.

Croûte épaisse, formée de crustules distinctes, mais étroitement agglomérées et difformes, excepté au pourtour où elles se déploient en expansions lobées. La surface du lichen est lisse et d'une couleur fauve clair; l'intérieur est blanc, le dessous noir. Du milieu des crustules, naissent des scutelles d'abord concaves, puis planes et même convexes, mais toujours ceintes de leur rebord. Leur couleur ne diffère pas sensiblement de celle de la croûte. Seulement avec l'âge, leur disque se teint d'un fauve un peu plus foncé.

36. L. CONCOLOR. β. DISPERSA. N.

Je réunis à cette espèce, comme variété, un lichen très-commun sur les roches occidentales du Pic, et qui ne présente que des crustules éparses, mais d'ailleurs semblables et colorées de même. Leurs tubercules sont pareils, sauf que le rebord paraît un peu plus mince, et le disque disposé à se colorer en fauve rougeâtre. Quelques botanistes ont cru y reconnaître le *L. polytropus* d'Ehrhart; mais la description qu'Acharius nous donne de celui-là, p. 192, β, ne convient au nôtre en aucune manière.

37. LECANORA MINIATA. *Ach. lich. un.* p. 434, n° 127.
Placodium elegans. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 379.

Rochers du sommet inférieur, 16 septembre 1793.

38. LECANORA ELEGANS. *Ach. lich. un.* p. 436, n° 128. — *Brown. chlor. melv.* n° 101.

Roches calcaires du sommet inférieur, 23 septembre 1803.

Decandolle le confond avec le précédent, dans sa description et ses synonymes : je crois qu'il n'a pas tort.

39. PARMELIA SAXATILIS. *Ach. lich. un.* p. 469, n° 24.
Imbricaria retiruga. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 389.

A terre, sur des débris de végétaux. — Je ne suis pas sans quelque doute sur cette espèce; je ne l'ai trouvée qu'en lambeaux à peine reconnaissables.

40. PARMELIA ENCAUSTA. Var. *Ach. lich. un.* p. 489, nº 49.
Imbricaria encausta. β. *Dec. fl. fr.* 2, p. 394.

Très-commun sur les roches du sommet principal. Il y acquiert des dimensions telles que j'en ai un échantillon de 13 à 14 centimètres (cinq pouces) de diamètre. Decandolle, qui cite mes échantillons mêmes, remarque que cette variété diffère de l'espèce par ses expansions plus larges, plus noires et imponctuées. Je n'y ai jamais rencontré de fructifications : si un jour on en trouve, on y reconnaîtra peut-être une espèce distincte.

41. CETRARIA JUNIPERINA. *Ach. lich. un.* p. 506, nº 1. — *Brown. chlor. melv.* nº 103.
Physcia juniperina. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 400.

Sommet inférieur, à terre, sur les débris de *Carex*, de *Hypnum* et les rameaux de *Saxifraga oppositifolia*, 14 octobre 1795, 28 juillet 1797, 30 septembre 1803.

Feuilles bordées de points noirs. Quelques scutelles à rebord dentelé et même foliacé.

42. CETRARIA JUNIPERINA. β. *Pinastri.* — *Ach. l. un.* p. 506, nº 1.
Physcia pinastri. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 400.

Même lieu. Il ne diffère du précédent que par la pulvérulence du bord de ses feuilles, et on voit ces deux lichens se rapprocher par des intermédiaires qui en effacent les limites.

43. CETRARIA NIVALIS. *Ach. lich. un.* p. 510, nº 6. — *Brown. melv.* nº 104.
Physcia nivalis. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 400.

Pêle-mêle avec les deux précédents. Sommet inférieur, 28 juillet 1797; sommet supérieur, 11 septembre 1810.

Expansions plus redressées, plus simples et moins crépues que les précédents; leur bord ne présente ni globules noirs, ni paquets farineux. Il est blanc, mais ordinairement teint de jaune à sa base. Il ne fructifie point ici.

44. Cetraria islandica. *Ach. lich. un.* p. 512, n° 8. — *Brown. melv.* n° 106.
Physcia islandica. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 399.
Sommet inférieur, à terre, 28 juillet 1797.

On n'y trouve que les variétés les plus menues, toujours dépourvues de scutelles. Dans cet état, il ressemble tout-à-fait au *Cornicularia spadicea*, mais s'en distingue toujours par ses expansions canaliculées.

45. Peltidea horizontalis. *Ach. lich. un.* p. 515, n° 3.
Peltigera horizontalis. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 406.
A terre, sans fructification, 1805.

46. Cenomyce pyxidata. α. *Ach. lich. un.* p. 534, n° 12. — *Brown. melv.* n° 112.
Scyphophorus pyxidatus. α. *Dec. fl. fr.* 2, p. 339.
Sommet supérieur.

47. Cenomyce coccifera. α. *Ach. lich. un.* p. 537, n°. 13.
Scyphophorus cocciferus. α. *Dec. fl. fr.* 2, p. 339.
Sommet supérieur.

Quelques brins mêlés à des mousses et d'autres lichens terrestres.

48. Cenomyce uncialis. α. *Ach. lich. un.* p. 558, n° 25.
Cladonia ceranoïdes. α. *Dec. fl. fr.* 2, p. 337.
A terre, assez commun.

49. Cenomyce vermicularis. β. *Ach. lich. un.* p. 566, n° 31.
Cladonia vermicularis. β. *Dec. fl. fr.* 2, p. 335.
Sommet inférieur, avec le *L. nivalis*, *juniperinus*, *islandicus*.

Tiges épaisses, renflées dans leur milieu, et un peu rameuses : caractères distinctifs de cette variété que j'ai rencontrée aussi autour du lac du Mont-Perdu. L'autre variété est commune dans

les hautes Pyrénées, et se trouve également dans l'île Melville. *Brown. chl. melv.* n° 111.

50. STEREOCAULON PASCHALE. *Ach. lich. un.* p. 581, n° 2. — *Brown. melv.* n° 113. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 528.

Entre les deux sommets, sur la crête qui les sépare.

51. CORNICULARIA SPADICEA. α. *Ach. lich. un.* p. 611, n° 2. *C. aculeata.* — *Dec. fl. fr.* 2, p. 329.

A terre, sur des débris de *Saxifraga oppositifolia.*

Decandolle ne distingue point le *C. spadicea* de l'*aculeata.* Acharius, qui les sépare, convient néanmoins que l'on peut sans erreur les réunir.

HÉPATIQUES.

52. JUNGERMANNIA BIDENTATA. *Dec. fl. fr.* 2, p. 430. — *Vaill. bot. par. t.* 19, *fig.* 8.

Quelques tiges attachées à des lichens.

MOUSSES.

53. DIDYMODON CAPILLACEUM. *Swartz.* — *Dec. fl. fr.* 2, p. 463. — *Brown. chlor. melv.* n° 85.

Cynontodium capillaceum. — *Schwægr.* 1, p. 57. — *Brid. suppl.* 1, p. 156.

En fragments difficiles à déterminer.

54. POLYTRICHUM COMMUNE. *Dec. fl. fr.* 2, p. 487. — *Schwægr.* 1, p. 88. — *Brid. musc.* 2, p. 85. — *Suppl.* 2, p. 54.

Entre les deux sommets, végétant vigoureusement.

55. POLYTRICHUM PILIFERUM. *Dec. fl. fr.* 2, p. 488. — *Brid.* 2, p. 85. — *Suppl.* 1, p. 52.

Sommet supérieur.

56. Polytrichum alpinum. *Dec. fl. fr.* 2, p. 490. — *Schwægr.* p. 92, t. 19, fig. 2, *b.* — *Brid.* 2, p. 99, *et suppl.* 1, p. 62.

57. Hypnum uncinatum. *Dec. fl. fr.* 2, p. 525. — *Schwæg.* 1, p. 289. — *Brid. musc.* 3, p. 133. *Excluso syn. Lam.*

58. Hypnum squarrosum. *Dec. fl. fr.* 2, p. 629. — *Schwægr.* p. 281.

Ce qui j'ai rencontré d'individus de cette espèce et des deux précédentes, est tellement défectueux, que je ne sais si, à force de comparaisons, je suis parvenu à les bien reconnaître. D'autres m'ont paru appartenir au *Hypnum molluscum* de Schwægrichen et de Bridel (*Crista castrensis*, de Decandolle), que j'ai observé en meilleur état à peu de distance au-dessous du sommet. On trouve beaucoup de brins de mousses sur les deux sommets; l'embarras est de les déterminer. Ils sont, pour la plupart, dépourvus de fructifications. On ne saurait herboriser dans les Pyrénées sans remarquer avec étonnement combien de mousses s'y propagent sans jamais fructifier. Le nombre des espèces qui y demeurent stériles, a souvent frappé comme moi les botanistes étrangers avec lesquels j'ai parcouru ces contrées. Quelle que soit la cause de ce phénomène, ce ne sera pas sur les hautes cimes qu'on s'attendra à le voir se démentir.

FOUGÈRES.

59. Botrychium lunaria. *Swartz.* — *Willd. sp.* 5, p. 61. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 569.

Sommet inférieur, 14 septembre 1792. Au-dessus du sommet supérieur, à la cabane de Reboul, 16 septembre 1793.

60. Aspidium regium. *Willd. sp.* 5, p. 281.
Cyathea regia. — *Smith. brit.* 3, p. 1140.

Sommet supérieur, au levant, 30 août 1805.

Comparée à des échantillons étiquetés par Willdenow, ma fougère est plus petite (8 centim. ou 3 pouces), feuillée un peu plus bas,

et à folioles plus rapprochées, du reste fort semblable, suffisamment représentée par la fig. de Villars, tab. 53, fig. C; et encore mieux dans Vaillant, Bot. par. tab. IX, fig. 1, que Villars cite avec raison, et dont Desfontaines a adopté le synonyme dans son herbier.

61. Aspidium fragile. *Willd. sp.* 5, p. 280. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 558. α.

Cyathea fragilis. — *Smith. brit.* 3, p. 1139. α.

Sommet supérieur, au levant, sur les rochers, près de la neige, juillet 1799, août 1805.

62. Asplenium viride. *Willd. sp.* 5, p. 332. α. — *Smith. brit.* 3, p. 1127. α. — *Dec. fl. fr.* 2, p. 554.

Commun dans les fentes de rochers des deux sommets.

PHANÉROGAMES.

CYPÉROÏDES.

63. Carex curvula. *Allion. ped.* n° 2295, tab. 92, fig. 3. — *Willd. sp.* 4, p. 218. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 109. (*Non Lam. dict.*)

Sommet inférieur, 28 juillet 1797; sommet supérieur, 11 septembre 1810.

Petits individus de 2 à 3 pouces.

64. Carex ovalis. *Gooden.* — *Smith. brit.* 3, p. 968. — *Willd. sp.* 4, p. 229. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 110.

Sur les deux sommets, comme sur toute la pente du Pic, 1799.

65. Carex nigra. *All. ped.* n° 2310. — *Willd. sp.* 4, p. 266. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 113.

Sommet supérieur, 26 août 1795; sommet inférieur, 7 octobre 1809.

Ordinairement trois ou quatre épis ramassés; le supérieur mâle.

GRAMINÉES.

66. Agrostis alpina. *Willd. sp.* 1, p. 368. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 20. — *Scheuchz. prodr. tab.* 4, fig. 1.

Entre les deux sommets, 15 septembre 1805.

67. Aira subspicata. L. *Willd. sp.* 1, p. 377.
Avena airoïdes. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 37.
Trisetum subspicatum. Paliss. — *Brown. chl. melv.* n° 65. — *Hall. helv.* n° 1490. — *Scheuchz. prodr. t.* 6, *f.* 2.

Cette graminée abonde dans la partie moyenne du Pic, au bord du précipice appelé *Trou de Montariou;* je l'ai trouvée au sommet, le 30 août 1805. Koeler et Decandolle ont raison de la ranger dans les avoines. Je ne cite point la fig. 228 de la Flore danoise; elle ne représente pas mieux les individus que j'ai reçus de Norwège, qu'elle ne représente les nôtres. Celle de Scheuchzer, au contraire, est excellente et ne laisse rien à désirer, si ce n'est que l'on n'y voit pas l'agrégation des chaumes, partant d'une base commune, épaissie et bulbiforme, circonstance que Haller seul a aperçue et indiquée.

68. Festuca violacea. *Gaud. agr. helv.* 1, p. 231. — *Dec. fl. fr. suppl.* p. 265.

Sommet supérieur et tout le long de la crête qui rejoint le sommet inférieur, 26 août 1795, 30 août 1805.

Je rapporte à cette espèce une graminée qui ressemble au *F. rubra* de Leers, mais s'en distingue fort bien par sa petitesse, ses feuilles très-glauques, ses pédicelles et le rachis des fleurs plutôt velus que scabres, et surtout par ses glumes calicinales bien moins inégales et beaucoup plus longues, puisqu'elles atteignent aux deux tiers de la fleur correspondante. Elle a le port et l'aspect du *F. Halleri,* mais en diffère suffisamment par la brièveté de ses arêtes. Touffes épaisses, formées d'un grand nombre de chaumes agrégés. Feuilles glauques, roulées et capillaires,

n'atteignant pas à la moitié des chaumes, qui n'ont eux-mêmes que de 10 à 16 centimètres (4 à 6 pouces) de haut. Panicule peu garnie, resserrée en épi d'un violet plus ou moins foncé. Épillets de 3 à 4 fleurs.

J'ai trouvé aussi cette graminée au bord du lac du Mont-Perdu. Elle y est de moitié plus petite, et ses épillets sont d'un pourpre noir.

69. Festuca eskia. N. *Dec. fl. fr.* 3, p. 52.

Varietas tenuifolia minor.

Parmi les débris de rochers, immédiatement au-dessous du sommet, du côté du midi, septembre 1803.

Cette variété a le port ordinaire de son espèce. Tiges allongées, traînantes, couvertes de feuilles flétries, roulées, courbes, dures et piquantes. De ces tiges s'élèvent, de loin en loin, des chaumes ascendants, garnis d'une couple de feuilles glauques très-courtes : ces chaumes sont ordinairement du double plus longs que les feuilles de la base. La ténuité des feuilles est le seul caractère qui distingue cette variété, et la rapprocherait tant du *F. varia* de Hæncke, que du *F. acuminata* de Gaudin, si d'ailleurs elle ne s'en éloignait par la brièveté, la courbure et la roideur de ses feuilles. Au reste, toutes ces festuques à épillets luisants et à feuilles roulées forment un petit groupe qu'il est difficile de subdiviser en espèces suffisamment tranchées, et où je n'en trouve qu'une, *F. villosa. Haller fil.*, qui se distingue nettement par la petitesse de ses fleurs et les poils qui en garnissent la base.

Ma plante porte, dans le pays, le nom d'*Eskia*, et c'est celui que je lui ai définitivement donné ; mais on l'appelle aussi *Oursagne*, et j'avais d'abord traduit cette dénomination. Plusieurs botanistes l'ont reçue de moi étiquetée *F. crinum ursi*, et elle figure successivement sous les deux noms dans le Dict. encycl. tom. X, p. 633, nº 30 et 33.

Le *F. eskia* s'empare surtout de la face méridionale des montagnes. Il commence à paraître où finit le *Nardus stricta*, et constitue au Pic du Midi le fonds de la végétation graminée, depuis la hauteur absolue de 1150 toises jusqu'à celle d'environ 1400. Rien de plus dangereux dans les Pyrénées que cette herbe enchevê-

trée, dure et glissante, dont les tapis épais font des moindres pentes autant de précipices. A peine les meilleurs crampons y mordent: c'est l'écueil le plus ordinaire du gros bétail, et presque l'unique cause des accidents, d'ailleurs peu nombreux, qui arrivent aux agiles habitants de ces contrées.

70. Poa alpina. Var. *Willd. sp.* 1, p. 386. — *Smith. br.* 1, p. 100. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 62.

Sommet supérieur, 16 septembre 1793, 22 juillet 1799, 30 août 1809, 11 septembre 1810.

Petits individus de 2 à 4 pouces; panicule peu garnie et peu étalée. Épillets de 3 à 4 fleurs au plus, où domine le violet foncé. Pédicelles très-lisses, caractère qui distingue parfaitement cette espèce du *P. frigida* de Gaudin et d'autres analogues. Je ne cite pas la très-bonne figure de Scheuchzer, qui représente le *Poa alpina* dans son état ordinaire et ne peut servir à le reconnaître sous la forme qu'il revêt ici.

71. Poa cenisia. *Allion. auctar.* p. 40. (*Collatis speciminibus*). *Dec. fl. fr.* 3, p. 720, *et suppl.* p. 274. — *Poir. dict. XII*, p. 328, n° 79.

P. distichophylla. — *Gaud. agr. helv.* 1, p. 199.

Sur les deux sommets, 30 août 1805, 11 septembre 1810.

Tiges traînantes, chaumes ascendants, comprimés à leur base. Feuilles glauques et distiques, surtout dans les pousses stériles. Ces derniers caractères, observés par Gaudin sur sa plante, sont omis par Allioni dans sa description, et je n'aurais pu croire à l'identité, si je n'avais été à portée de confronter la plante même de Gaudin avec un échantillon de celle d'Allioni, tiré de son propre herbier, et envoyé par Balbis à M. Delessert. Dans les individus du Pic du Midi, les épillets renferment cinq fleurs. C'est par suite d'une erreur qui nous a été commune que, dans la Flore française, Decandolle rapporte ma plante à son *P. elegans*, qui est le *P. laxa* de Willdenow, petite espèce grêle, à épillets pauciflores, native des hautes Alpes, et que je n'ai jamais rencontrée

dans les Pyrénées. Le *P. cenisia* diffère constamment de celle-là par sa roideur, ses feuilles divergentes, scabres sur les bords, sa panicule plus serrée, à rameaux beaucoup plus courts, ses pédicelles chargés d'aspérités, caractères qu'il conserve dans tous ses états, et qui m'ont servi à ramener à l'espèce de petits échantillons à épillets triflores que j'ai rencontrés au port de la Canau.

72. Avena sempervirens. *Vill. delph.* 2, p. 140, t. 5. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 35.

A. striata. — *Lam. dict.* 1, p. 332.

Sommet inférieur, 26 août 1795; sommet supérieur, 30 août 1805.

Cette graminée, habituellement très-glauque, est ici tout-à-fait cendrée. Quelquefois pourtant on la rencontre verte, mais plus rarement au Pic que dans des lieux moins froids et moins arides. Les épillets, ici comme ailleurs, contiennent un nombre de fleurs qui est assez constamment de trois, dont une stérile. Quant aux houppes de poils qui tiennent lieu de ligule, elles sont quelquefois peu perceptibles, et manquent tantôt à l'une des feuilles d'un même chaume, tantôt à l'un des chaumes d'une même touffe; à leur place, on voit un élément de stipule souvent laceré. Ces variations pourraient répandre du doute sur l'*A. sedenensis*, que Clarion a séparée de l'espèce, si toutefois cette séparation n'est pas appuyée de caractères plus solides.

POLYGONÉES.

73. Rumex digynus. *Willd. sp.* 2, p. 258. — *Smith. br.* 1, p. 395. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 379.

Oxyria reniformis. — *Brown. chl. melv.* n° 46. — *Flor. dan.* 1, tab. 14. — *Gærtn. fr.* 2, p. 180, t. 119, fig. 2.

Sommet supérieur au nord, sur le bord du précipice. En fleur, le 28 juillet 1797, et le 30 août 1805. Pas encore en fleur, le 8 août 1809.

Tiges de 2 à 4 pouces, naissant en touffes, d'une racine très-épaisse

et très-longue qui pénètre profondément dans les fentes du rocher. La figure de la Flore danoise représente la plante beaucoup plus grande, et telle que je l'ai de la brèche de Roland. A Néouvielle, elle est réduite aux mêmes dimensions qu'au Pic du Midi. Espèce très-certainement vivace, comme le disent tous les auteurs, et non pas annuelle, comme le dit la Flore française.

PLANTAGINÉES.

74. Plantago alpina. *Willd. sp.* 2, *pars.* 2, p. 645. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 413.

Sommet supérieur, en petites touffes éparses.

Ce plantain, fort commun dans les hautes Pyrénées, y porte le nom de *Mortara.* Mêlé avec le *Trifolium alpinum*, que l'on appelle *Baniou*, il forme des pelouses d'une extrême finesse et souvent d'une grande étendue. Les pâturages où ces pelouses se rencontrent, sont réputés les meilleurs pour les moutons.

PLUMBAGINÉES.

75. Statice armeria. *Willd. sp.* 1, *pars.* 2, p. 1522. *Var.* β. *Dec. fl. fr.* 3, p. 419. *Var.* γ.
S. linearifolia. β. *Loisel. fl. gall.* p. 182.

En fleur, sur le sommet inférieur, le 8 août 1809; sur le sommet supérieur, le 16 septembre 1793, le 11 et le 22 septembre 1810.

Feuilles exactement linéaires, un peu charnues et très-obtuses; hampes entièrement glabres; calice des fleurs très-velu. Bien distincte assurément du *St. maritima* dont Loiseleur fait sa variété α, et qui a les feuilles bien plus menues, un peu triangulaires, et les hampes pubescentes. Elle ne diffère pas moins du *S. elongata* des environs de Paris, dont les feuilles sont planes, linéaires-lancéolées, très-aiguës, à trois nervures, et qui se rapproche beaucoup du *St. plantaginea*, que j'ai recueilli en Auvergne.

LYSIMACHIES. Juss. PRIMULACÉES. Vent. dec.

76. Androsace ciliata. *Dec. fl. fr.* 3, p. 441. — *Ic. pl. gall. rar. fasc.* 1, p. 3, t. 6*.

Sommet supérieur, au nord, sur les rochers formant l'escarpement du précipice.

En pleine fleur, le 8 août 1809, année très-tardive. Je l'avais trouvée fleurie le 22 juillet 1799, et dès le 19 juillet 1801. Massey encore plus tôt, savoir le 3 juillet 1798. C'est peut-être la plante la plus précoce du Pic.

Elle végète vigoureusement dans des situations bien plus froides encore. Je l'ai recueillie couverte de fleurs, le 12 août 1797, au haut du glacier de *Tuque rouye*, en plein nord, et le 10 août 1802, à la cime du Mont-Perdu. Nulle part même je ne l'ai vue aussi forte, aussi belle, aussi vivement colorée.

C'est une arétie, et le représentant, dans les hautes Pyrénées, de l'*Aretia alpina*, que je n'y ai point rencontrée. On l'avait confondue avec celle-là, et il est en effet difficile de l'en distinguer par des caractères bien tranchants, quoiqu'elle s'en distingue à la première vue, par la grandeur relative de ses feuilles et de ses fleurs, la longueur de ses pédoncules, et l'aspect glabre de toutes ses parties. Tout cela varie bien jusqu'à un certain point : les feuilles diminuent de grandeur; des poils rameux se mêlent aux poils simples dont elles sont ciliées, et envahissent même une partie du disque : cependant l'aspect général ne se dément pas; les feuilles continuent à se distinguer par une circonscription un peu différente; la partie la plus large paraît plus voisine du sommet; et dans certains individus même, on y aperçoit une dent glanduleuse de chaque côté. Toujours aussi, le tube de la corolle approche davantage de la longueur du calice.

Si les deux plantes croissaient à la fois dans la même contrée, les circonstances qui ont pu modifier leurs formes seraient appréciables, et l'examen critique de ces circonstances amènerait à prononcer sur la nature de leur affinité. Mais si, au contraire, chacune des deux appartient à une contrée distincte; si chacune des deux chaînes a une portion de sa végétation qui lui est propre,

et dont nos deux plantes font respectivement partie, alors la plante des Alpes et celle des Pyrénées caractérisent à leur manière les lieux où elles demeurent confinées, sans nous initier dans le secret des influences dont leur forme est la manifestation. Elles se ressemblent comme les deux contrées : elles diffèrent comme elles. Mais que l'on compare ou ces ressemblances ou ces dissemblances, d'ailleurs si expressives, on n'en résoudra pas mieux la question de savoir si les deux plantes sont parties originairement du même centre de dissémination et dérivent du même type, diversement modifié par les circonstances locales; ou si, au contraire, elles remontent chacune à une création spéciale qui aurait partout assorti les types à la condition des lieux.

77. Androsace villosa. *Willd. sp.* 1, *pars* 2, p. 798. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 441.

Entre les deux sommets, et sur le sommet inférieur, 8 août 1792, 28 juillet 1797.

78. Androsace carnea β. *Halleri.* — *Willd. sp.* 1, *pars* 2, p. 800. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 442, *et suppl.* p. 383. — *Hall. helv.* n° 619, t. 17, f. 6. *Descript. opt.*

Sur les deux sommets, 8 août 1792, 28 juillet 1797.

Nous n'avons que la variété à feuilles ciliées, qui varie elle-même à fleurs blanches.

79. Primula integrifolia. *Willd. sp.* 1, *pars* 2, p. 805. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 450. — *Clus. hist.* 1, p. 304, fig. 1.

Sommet inférieur, 28 juillet 1797.

En fleur, elle est très-basse, mais grandit beaucoup en fructifiant. Ses feuilles s'allongent et tendent à se denter au sommet. Dans cette espèce, on voit tantôt les étamines insérées au bas du tube et le style s'élever jusqu'à son milieu, tantôt les étamines insérées au milieu du tube et le style caché au fond. Ces variations sont fort communes dans les primevères : je les ai également observées

dans le *P. officinalis* et le *P. elatior;* elles ne paraissent donc pas fournir un caractère suffisant pour distinguer spécifiquement le *P. viscosa* du *P. hirsuta*, et le *Primula brevistyla* du *P. grandiflora*.

PÉDICULAIRES. J. RHINANTHACÉES. Vent. Dec.

80. Veronica saxatilis. *Willd. sp.* 1, p. 62. α. — *Smith. brit.* 1, p. 17. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 469. — *Flor. dan.* 2, t. 342. — *Clus. hist.* 1, p. 347, fig. 1.

Sommet supérieur, 16 septembre 1793.

Commune sur tout le Pic. Les feuilles sont en général entières, mais quelquefois un peu crénelées. Du reste, mes échantillons du sommet sont fort semblables à ceux qui me viennent du Danemark.

81. Veronica nummularia. *Gouan. Ill.* p. 1, tab. 1, fig. 2. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 470.

Sommet supérieur, 28 juillet 1797, 21 juillet 1798, 22 juillet 1799, 8 août 1809.

Espèce assurément bien distincte de la précédente. Feuilles arrondies, crénelées, ciliées. Fleurs bleues dont le segment supérieur est redressé et plié longitudinalement en gouttière, la convexité regardant l'intérieur de la fleur.

82. Pedicularis rostrata. *Willd. sp.* 3, p. 216. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 481. α. — *Hall. helv.* 1, n° 322, tab. 8, f. 1. *Haud bona.*

Entre les deux sommets, 11 août 1799.

La figure de Haller est très-défectueuse. Elle représente la racine sous la forme d'une tubérosité, ce qui est en pleine contradiction avec la description même de l'auteur (*Radices flavæ, longissimæ, teretes*). Cette racine, en effet, se compose de fibres épaisses, charnues, longues, quelquefois rameuses, plus souvent fasciculées. Ce caractère seul suffirait pour distinguer notre espèce du *P. gyroflexa,* qui croît également sur les pentes du Pic,

et que plusieurs auteurs semblent confondre avec elle. On ne l'en distingue pas moins à ses fleurs portées sur des pédoncules allongés, et formant un épi très-lâche au lieu d'une tête serrée; à leur bec long et droit, dirigé en avant au lieu d'être couché sur la lèvre inférieure; enfin à la position de cette lèvre même, qui est horizontale et non pas oblique, comme dans le *P. gyroflexa*, dont les fleurs sont toutes contournées, ainsi que l'indique son nom.

LABIÉES.

83. Thymus serpyllum. *Willd. sp.* 3, p. 138. — *Smith. br.* 2, p. 639. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 559.

Sommet supérieur, 14 septembre 1792, 16 septembre 1793, en fleur le 11 septembre et jusqu'au 22 septembre 1810.

Fleurs très-petites, en petites têtes peu garnies. Étamines à peine saillantes, feuilles fortement ciliées, très-odorantes : tels sont les caractères de la variété que j'ai habituellement rencontrée au sommet du Pic.

SCROPHULAIRES. J. PERSONNÉES. Vent.

84. Linaria alpina. *Dec. fl. fr.* 3, p. 590.

Antirrhinum alpinum. — *Willd. sp.* 3, p. 248. — *Clus. hist.* 1, p. 322, f. 1.

Sommet supérieur, 14 septembre 1792, 16 septembre 1793, 11 et 22 septembre 1810; en fleur.

Feuilles courtes, épaisses, extrêmement glauques, d'une dessiccation difficile; fleurs d'un bleu décidé et très-foncé. Je l'ai trouvée tantôt à tiges simples et redressées, tantôt à tiges très-nombreuses, partant d'une racine assez grosse et fort longue.

Au Mont-Perdu, et ceci est singulier, elle a bien moins le caractère des plantes qui croissent dans les lieux élevés : je l'y ai trouvée à feuilles plus vertes, plus étroites, plus longues, à tiges plus faibles et également plus allongées ; à fleurs d'un violet clair; et, en un mot, plus semblable à la plante que représente la figure de l'Écluse.

BORRAGINÉES.

85. Myosotis pyrenaica. *Pourr. act. tol.* 3, p. 323.
M. alpestris. — *Schmied. fl. bohem.* 3, p. 26.
M. perennis. γ. *Dec. fl. fr.* 3, p. 629.

Sommet supérieur et entre les deux sommets, 26 août 1795, 11 et 22 septembre 1810.

Petits individus d'une couple de pouces de hauteur. Racine épaisse; feuilles inférieures plus ou moins pétiolées, très-velues; grandes fleurs d'un bleu admirable. On rencontre partout cette plante dans les Pyrénées. Je l'ai trouvée également sur le Puy-de-Dôme et le Puy-de-Sancy. Au milieu des variations infinies de sa forme et de ses dimensions, il me semble bien difficile de démêler un caractère qui la distingue constamment du *M. palustris.*

GENTIANES.

86. Gentiana alpina. *Vill. delph.* 2, p. 526, tab. x. — *Dec. fl. fr. suppl.* p. 427.
G. acaulis. γ. *Dec. fl. fr.* 3, p. 654. — *Froehl. gent.* p. 57 - 58. β?

Sur la crête qui sépare les deux sommets. Depuis le 2 août 1787, où je l'ai recueillie pour la première fois, je n'ai jamais manqué de l'y trouver en août et jusqu'au milieu de septembre, toujours commençant à fleurir un peu plus tard que le *G. verna.* Sa fleur absolument sessile, et ses feuilles ovales arrondies, sont les caractères qui distinguent cette espèce ou variété. Elle varie elle-même dans sa couleur. On la trouve à fleurs d'un bleu pâle, et à fleurs tout-à-fait blanches. Racines grêles, extrêmement amères.

87. Gentiana verna. *Var.* α. *Froehl. gent.* p. 65. — *Willd. sp.* 1, *pars* 2, p. 1342. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 655.

Sur la crête qui sépare les deux sommets, et autour de la cabane

de Reboul; encore en fleur le 14 septembre 1792 et le 11 septembre 1810. Elle fleurit ordinairement en août à ces hauteurs; au mois de juillet sur le Pic d'Ereslids, où j'ai trouvé sa variété à fleurs blanches, et dès le mois d'avril dans les vallées inférieures. Je l'ai rencontrée en abondance, à cette époque, au voisinage de Bagnères et dans le bassin du Lavédan. Il est à remarquer qu'un changement de climat aussi considérable, n'en apporte presque aucun aux formes et aux dimensions de cette petite plante.

CAMPANULACÉES.

88. Phyteuma hemisphærica. *Willd. sp.* 1, *pars* 2, p. 920. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 710

Sur la crête qui sépare les deux sommets, 16 sept. 1793, etc.

CHICORACÉES.

89 Hieracium prunellæfolium. *Gouan. Ill.* p. 57, tab. 22, fig. 3. — *Allion. ped.* n° 784, tab. xv, fig. 2. — *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 1574.

H. brunellæfolium. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 34.

Sommet supérieur, 16 septembre 1793, 26 août 1795.

Très-petits individus dont on ne peut prendre une juste idée, ni dans la figure plus développée des Illustrations de Gouan, ni, à plus forte raison, dans la grande figure d'Allioni, qui convient à peine aux échantillons de la base du Pic.

90. Leontodon lævigatus. *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 1546.

Taraxacum lævigatum. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 34. — *Poir. dict. XII*, p. 420, n° 5.

Sommet supérieur, et sur la crête entre les deux sommets, 26 août 1795, 7 octobre 1809, 11 septembre 1810.

Très-semblable au pissenlit commun. Il en diffère par sa hampe peu ou point amincie sous la fleur, et par son involucre, dont les

écailles sont toutes redressées. Ses feuilles sont glabres, minces, fortement runcinées, d'une dessiccation difficile. Dans la région des neiges, l'épiderme d'un grand nombre de plantes perd sa perméabilité. Il est représenté dans l'île Melville par le *Leont. palustre*, qui n'en diffère guère.

91. Apargia alpina. *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 1547.
Leontodon squamosum. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 154.
L. pyrenaïcum. — *Gouan. Ill.* p. 55, tab. XXII, fig. 1. 2.
Picris saxatilis. — *All. ped.* n° 766, tab. XIV, fig. 4.

Entre les deux sommets, 30 août 1805.

Les deux figures de Gouan représentent parfaitement cette plante, dans les deux états où je l'ai recueillie, soit ici, soit dans d'autres parties des Pyrénées. Celle d'Allioni convient mieux aux échantillons que j'ai pris sur le Puy-de-Dôme et les Monts-Dores.

CORYMBIFÈRES.

92. Gnaphalium alpinum. *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 1883. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 138.
Antennaria alpina. — *Brown. melv. n°* 41. — *Gærtn. fr.* 2, p. 410, tab. 167, fig. 3, E.

Au sommet, 26 août 1795; entre les deux sommets, 30 août 1810. — Je l'ai trouvé de même sur les pentes de Néouvielle. — Espèce nettement distinguée par le renflement qui termine les soies dont se compose l'aigrette de ses semences.

93. Gnaphalium norwegicum. *Retz. prod. fl. scand.* n° 1006. — *Fl. dan.* tab. 254.
Gn. sylvaticum. — *Smith. brit.* 2, p. 869. — *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 1884. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 134. *Var.* α.

Sommet supérieur, près la cabane de Reboul, 8 août 1792.

Individus fort petits, mais parfaitement caractérisés. Dans des positions moins élevées, je l'ai trouvé plus développé, plus conforme à la figure de la Flore danoise, et en tout semblable à la

plante de Retz, que j'ai reçue d'Islande, et que je dois à mon ami Hofman Bang, qui m'a procuré aussi les plantes de Norwège, de Laponie, du Groënland, dont l'étude était indispensable à l'exacte détermination des miennes.

94. GNAPHALIUM SUPINUM. *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 1888. — *Smith. brit.* 2, p. 871. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 133. — *Fl. dan.* 2, t. 332.

Sommet supérieur, 26 août 1795. Sommet inférieur, 30 août 1809.

Je rapporte, avec Smith, à cette espèce, la figure de la Flore danoise qui ne convient nullement au *Gn. alpinum;* et je pense, avec Decandolle, qu'il est difficile d'en séparer le *Gn. pusillum* de Hæncke, et le *fuscum* de Scopoli. On trouverait aisément les trois espèces dans mes échantillons, où les tiges sont plus ou moins couchées, les fleurs plus ou moins brunes, plus ou moins sessiles ou pédonculées, selon le lieu où je les ai pris, et les circonstances qui ont secondé ou restreint le développement de la plante.

95. ERIGERON ALPINUM. *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 1959. — *Smith. brit.* 2, p. 877. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 142. *Var.* β.

Sommet supérieur, 7 octobre 1809, 30 août 1805. Entre les deux sommets, 11 et 22 septembre 1810.

Calice cylindrique, plus ou moins velu. Demi-fleurons moins nombreux que les fleurons du centre. Individus très-petits au sommet du Pic, plus développés sur ses pentes. J'ai trouvé cette espèce rameuse et pluriflore au pic d'Ereslids : c'est la variété α de Decandolle.

96. ERIGERON UNIFLORUM. Lin. *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 1959. — *Fl. lapp.* t. 9, f. 3. (*Aster*).

E. alpinum. γ. *Dec. fl. fr.* 4, p. 142.

Sommet supérieur, 28 juillet 1797, 26 août 1795, 14 septembre 1792, 16 septembre 1793. Encore quelques fleurs le 22 sept. 1810.

Ce n'est certainement point une variété du précédent. Toujours

plus précoce dans les mêmes lieux, sa fleur est plus grande, plus belle et autrement conformée. Calice hémisphérique et non cylindrique, plus velu et d'une villosité cotonneuse. Demi-fleurons bien plus nombreux que les fleurons, dans le rapport de 100 ou 120 à 60 ou 70. Je l'ai trouvé rameux et pluriflore au port de Gavarnie, et à fleurs blanches sur les sommets de Néouvielle.

97. Arnica scorpioides. *Dec. fl. fr.* 4, p. 176. *Ex ipso.* — *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 2108. — *Hall. helv.* n° 89.

Sommet inférieur et escarpement septentrional du sommet supérieur, 16 septembre 1793, et 26 août 1795. Près la cabane de Reboul, 30 août 1805.

Cette espèce, très-commune dans les hautes Pyrénées, s'élève souvent jusqu'à deux pieds, devient pluriflore, et varie beaucoup dans la forme et la dentelure de ses feuilles. Ici, elle est simple, uniflore et n'a que cinq à six pouces de haut. Mais sa petitesse est compensée par la grandeur de la fleur. Sa racine offre une suite continue de nodosités écailleuses et charnues, d'une saveur douce tenant de la réglisse, mais mêlée d'amertume.

98. Chrysanthemum montanum. — *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 2143.

C. Leucanthemum. ε. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 178.

Bellis montana minor. — *J. B. hist.* 3, *pars* 1, p. 115, *cum icone.*

Entre les deux sommets, et sur les rochers à l'est, 15 septembre 1800, 11 septembre 1810.

La grossière figure qui accompagne la bonne description de J. Bauhin, convient bien mieux à ma plante que ne fait la gigantesque figure d'Allioni, conjointement citée par les auteurs, toute défectueuse qu'elle soit, surtout en ce qui concerne la disposition et la forme des feuilles inférieures. Il est bien difficile, au reste, de voir dans cette plante autre chose qu'une variété du Leucanthème.

99. Pyrethrum alpinum. α. *Willd. sp.* 3, p. 2153. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 182.

Sommet supérieur. En fleur, 22 juillet 1799, 26 août 1795, 1823.

16 septembre 1793. En 1809, depuis le 15 août jusqu'au 7 octobre. — 11 septembre 1810.

La plante du sommet est très-sensiblement velue. Plus bas, elle l'est beaucoup moins, mais je ne l'ai trouvée parfaitement glabre nulle part.

100. Bellis perennis. *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 2121. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 185.

Sommet supérieur, 14 septembre 1792, 16 septembre 1793, 26 août 1795, etc.

101. Artemisia spicata. *Willd. sp.* 3, *pars* 3, p. 1824. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 192.

A rupestris. — *Lam. dict.* 1, p. 262. — *Vill. delph.* 3, p. 246. *non Lin.*

Sommet inférieur, 26 août 1795; sommet supérieur, 22 septembre 1810.

Cabane de Reboul, 8 août 1792, 16 septembre 1793.

Cette espèce est fort bien décrite par Lamarck et Decandolle. L'épi va en s'épaississant de la base au sommet. Il est composé de fleurs assez grosses, éparses et un peu pendantes dans sa partie inférieure, agglomérées vers le haut en tête arrondie, et toujours dépassées à peine par les petites feuilles ou découpées ou linéaires, qui les accompagnent. Ces fleurs contiennent environ 30 fleurons, dont 5 à 6 stériles, portés sur un réceptable nu. Toutes les parties de la plante répandent, quand on les froisse, une odeur vive et pénétrante qui tient de celle de la lavande.

L'*A. boccone* que tous les auteurs associent à cette espèce, me paraît très-différente, si j'en juge d'après la figure qu'Allioni nous en a donnée, tab. VIII, fig. 1 de la Flore piémontaise, et t. 1, f. 2 de son *specimen*. J'y vois, en effet, un épi très-pointu, composé de très-petites fleurs, toutes dépassées de beaucoup par des feuilles pinnatifides et aiguës.

J'ai retrouvé ma plante du Pic du Midi, au-dessus du glacier de *Tuque rouye* et au sommet du Mont-Perdu : c'est par erreur que ces diverses indications sont rapportées, dans la Flore française,

à l'*A rupestris*, p. 91, qui est l'*A. mutellina* du suppl., p. 178. Je n'ai point rencontré celle-là dans les hautes Pyrénées.

RUBIACÉES.

102. GALIUM PYRENAICUM. *Gouan Ill.* p. 5, t. 1, f. 4. — *Willd. sp.* 1, *pars* 2, p. 589. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 260. (*Excl. syn. Villarsii.*)

Sommet supérieur, 8 août 1792, 26 août 1795, 11 et 22 septembre 1810.

Bien moins commun que le suivant.

103. GALIUM CÆSPITOSUM. N. — *an Lam. Ill. n°* 1369?

Au sommet, depuis le mois d'août jusqu'au mois d'octobre; commun sur toutes les parties du Pic.

Ce *Galium*, voisin du *pyrenaïcum*, Gouan, et du *pumilum*, Lam., est néanmoins trop distinct pour être confondu avec l'un ou l'autre. — D'une même racine naissent une multitude de tiges très-rameuses, faibles, entièrement couchées, et ayant jusqu'à 7 et 9 pouces de longueur. Elles sont parfaitement lisses, filiformes, cylindriques vers le bas, obscurément quadrangulaires vers le haut. Verticilles de 6 à 8 feuilles, de la longueur, à peu près, des entre-nœuds. Feuilles très-vertes et non glauques ou jaunâtres, longues d'une à deux lignes au plus, molles, planes, lancéolées-linéaires, terminées par un filet sans roideur. Les fleurs naissent des aisselles supérieures et de l'extrémité des rameaux, là ordinairement solitaires, ici agrégées en nombre variable, sur des pédoncules le plus souvent simples, quelquefois rameux, toujours de la longueur des feuilles, et les excédant à mesure que les fruits se développent. Corolle jaunâtre avant son épanouissement, puis blanche ou blanchâtre. Ses segments sont ovales, un peu pointus. Fruits lisses.

Ce *Galium* abonde dans les lieux où la neige séjourne longtemps. Il y forme de larges gazons, très-touffus, d'un vert gai et tout couverts de fleurs. La plante entière, quand on la dessèche, tend à noircir, comme le *G. saxatile* et le *G. harcynicum*, et non à jaunir comme font le *pyrenaïcum* et le *pumilum*.

PAPAVÉRACÉES.

104. Papaver pyrenaicum. *Dec. syst. nat. veg.* 2, p. 71.

P. aurantiacum. — *Loisel. not.* - *Dec. fl. fr. suppl.* p. 585.

Sommet supérieur; en fleurs, 8 août 1792 et 16 août 1796; commençant à fleurir le 28 juillet 1797, et continuant jusqu'au 15 et 20 août. En 1809, année très-tardive, il n'était encore qu'en boutons, le 8 août. Je l'ai trouvé en fruit, le 14 septembre 1792, et le 16 septembre 1793. Il avait, au contraire, quelques fleurs, le 11 et le 22 septembre 1810.

Un pavot jaune soufre ne pouvait conserver le surnom d'orangé qui lui avait été donné, sans doute, sur la foi des herbiers où sa fleur roussit comme celle du *P. cambricum* et du *nudicaule.* J'ajoute à la description de Decandolle que sa fleur est très-musquée : l'herbe est inodore.

Je ne l'ai rencontré qu'ici. Il y a long-temps que cette plante attire l'attention des voyageurs qui gravissent le Pic. Mon ami Saint-Amans m'en a donné un échantillon recueilli en 1754, sur cette même cime, par Borda. Mais s'il est rare dans les hautes Pyrénées, il paraît plus commun vers la partie orientale de la chaîne.

Ce pavot est, dans les Pyrénées, le représentant de celui des Alpes, comme l'*Androsace ciliata* l'est de l'*Aretia alpina*, comme l'*Anemone pyrenaïca* de l'*An. vernalis*, etc. Il est représenté à son tour dans les contrées arctiques, et notamment à l'île Melville, par le *Papaver nudicaule.*

CRUCIFÈRES.

105. Sisymbrium pinnatifidum. *Dec. fl. fr.* 5, p. 667. — *Syst. nat. veg.* 2, p. 481.

S. dentatum. — *All. ped.* n° 1001, tab. 57, f. 3. — *Hall. helv.* 1, n° 481.

Arabis dentata. — *Lam. dict.* 1, p. 221. — *Poir.* IX, p. 413.

Sommet supérieur, 16 septembre 1793, 11 septembre 1810.

Confondu par Willdenow avec le *S. bursifolium*, dont il est assurément bien distinct.

106. DRABA AIZOIDES. *Willd. sp.* 3, *pars* 1, p. 424. — *Smith. brit.* 3, p. 1400. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 697, et *Syst. nat. veg.* 2, p. 333.

Sommet supérieur, en fleur le 28 juillet 1797, et le 22 juillet 1799; pas totalement défleuri le 11 septembre 1810.

107. DRABA NIVALIS. *Willd. sp.* 3, *pars* 1, p. 427. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 699. — *Syst. nat. veg.* 2, p. 344.

D. Stellata. — *Flor. dan.* 1, tab. 142. *Willd. Dec.*

Sommet supérieur, 11 août 1799.

Rosettes de feuilles lancéolées, ordinairement entières, quelquefois munies d'une dent, toujours pointues, ciliées de poils la plupart simples, très-vertes, nonobstant les poils rameux dont elles sont plus ou moins garnies. Hampes tantôt nues, tantôt chargées d'une ou deux petites feuilles. Ces hampes sont parfaitement glabres, au moins dans leur partie supérieure, comme aussi les pédoncules et les silicules. Celles-ci sont elliptiques oblongues. Pétales entiers ou à peine échancrés. Cette espèce est très-voisine du *D. stellata* que j'ai des Alpes et n'ai point trouvé dans les Pyrénées; mais elle se distingue fort bien du *D. tomensosa* et du *D. lævipes* Dec. que j'y ai rencontrés.

108. DRABA PYRENAICA. *Willd. sp.* 3, *pars* 1, p. 428. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 698. — *Lam. dict.* 2, p. 327. — *All. ped.* n° 894, tab. 8, fig. 1, et *Specim.* tab. 6, f. 1. *Valdè rudis.*

Petrocallis pyrenaïca. — *Dec. syst. nat. veg.* 2, p. 330.

Sommet supérieur, 14 septembre 1792, 16 septembre 1793, 26 août 1795; 8, 15, 30 août 1809. Il défleurissait à cette dernière époque.

Gazons d'un vert tendre, parsemés de fleurs roses. Mêlés aux brillants gazons du *Silene acaulis*, ils les répètent en teintes plus

douces, comme dans certaines espèces d'oiseaux, le plumage de la femelle reproduit celui du mâle.

109. Iberis spathulata. *Dec. fl. fr.* 5, p. 716, et *Syst. nat. veg.* 2, p. 404.

J. carnosa. — *Willd. sp.* 3, *pars* 1, p. 455. (*Flores purpurei, nec albi.*)

J. rotundifolia. — *Lam. dict.* 3, p. 221. (*Descriptio, non synonyma.*)

Sommet supérieur, 22 septembre 1810.

Decandolle décrit parfaitement cette jolie petite plante, que Lamarck avait confondue avec le *Lepidium rotundifolium* d'Allioni, dont elle se distingue par ses feuilles toutes pétiolées, ses silicules fort échancrées, son corymbe qui demeure plane durant la fructification. Elle est du très-petit nombre des espèces annuelles que j'ai observées au sommet du Pic : je ne suis donc pas étonné de ne l'y avoir rencontrée qu'une fois. Son habitation ordinaire est un peu plus bas, dans le grand ravin méridional où s'amassent les neiges, et d'où elles tombent en lavanges vers le mois de mai, sur la glace qui, à cette époque, couvre encore le lac d'Oncet.

110. Lepidium alpinum. *Willd. sp.* 3, p. 433. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 705. — *Lam. dict.* 5, p. 49.

Hutchinsia alpina. — *Dec. syst. nat. veg.* 2, p. 389. — *Clus. hist.* 2, p. 128, fig. 1.

Sommet supérieur, 14 septembre 1792, 16 septembre 1793, 26 août 1795, 8 août 1809, 11 septembre 1810.

CARYOPHYLLÉES.

111. Cerastium squalidum. N.

C. lanatum. β. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 778. *Excl. syn. Lapeyr.*

C. latifolium. — *Vill. delph.* 4, p. 646. *Descriptio, non synonyma.*

Sommet supérieur, 16 septembre 1793, 26 août 1795, 7 octobre 1809.

J'aurais de la peine à me persuader que ce céraiste fût une simple variété du *C. lanatum.* Il en diffère d'abord par la longueur que ses tiges acquièrent dans les lieux favorables à sa végétation : ici, elles n'ont que 2 ou 3 pouces ; là, elles en ont jusqu'à 7 et 8. Elle en diffère ensuite par ses feuilles plus larges, souvent arrondies, d'un vert sombre, nonobstant la villosité dont elles sont revêtues, et devenant rousses dans le bas des tiges. Elle en diffère enfin par l'extrême viscosité de toutes ses parties, viscosité qui procède de poils glanduleux d'où suinte un suif jaune roux dont toute la plante est salie. Tout cela, sans doute, se modifie à mesure que notre plante descend vers la région inférieure : les feuilles deviennent ovales, de rondes qu'elles étaient, leur couleur est moins sombre, la viscosité diminue ; et cependant aucun des caractères distinctifs ne s'efface entièrement ; jamais les feuilles ne deviennent blanches et sèches, et nous ne voyons nulle part le *C. lanatum* se montrer à la suite pour marquer le terme de l'échelle des variations. Celui-là est bien dans les Pyrénées, mais vers la partie orientale : La Peyrouse, qui l'a décrit et figuré tab. x, n'a jamais eu que cette espèce en vue, quoique postérieurement il ait envoyé pêle-mêle l'une et l'autre à ses correspondants sous le nom de *lanatum.* Quant à Villars, sa description ne me laisse aucun doute : sa plante est la mienne, telle qu'elle se trouve dans les lieux élevés.

112. Cherleria sedoides. *Willd. sp.* 2, *pars* 1, p. 730. — *Smith. brit.* 2, p. 483. — *Lam. dict.* 1, p. 726. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 781. — *Pennant. tour in Scotl.* 2, t. 33.

Sommet supérieur, en gazons fort touffus, 16 septembre 1793, 26 août 1795, etc.

113. Arenaria ciliata. *Willd. sp.* 2, *pars* 1, p. 718. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 783. α.

Sommet supérieur au couchant, 26 août 1795, 7 octobre 1809, 11 septembre 1810.

Autour de la cabane de Reboul, 16 septembre 1793.

Feuilles très-nerveuses, fortement ciliées, resserrées en pétiole vers leur base. Pétales du double au moins plus longs que le calice.

114. Arenaria verna. *Willd.* sp. 2, *pars* 1, p. 724. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 788. — *Smith. br.* 2.481. α.
A. saxatilis. — *Pennant. tour in Wales* 1, p. 19, t. 2. — *Vaill. bot. par.* t. 2, f. 3. *Optima.*

Entre les deux sommets, sur le tranchant de la crête, 15 septembre 1805.

Feuilles striées, un peu ciliées, presque obtuses. Pédoncules pubescents, feuilles du calice ovales, très-aiguës et même un peu mucronées. Pétales obtus, excédant de beaucoup le calice.

115. Silene acaulis. *Willd. sp.* 2, *pars* 1, p. 709. — *Smith. brit.* 2, p. 472. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 749. — *Flor. dan.* 1, tab. 21. — *Allion. ped.* t. 29, f. 1.2.

Sommet supérieur, 16 septembre 1793, 26 août 1795, 8 et 15 août 1809, etc.
Totalement défleuri, le 11 septembre 1810.

On ne connaît pas cette jolie plante, on n'en a nulle idée, si on ne l'a vue à ces hauteurs. Ses gazons épais, régulièrement convexes, nettement circonscrits, où une feuille ne dépasse pas l'autre, sont d'une telle densité qu'aucune autre plante ne peut les traverser, et d'un vert qu'on dirait rehaussé par une couche de vernis. Une multitude de fleurs couvre ces élégants coussinets, presque sessiles, toutes de niveau et d'un rouge cramoisi qui lutte d'éclat avec la vive couleur de leurs gazons. A mesure que l'on descend, cet éclat diminue, les fleurs pâlissent, les gazons sont ternis, s'affaissent, se divisent et jettent çà et là des rameaux vagues. Ce n'est pas spontanément, au reste, que cette espèce vraiment alpine franchit certaines limites et va se montrer défigurée dans les lieux où elle est étrangère. Ce sont les lavanges, ce sont les torrents qui l'arrachent à sa patrie, et qui en entraînent des touffes entières avec le sol où elles étaient enracinées.

Quand il m'est arrivé de la rencontrer au voisinage des plaines, je l'ai toujours trouvée au bord du torrent qui charriait les débris de sa demeure; et c'est ainsi que je l'ai vue jusqu'au fond du Lavedan, fleurir tristement au commencement du printemps, sur les arides grèves de son Gave.

Sa variété à fleurs blanches n'est pas rare dans les montagnes. Le feuillage se met en harmonie avec cette dégradation de couleur, et l'annonce avant la floraison par une teinte de vert plus tendre.

116. LYCHNIS ALPINA. *Willd. sp.* 1, *pars* 1, p. 809. — *Lam. dict.* 3, p. 640. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 762. — *Fl. dan.* t. 65. — *Hall. helv.* n° 922, t. 17. *Ad pag.* 243.

Sommet inférieur, 22 juillet 1799.

La plante des Pyrénées ressemble absolument à celle des Alpes. Elle diffère par ses feuilles plus courtes et plus larges de celle de la Flore danoise, que j'ai reçue de Norwège.

JOUBARBES.

117. SEDUM ATRATUM. *Willd. sp.* 2, *pars* 1, p. 769. — *Lam. dict.* 4, p. 634. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 391. α. — *Allion. ped.* n° 1750, tab. 65, f. 4. *Bona.*

Sommet supérieur, 16 septembre 1793. Entre les deux sommets en abondance.

Rameaux inférieurs opposés, comme Lamarck le fait observer. Segments du calice triangulaires aigus, comme le remarque Haller, n° 963.

118. SEDUM REPENS. *Schleich. pl. exs.* — *Dec. fl. fr. suppl.* p. 525.

S. Guettardi. — *Vill. delph.* 4, p. 678, tab. 45.

S. atratum. β. *Dec. fl. fr.* 5, p. 391.

Sommet supérieur, en fleur, le 22 septembre 1810.

Il diffère du *S. atratum* par les segments du calice ovales obtus; et

du *S. saxatile* par ses pétales simplement aigus et non mucronés. Il diffère en outre de tous deux, par ses tiges allongées et couchées, poussant, de loin en loin, des rameaux ascendants et simples.

Le *S. saxatile*, qui se trouve sur les pentes du Pic, est droit, à rameaux alternes et nombreux. Ses pétales, d'un beau jaune, sont remarquables par une pointe en filet, qui part, non de leur extrémité, mais de la nervure dorsale dont le prolongement se sépare de cette extrémité et la dépasse, comme fait l'arête de certaines graminées.

119. SEMPERVIVUM ARACHNOIDEUM. *Willd. sp.* 2, *pars* 2, p. 933. — *Lam. dict.* 3, p. 290. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 397. — — *Hall. helv.* 1, n° 952.

Sommet supérieur, 16 septembre 1793, 30 août 1805, 30 août 1809, 11 septembre 1810.

Rosettes de feuilles toujours conniventes, mais quelquefois dépourvues des filaments arachnoïdes dont elles sont ordinairement couvertes. Pétales 9 à 11, lancéolés, d'un pourpre rouge, pur et brillant.

120. SEMPERVIVUM MONTANUM. *Willd. sp.* 2, *pars* 2, p. 934. — *Lam. dict.* 3, p. 290. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 596. — *Hall. helv.* 1, n° 951.

Sommet supérieur, 16 septembre 1793, 11 août 1799.

Rosettes ouvertes. Pétales 10 à 13, lancéolés-linéaires, d'un rouge un peu pâle. Cette espèce a, comme la précédente, les feuilles un peu obtuses, velues ainsi que les tiges, et des poils glanduleux. Ces caractères les distinguent l'une et l'autre du *S. tectorum* que l'on trouve çà et là sur les rochers, et qui a les feuilles ciliées, mais d'ailleurs glabres, très-aiguës et même mucronées, les pétales absolument linéaires et d'un rougeâtre très-pâle.

Dans les trois espèces, les pétales sont réunis à la base, et les étamines en nombre double des pétales.

SAXIFRAGES.

121. Saxifraga bryoides. *Willd. sp.* 2, *pars* 1, p. 643. — *Poir. dict.* vi, p. 678. — *Scop. carn.* n° 497, tab. 15. — *Hall. helv.* 1, n° 969.

S. aspera. α. *Dec. fl. fr.* 4, p. 363, *et Suppl.* p. 518.

Sommet supérieur, 26 août 1795, 11 septembre 1810.

Rosettes denses de feuilles ciliées et d'un vert jaunâtre. Tiges le plus souvent uniflores. Fleurs grandes; calices à segments à peine aigus; pétales elliptiques, obtus, d'un jaune clair, mouchetés de fauve.

122. Saxifraga oppositifolia. *Willd. sp.* 2, *pars* 1, p. 648. *Var.* α. — *Poir. dict.* vi, p. 685. α. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 364. — *Brown. chl. melv.* n° 21.

Sommet supérieur : défleurie, 14 septembre 1792, 16 septembre 1793, 26 août 1795; en fleur, 28 juillet 1797, 8 août 1809.

Très-belle ici et aussi bien développée que sur les pentes du Pic où elle est commune. Je l'ai trouvée, au contraire, très-petite et rabougrie au sommet du Mont-Perdu, où elle était défleurie le 10 août 1802. Grandes fleurs, d'un beau rouge pourpre, couleur rare dans nos saxifrages.

123. Saxifraga petræa. *Willd. sp.* 2, *pars* 1, p. 654. — *Poir. dict.* 6, p. 694. — *Dec. fl. fr.* 4, p. 370. — *Fl. dan.* 1, tab. 68. *Optima.*

Cabane de Reboul, 16 septembre 1793, 22 juillet 1799.
Entre les deux sommets, 15 septembre 1805.

Point de doute sur cette espèce. Vahl qui l'avait autrefois recueillie avec Linné lui-même, l'a reconnue et nommée dans mon herbier. C'est bien celle aussi de la Flore danoise que j'ai reçue de la Norwège sous le même nom. Il est seulement à remarquer que

la plante de ces régions hyperborées, comparée à la nôtre, est du double plus grande et plus forte.

Je n'ai pas la même confiance dans les divers synonymes que les auteurs ont adoptés, et, par exemple, si la figure d'Allioni est fidèle, on serait fondé à présumer qu'elle appartient à une autre espèce.

124. SAXIFRAGA GROENLANDICA. *Dec. fl. fr.* 4, p. 376. — *Lapeyr. fl. pyr.* p. 39, t. 19. — *An Gunn. norv.* n° 689, tab. 7, fig. 1?

S. cæspitosa. β. *Retz. prod. scand.*, p. 103. — *Willd. sp.* 2, *pars* 1, p. 656. (*Stirps Gunn.*). — *Poir. dict.* VI, p. 697. *Promiscuè.*

Sommet supérieur, en plein nord, formant des gazons denses sur les gradins du rocher. Entièrement défleurie le 14 septembre 1792, défleurissant le 11 septembre 1810; en pleine fleur, 26 août 1795, 16 août 1796, 28 juillet et 9 août 1797, 11 août 1799; 8, 15 et 30 août 1809.

Elle était de même en fleur au sommet de Néouvielle, le 20 et le 26 août 1795, et le 25 juillet 1800; à la brèche de Roland, le 9 août 1797; au sommet du Mont-Perdu, le 10 août 1802.

Espèce nettement tranchée et parfaitement distincte, au milieu de ce groupe de petites saxifrages où il est si difficile de marquer la limite des espèces. L'excellente description de Decandolle me dispense de la décrire. J'ajouterai seulement que l'extrémité des pétales tend constamment à se fléchir en dessous; et que cette observation ne paraisse pas minutieuse: je me suis convaincu que dans le genre des saxifrages, la figure des pétales, leur proportion relative et leur disposition, la couleur, la rayure, la moucheture même, s'élevaient au premier rang des caractères spécifiques. Le manque de détails à cet égard motive seul le doute que j'exprime en citant la Flore de Norwège. L'auteur nous dit bien que la fleur est blanche et que ses pétales sont marqués de trois raies purpurines; mais il ne dit rien de leur courbure, et il ajoute que la fleur jaunit en se flétrissant, circonstance que je n'ai point observée dans notre espèce vivante, et qui demeure ambiguë dans mes échantillons desséchés. Je ne verrais d'ailleurs aucune raison de mettre l'identité en question. La plante de

Gunner est sous mes yeux : elle me vient de l'Islande, et je ne saurais la distinguer des petits échantillons que j'ai pris à la cime du Mont-Perdu. J'ai également sous les yeux le *S. uniflora* de l'île Melville, considéré par Brown comme une simple variété de la même espèce ; et je n'y vois également qu'une simple variété de la mienne. Mais ce qui me paraît digne de remarque, c'est que tous les botanistes du Nord s'accordent à faire de ces plantes autant de variétés du *S. cæspitosa*. Ils auraient donc un *S. cæspitosa* qui nous serait inconnu, car l'espèce que nous nommons ainsi, espèce très-voisine du *S. muscoïdes* des Allemands et qui s'en distingue à peine, n'a pas la moindre ressemblance avec le *S. groenlandica*. La seule de nos saxifrages que l'on pourrait lui comparer est celle que Decandolle a décrite sous le nom de *pubescens ;* mais si celle-là s'en rapproche par le vert sombre de son feuillage et la villosité gluante dont la plante est revêtue, par ses fleurs blanches et la couleur purpurine que prennent les filets de ses étamines, elle ne s'en éloigne pas moins par la forme de ses feuilles, la profondeur et la divergence de leurs divisions, et surtout par la petitesse relative de ses fleurs et la longueur de leurs pédoncules.

ROSACÉES.

125. Alchemilla hybrida. *Lin. sp.* 179. — *Mill. dict.* n° 2, tab. 18.

A. pubescens. — *Lam. Ill.* n° 1703. — *Poir. dict.* IX, p. 285, n° 2.

A. vulgaris. Var. — *Willd. sp.* 1, *pars* 2, p. 698. γ. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 451. β.

Sur la crête qui joint les deux sommets, et à la cabane de Reboul. En fleur, le 15 septembre 1805, et le 22 septembre 1810.

Tiges velues. Feuilles velues en dessus et tout-à-fait soyeuses en dessous. Du reste, entièrement semblable à l'alchimille commune. Ce sera, si l'on veut, une simple variété de celle-là ; mais on conviendra du moins qu'elle n'est le produit ni du climat, ni du sol : depuis le fond des vallées jusques au haut du Pic, on les

trouve toutes deux, l'une à côté de l'autre, diminuant de dimensions à mesure que l'on s'élève, et conservant toujours leur caractère distinctif.

126. SIBBALDIA PROCUMBENS. *Willd. sp.* 1, *pars* 2, p. 1567. — *Smith. brit.* 1, p. 345. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 453. — *Fl. dan.* 1, tab. 32. — *Pennant, tour in Scotl.* 3, p. 43, tab. 5.

Entre les deux sommets, 30 août 1809. — Je l'avais déja trouvée sur les cimes de Néouvielle, le 20 août 1795.

127. POTENTILLA FILIFORMIS. *Dec. fl. fr. suppl.* p. 542. (*Quoad descriptionem, excluso syn. Wulf.*) *an Vill. delph.* 3, p. 564?

Sommet supérieur, 22 juillet 1799, 16 septembre 1805.

Souches souterraines, épaisses, rameuses, d'où s'élèvent des tiges plus ou moins allongées, grêles, simples, peu feuillées, si ce n'est à la base, et portant une à trois fleurs sur des pédoncules longs et filiformes. Les fleurs sont d'un beau jaune, et leurs pétales du double plus longs que le calice, échancrés au sommet, tachés de fauve à la base. Elle diffère du *P. verna* par son port, par la grandeur de ses fleurs, par ses calices à segments plus larges, plus obtus, plus inégaux, par ses feuilles dont les folioles sont presque sessiles sur le pétiole commun, moins tronquées au sommet, et à 7-9 dents au lieu de cinq; enfin par ses poils moins nombreux mais plus étalés. Ce n'est point du tout le *P. salisburgensis* de Wulf. J'ai reçu de Salzbourg cette dernière espèce, rare même dans son pays natal : elle ressemble bien moins au *P. filiformis* qu'à ma *P. pyrenaïca* avec laquelle on ne peut néanmoins la confondre.

128. POTENTILLA NIVALIS. *Lapeyr. act. tol.* 1, p. 210, t. 16. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 465.

P. lupinoïdes. — *Willd. sp.* 2, *pars* 2, p. 1107. *Descriptio bona.*

P. valderia. — *Vill. delph.* 3, p. 572. (*non Linn. nec Allion.*)

Sommet supérieur. En fleur, 8 août 1792; fleurissant encore le 11 septembre 1810; à peu près défleurie, le 14 septembre 1792 et le 16 septembre 1793. — Petits individus d'une couple de pouces de haut.

Le nom que Willdenow impose à cette espèce vaut beaucoup mieux que celui du botaniste de Toulouse. Mais l'antériorité a ses droits : il faut les respecter.

Ses fleurs ont, selon Lapeyrouse, cinq pétales, et le calice aurait douze segments : ce serait certes une étrange distraction de la nature. Heureusement ce n'est qu'une méprise de l'observateur. La fleur terminale a ordinairement, il est vrai, un calice à 12 divisions, mais alors il y a six pétales. Les autres fleurs n'ont que cinq pétales, mais leur calice n'a que dix divisions. Je remarque en outre que ce calice est fortement urcéolé et tout-à-fait conique : la description de Lapeyrouse n'en dit rien, et la figure le fait ovale, pour avoir été dessinée, sans doute, d'après un individu desséché.

J'ai vu la plante de Villars : c'est bien la même.

LÉGUMINEUSES.

129. ANTHYLLIS VULNERARIA. (*Floribus rubris*). — *Dec. fl. fr.* 5, p. 516. — *Willd. sp.* 3, *pars* 2, p. 1013 β. — *Dalech. Lugd.* 1, p. 509, f. 2.

Sommet inférieur, 7 octobre 1809.

Il y a trois variétés de cette espèce : à fleurs rouges, d'un jaune ocreux, d'un jaune pur. Elles se distinguent non-seulement par la couleur des fleurs mais par la figure des feuilles, la découpure et la proportion des bractées. La plante du Pic appartient à la première. Ses fleurs, sont d'un rouge très-vif, ses bractées très-courtes, à découpures élargies, les folioles en petit nombre, l'impaire fort grande, ovale, à peine aiguë. Peu de poils, tous couchés : aspect glabre. La grossière figure de Daléchamp repré-

sente fort bien le port et les dimensions de mes échantillons ; les folioles seulement sont trop allongées et trop aiguës.

Un peu au-dessous du sommet, cette *anthyllis* vient se mêler avec mon *Anth. mollissima* que Decandolle a vue dans mon herbier, et dont il a fait la variété δ de l'espèce. Celle-là a des fleurs d'un blanc jaunâtre (et non pas rouges comme il le dit par erreur), des bractées qui atteignent à la longueur des fleurs, des feuilles à folioles très-nombreuses, 9 à 13, la terminale à peine plus grande que les autres, et toute la plante est couverte d'un duvet laineux. Les deux espèces ou variétés se rencontrent sans se confondre, et vivent ensemble sans se rapprocher par aucun intermédiaire.

130. Lotus alpinus. *Schleich. cent. exs.* n° 75.

L. corniculatus. Var. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 555. — *Loisel. fl. gall.* p. 489.

A. *Floribus flavis.* — B. *Floribus croceis.*

A fleurs jaunes : sommet supérieur, 26 août 1795, 11 septembre 1810.

A fleurs de couleur orangée ; entre les deux sommets, et sur le sommet inférieur, 30 août 1809, 11 et 22 septembre 1810.

Très-petite plante, extrêmement glauque. Folioles épaisses, presque charnues, glabres, mais bordées de quelques cils assez roides. Fleurs souvent solitaires, et rarement au-delà de trois. La variété jaune est bien plus rare que la variété orangée : celle-ci est commune sur les pentes du Pic. Je l'ai trouvée aussi autour des lacs supérieurs de Néouvielle. Au reste, on ne saurait séparer spécifiquement ces variétés, du *L. corniculatus* dont elles conservent le type, et dont on les voit se rapprocher à mesure que l'on descend vers la région inférieure.

131. Astragalus montanus. *Willd. sp.* 3, *pars* 2, p. 1302. — *Lam. dict.* 1, p. 318. — *Scop. carn.* n° 922, t. 45. — *Hall. helv.* n° 408. — *Clus. hist.* 2, p. 240. *Icon.*

Oxytropis montana. — *Dec. astr.* 53. — *Fl. fr.* 5, p. 565.

Sommet inférieur; en fleur, 28 juillet 1797, 22 juillet 1799.

Sommet supérieur; défleuri, 22 septembre 1810.

Mes individus des Pyrénées sont en général beaucoup plus velus que ceux des Alpes. Quelques-uns même prennent l'aspect de l'*A. uralensis*, mais s'en distinguent toujours par la petitesse de leurs bractées. Cette dernière espèce, au reste, n'est pas étrangère aux Pyrénées : je l'ai rencontrée auprès des glaciers du Mont-Perdu.

132. Astragalus campestris. *Willd. sp.* 3, *pars* 2, p. 1317. — *Lam. dict.* 1, p. 317. α.

Oxytropis campestris. — *Dec. fl. fr.* 5, p. 566. α. β. — *Hall. helv.* n° 406, tab. 13.

Entre les deux sommets; 15 septembre 1805; commun sur tout le Pic.

La fleur est jaunâtre, marquée ordinairement d'une tache purpurine de chaque côté de la carène, comme le dit Haller. Ce serait, selon Willdenow et Lamarck, la base de la carène qui serait tachée de pourpre. Je doute que leur observation soit exacte.

AMENTACÉES.

133. Salix retusa. *Willd. sp.* 4, *pars* 2, p. 684. — *Poir. dict.* VI, p. 649. *Exclus. syn. Scop* — *Gouan. Ill.* p. 76. — *Loisel. fl. gall.* p. 673. — *Dec. fl. fr.* 3, p. 289.

Sur la déclivité orientale du sommet inférieur; au déclin de sa floraison, le 26 août 1795, et le 28 juillet 1797.

Très-bien décrit par Poiret. Souches de la grosseur du doigt et d'un bois très-dur, tortueuses, entièrement couchées et très-rameuses. Petites feuilles, longues de trois ou quatre lignes au plus, obovales, ordinairement obtuses, souvent échancrées au sommet, quelques-unes visiblement dentées vers la base, comme Linné l'avait vu et comme Gouan le fait observer. Chatons très-nombreux, portant cinq à dix fleurs lâchement assemblées. Bractées naviculaires, de la longueur des capsules. Style court mais apparent. Plusieurs de ces caractères distinguent notre

saule de celui de Scopoli, que Willdenow regarde, peut-être avec raison, comme spécifiquement différent. Ce qu'il y a de certain, c'est que la figure du *S. serpyllifolia* ne convient nullement à notre espèce.

Au reste, ce nain des arbres, étalé ici et couché comme du serpolet, en tirerait son nom tout aussi bien que l'autre. C'est à la faveur de sa stature qu'il se dérobe à la froidure des hivers, tapi sous la neige qui le couvre sept ou huit mois de l'année. Sur la pente même du Pic, nul arbrisseau n'oserait s'élancer dans l'atmosphère. Dans le petit nombre de ceux qu'on y rencontre, celui qui s'est le plus hasardé est un vieux genévrier, tortu, rabougri, tout couché et collé contre terre, près le trou de Montariou, à 200 mètres au-dessous du sommet et environ 1380 toises au-dessus du niveau de la mer. Il y est demeuré seul depuis des siècles, dominant à peine les touffes du *Vaccinium uliginosum* qui rampe autour de lui.

Un saule est, au sommet du Pic, le représentant unique de la tribu des amentacées. A 400 toises au-dessous, sur les bords du lac d'Oncet, un autre saule, le *Salix herbacea*, la représente à son tour; et l'échelle des végétaux distribués de la base au sommet du Pic, a pour limites deux arbrisseaux qui ne s'élèvent pas à la hauteur des herbes.

Notre saule paraît être un des aliments favoris du Lagopède. Ce bel oiseau habite ici, comme dans les hautes Alpes, comme sur les montagnes les plus élevées de l'Écosse (car le *ptarmigan* de Pennant n'en paraît pas différent), comme il habite même l'île Melville, si toutefois celui dont nous parlent les voyageurs n'est pas l'espèce que Buffon distingue du nôtre et qu'il nomme lagopède de la baie de Hudson. J'ai ouvert l'estomac de quelques-uns de nos lagopèdes. Je n'y ai trouvé ni le Rhododendron dont les auteurs le disent avide, ni le *Meum* qui l'attire, à en croire les gens du pays : mais j'y ai reconnu des sommités fleuries de *Lepidium alpinum*, des calices de *Solidago virgaurea* ou *minuta*, des feuilles de *Plantago alpina* hachées menu, des graines de *Carex pyrenaïca*, et beaucoup de jeunes pousses de *Salix retusa*. A-t-on vérifié de quoi avaient pu vivre ceux que l'on a tués en plein hiver, dans l'île Melville?

RÉCAPITULATION

DES ESPÈCES OBSERVÉES AU SOMMET DU PIC.

CRYPTOGAMES.

Lichens	n°	1- 51	51	
Hépatiques	n°	52	1	
Mousses	n°	53- 58	6	
Fougères	n°	59- 62	4	
Nombre des espèces			62	62

PHANÉROGAMES.

Cypéroïdes	n°	63- 65	3	
Graminées	n°	66- 72	7	
Polygonées	n°	73	1	
Plantaginées	n°	74	1	
Plumbaginées	n°	75	1	
Lysimachies	n°	76-79	4	
Pédiculaires	n°	80-82	3	
Labiées	n°	83	1	
Scrophulaires	n°	84	1	
Borraginées	n°	85	1	
Gentianes	n°	86- 87	2	
Campanulacées	n°	88	1	
Chicoracées	n°	89- 91	3	
Corymbifères	n°	92-101	10	
Rubiacées	n°	102-103	2	
Papavéracées	n°	104	1	
Crucifères	n°	105-110	6	
Caryophyllées	n°	111-116	6	
Joubarbes	n°	117-120	4	
Saxifrages	n°	121-124	4	
Rosacées	n°	125-128	4	
Légumineuses	n°	129-132	4	
Amentacées	n°	133	1	
Nombre des espèces			71	71
Total				133

DURÉE DES ESPÈCES.

Annuelles	5.	n° 66, 109, 117, 118, 123.
Bisannuelles	1.	n° 84.
Durée incertaine	1.	n° 52.
Vivaces	122.	
Fruticuleuses	3.	n° 80, 81, 83.
Ligneuses	1.	
	133	

APPENDICE.

Espèces observées sur les sommets qui excèdent en hauteur le Pic du Midi.

Les plantes de ces divers sommets n'ont point été l'objet de recherches spéciales, et l'on doit regarder comme fort incomplètes les listes que j'en donne. Des voyages plus nombreux et entrepris dans ces vues, y auraient, sans doute, ajouté beaucoup d'autres espèces. Mais celles que j'ai reconnues, réunies à ce que j'en ai trouvé à la cime du Pic du Midi, établissent suffisamment le caractère particulier de la végétation qui occupe les points culminants des hautes Pyrénées.

Les numéros renvoient à mon Catalogue pour les espèces qui se trouvent au Pic; l'astérisque * désigne celles que je n'y ai pas rencontrées.

NÉOUVIELLE.

20 et 26 août 1795. — 25 juillet 1800.

Carex curvula, n° 63.
Festuca violacea, n° 68.
Poa alpina, n° 70.
* *Luzula spicata.*
Statice armeria. β. n° 75.
Pedicularis rostrata, n° 82.
Linaria alpina, n° 84.
Gentiana alpina, n° 86.
Leontodon lævigatus, n° 90.
Erigeron uniflorum, n° 96.
Pyrethrum alpinum, n° 99.
* *Ranunculus glacialis.*
Draba nivalis, n° 107.
* *Draba tomentosa.*
Cherleria sedoïdes, n° 112.
Silene acaulis, n° 115.
* *Saxifraga androsacea.*
Saxifraga bryoïdes, n° 121.
Saxifraga groënlandica, n° 124.
Sibbaldia procumbens, n° 126.
* *Potentilla frigida.*

VIGNEMALE.

Au sommet et sur ses abords. (*Voyages au Mont-Perdu*, p. 272.)

* *Aspidium lonchitis.*
Festuca violacea, n° 68.
Poa alpina, n° 70.
Avena sempervirens, n° 72.
Plantago alpina, n° 74.
Statice armeria. β. n° 75.
Thymus serpyllum, n° 83.
* *Campanula linifolia*. Lam. dict. 1, 579.
* *Campanula pusilla*. Dec. fl. fr. 3, 697.
Phyteuma hæmisphærica, n° 88.
Hieracium prunellæfolium, n° 89.
Erigeron alpinum, n° 95.
Pyrethrum alpinum, n° 99.
Galium pyrenaïcum, n° 102.
Lepidium alpinum, n° 110.
* *Geranium cinereum*. Cavan. — Dec. fl. fr. 5, 849.
Arenaria ciliata, n° 113.
* *Arenaria purpurascens*. N. Dec. fl. fr. 5, 785.
* *Silene rupestris.*
Silene acaulis, n° 115.
Saxifraga bryoïdes, n° 121.
* *Saxifraga muscoïdes*. Dec. fl. fr. 4, 376.

MONT-PERDU.

10 août 1802.

* *Lecanora tegularis*. Ach. lich. un. p. 435.
Androsace ciliata, n° 76.
Linaria alpina, n° 84.
Artemisia spicata, n° 101.
* *Cerastium alpinum.*
* *Saxifraga androsacea.*
Saxifraga oppositifolia, n° 122.
Saxifraga groënlandica, n° 124.

GLACIER DE NÉOUVIELLE.

Plantes périodiquement livrées à un sommeil de plusieurs années. — 15 septembre 1796.

Rumex digynus, n° 73.
* *Veronica alpina.*
Apargia alpina, n° 91.
* *Stellaria cerastoïdes.*
* *Saxifraga stellaris.*
* *Saxifraga ajugifolia.*
* *Salix herbacea.*

ILE MELVILLE. 1820.

CRYPTOGAMES.

Champignons	2	
Lichens	15	
Hépatiques	2	
Mousses	30	
Nombre des espèces	49	49

PHANÉROGAMES.

Cypéroïdes	4	
Graminées	14	
Joncacées	2	
Polygonées	2	
Scrophulaires	1	
Bruyères	1	
Campanulacées	1	
Chicoracées	1	
Corymbifères	4	
Renonculacées	5	
Papavéracées	1	
Crucifères	9	
Caryophyllées	5	
Saxifrages	10	
Rosacées	4	
Légumineuses	2	
Amentacées	1	
Nombre des espèces	67	67
Total		116

OBSERVATIONS.

Huit lichens de l'île Melville, et une de ses mousses se trouvent au sommet du Pic du Midi : n[os] 16, 38, 41, 43, 44, 46, 49, 50, 53. Cinq autres de ses lichens, une de ses deux hépatiques et six de ses mousses sont sur les pentes du Pic ou dans le voisinage.

Dans le nombre des phanérogames, la cime du Pic en a d'abord quatre, n[os] 67, 73, 92, 122 de mon Catalogue; et l'on serait fondé à y ajouter le n° 124, car le *Saxifraga uniflora* de Melville diffère bien peu du *groenlandica*. Deux autres espèces, *Cardamine bellidifolia* et *Astragalus alpinus*, croissent si près du sommet qu'elles pourraient faire partie de sa flore. Le *Cerastium alpinum* est à la cime du Mont-Perdu; l'*Eriophorum capitatum* autour de celle du Piméné; le *Polygonum viviparum*, l'*Arnica montana* sont partout. Nous avons le *Dryas octopetala*, dont l'*integrifolia* est bien faiblement distingué. Les Alpes possèdent le *Potentilla nivea* et le *Saxifraga hirculus*. Les montagnes d'Auvergne ont le *Chrysosplenium alternifolium*. L'Angleterre partage plusieurs autres espèces avec l'île Melville. Mais de toutes ses familles de phanérogames, la plus nombreuse en individus comme en espèces, est en même temps celle qui paraît se prêter le moins à des migrations pareilles; et c'est dans les graminées, si ingénieusement qualifiées par Linné de plébéiens du règne végétal, que persévère avec le plus d'opiniâtreté le caractère particulier de la végétation locale.

MÉMOIRE

Sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 *juin* 1822, 22 *décembre* 1823, 12 *septembre et* 21 *novembre* 1825.

L'ÉPOQUE que les travaux de Newton ont marquée dans l'histoire des sciences n'est pas seulement celle de la plus importante des découvertes que l'homme ait faites sur les causes des grands phénomènes de la nature, c'est aussi l'époque où l'esprit humain s'est ouvert une nouvelle route dans les sciences qui ont pour objet l'étude de ces phénomènes.

Jusqu'alors on en avait presque exclusivement cherché les causes dans l'impulsion d'un fluide inconnu qui entraînait les particules matérielles suivant la direction de ses propres particules; et partout où l'on voyait un mouvement révolutif, on imaginait un tourbillon dans le même sens.

Newton nous a appris que cette sorte de mouvement doit, comme tous ceux que nous offre la nature, être ramenée par le calcul à des forces agissant toujours entre deux particules matérielles suivant la droite qui les joint, de manière que

l'action exercée par l'une d'elles sur l'autre soit égale et opposée à celle que cette dernière exerce en même temps sur la première, et qu'il ne puisse, par conséquent, lorsqu'on suppose ces deux particules liées invariablement entre elles, résulter aucun mouvement de leur action mutuelle. C'est cette loi confirmée aujourd'hui par toutes les observations, par tous les calculs, qu'il exprima dans le dernier des trois axiomes qu'il plaça au commencement des *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Mais il ne suffisait pas de s'être élevé à cette haute conception, il fallait trouver suivant quelle loi ces forces varient avec la situation respective des particules entre lesquelles elles s'exercent, ou, ce qui revient au même, en exprimer la valeur par une formule.

Newton fut loin de penser qu'une telle loi pût être inventée en partant de considérations abstraites plus ou moins plausibles. Il établit qu'elle devait être déduite des faits observés, ou plutôt de ces lois empiriques qui, comme celles de Képler, ne sont que les résultats généralisés d'un grand nombre de faits.

Observer d'abord les faits, en varier les circonstances autant qu'il est possible, accompagner ce premier travail de mesures précises pour en déduire des lois générales, uniquement fondées sur l'expérience, et déduire de ces lois, indépendamment de toute hypothèse sur la nature des forces qui produisent les phénomènes, la valeur mathématique de ces forces, c'est-à-dire la formule qui les représente, telle est la marche qu'a suivie Newton. Elle a été, en général, adoptée en France par les savants auxquels la physique doit les immenses progrès qu'elle a faits dans ces derniers temps, et c'est elle qui m'a servi de guide dans toutes mes recher-

ches sur les phénomènes électro-dynamiques. J'ai consulté uniquement l'expérience pour établir les lois de ces phénomènes, et j'en ai déduit la formule qui peut seule représenter les forces auxquelles ils sont dus ; je n'ai fait aucune recherche sur la cause même qu'on peut assigner à ces forces, bien convaincu que toute recherche de ce genre doit être précédée de la connaissance purement expérimentale des lois, et de la détermination, uniquement déduite de ces lois, de la valeur des forces élémentaires dont la direction est nécessairement celle de la droite menée par les points matériels entre lesquels elles s'exercent. C'est pour cela que j'ai évité de parler des idées que je pouvais avoir sur la nature de la cause de celles qui émanent des conducteurs voltaïques, si ce n'est dans les notes qui accompagnent l'*Exposé sommaire des nouvelles expériences électro-magnétiques faites par plusieurs physiciens depuis le mois de mars* 1821, que j'ai lu dans la séance publique de l'Académie des Sciences, le 8 avril 1822; on peut voir ce que j'en ai dit dans ces notes à la page 215 de mon recueil d'Observations électro-dynamiques. Il ne paraît pas que cette marche, la seule qui puisse conduire à des résultats indépendants de toute hypothèse, soit préférée par les physiciens du reste de l'Europe, comme elle l'est par les Français; et le savant illustre qui a vu le premier les pôles d'un aimant transportés par l'action d'un fil conducteur dans des directions perpendiculaires à celles de ce fil, en a conclu que la matière électrique tournait autour de lui, et poussait ces pôles dans le sens de son mouvement, précisément comme Descartes faisait tourner la matière de ses tourbillons dans le sens des révolutions planétaires. Guidé par les principes

de la philosophie newtonienne, j'ai ramené le phénomène observé par M. Oerstedt, comme on l'a fait à l'égard de tous ceux du même genre que nous offre la nature, à des forces agissant toujours suivant la droite qui joint les deux particules entre lesquelles elles s'exercent; et si j'ai établi que la même disposition ou le même mouvement de l'électricité qui existe dans le fil conducteur a lieu aussi autour des particules des aimants, ce n'est certainement pas pour les faire agir par impulsion à la manière d'un tourbillon, mais pour calculer, d'après ma formule, les forces qui en résultent entre ces particules et celles d'un conducteur ou d'un autre aimant, suivant les droites qui joignent deux à deux les particules dont on considère l'action mutuelle, et pour montrer que les résultats du calcul sont complètement vérifiés, 1° par les expériences que j'ai faites, et par celles qu'on doit à M. Pouillet sur la détermination précise des situations où il faut que se trouve un conducteur mobile, pour qu'il reste en équilibre lorsqu'il est soumis à l'action, soit d'un autre conducteur, soit d'un aimant; 2° par l'accord de ces résultats avec les lois que Coulomb et M. Biot ont déduites de leurs expériences, le premier relativement à l'action mutuelle de deux aimants, le second à celle d'un aimant et d'un fil conducteur.

Le principal avantage des formules qui sont ainsi conclues immédiatement de quelques faits généraux donnés par un nombre suffisant d'observations pour que la certitude n'en puisse être contestée, est de rester indépendantes, tant des hypothèses dont leurs auteurs ont pu s'aider dans la recherche de ces formules, que de celles qui peuvent leur être substituées dans la suite. L'expression de l'attraction universelle déduite des lois de Képler ne dépend point des hypothèses que quelques auteurs ont essayé de faire sur une

cause mécanique qu'ils voulaient lui assigner. La théorie de la chaleur repose réellement sur des faits généraux donnés immédiatement par l'observation; et l'équation déduite de ces faits se trouvant confirmée par l'accord des résultats qu'on en tire et de ceux que donne l'expérience, doit être également reçue comme exprimant les vraies lois de la propagation de la chaleur, et par ceux qui l'attribuent à un rayonnement de molécules calorifiques, et par ceux qui recourent pour expliquer le même phénomène aux vibrations d'un fluide répandu dans l'espace; seulement il faut que les premiers montrent comment l'équation dont il s'agit résulte de leur manière de voir, et que les seconds la déduisent des formules générales des mouvements vibratoires; non pour rien ajouter à la certitude de cette équation, mais pour que leurs hypothèses respectives puissent subsister. Le physicien qui n'a point pris de parti à cet égard admet cette équation comme la représentation exacte des faits, sans s'inquiéter de la manière dont elle peut résulter de l'une ou de l'autre des explications dont nous parlons; et si de nouveaux phénomènes et de nouveaux calculs viennent à démontrer que les effets de la chaleur ne peuvent être réellement expliqués que dans le système des vibrations, le grand physicien qui a le premier donné cette équation, et qui a créé pour l'appliquer à l'objet de ses recherches de nouveaux moyens d'intégration, n'en serait pas moins l'auteur de la théorie mathématique de la chaleur, comme Newton est celui de la théorie des mouvements planétaires, quoique cette dernière ne fût pas aussi complètement démontrée par ses travaux qu'elle l'a été depuis par ceux de ses successeurs.

Il en est de même de la formule par laquelle j'ai représenté

l'action électro-dynamique. Quelle que soit la cause physique à laquelle on veuille rapporter les phénomènes produits par cette action, la formule que j'ai obtenue restera toujours l'expression des faits. Si l'on parvient à la déduire d'une des considérations par lesquelles on a expliqué tant d'autres phénomènes, telles que les attractions en raison inverse du carré de la distance, celles qui deviennent insensibles à toute distance appréciable des particules entre lesquelles elles s'exercent, les vibrations d'un fluide répandu dans l'espace, etc., on fera un pas de plus dans cette partie de la physique; mais cette recherche, dont je ne me suis point encore occupé, quoique j'en reconnaisse toute l'importance, ne changera rien aux résultats de mon travail, puisque pour s'accorder avec les faits, il faudra toujours que l'hypothèse adoptée s'accorde avec la formule qui les représente si complètement.

Dès que j'eus reconnu que deux conducteurs voltaïques agissent l'un sur l'autre, tantôt en s'attirant, tantôt en se repoussant, que j'eus distingué et décrit les actions qu'ils exercent dans les différentes situations où ils peuvent se trouver l'un à l'égard de l'autre, et que j'eus constaté l'égalité de l'action qui est exercée par un conducteur rectiligne, et de celle qui l'est par un conducteur sinueux, lorsque celui-ci ne s'éloigne qu'à des distances extrêmement petites de la direction du premier, et se termine, de part et d'autre, aux mêmes points; je cherchai à exprimer par une formule la valeur de la force attractive ou répulsive de deux de leurs éléments, ou parties infiniment petites, afin de pouvoir en déduire, par les méthodes connues d'intégration, l'action qui a lieu entre deux portions de conducteurs données de forme et de situation.

L'impossibilité de soumettre directement à l'expérience des portions infiniment petites du circuit voltaïque, oblige nécessairement à partir d'observations faites sur des fils conducteurs de grandeur finie, et il faut satisfaire à ces deux conditions, que les observations soient susceptibles d'une grande précision, et qu'elles soient propres à déterminer la valeur de l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de ces fils. C'est ce qu'on peut obtenir de deux manières : l'une consiste à mesurer d'abord avec la plus grande exactitude des valeurs de l'action mutuelle de deux portions d'une grandeur finie, en les plaçant successivement, l'une par rapport à l'autre, à différentes distances et dans différentes positions, car il est évident qu'ici l'action ne dépend pas seulement de la distance ; il faut ensuite faire une hypothèse sur la valeur de l'action mutuelle de deux portions infiniment petites, en conclure celle de l'action qui doit en résulter pour les conducteurs de grandeur finie sur lesquels on a opéré, et modifier l'hypothèse jusqu'à ce que les résultats du calcul s'accordent avec ceux de l'observation. C'est ce procédé que je m'étais d'abord proposé de suivre, comme je l'ai expliqué en détail dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences, le 9 octobre 1820 (1); et quoiqu'il ne nous conduise à la vérité que par la voie indirecte des hypothèses, il n'en est pas moins précieux, puisqu'il est souvent le seul qui puisse être employé dans les recherches de ce genre. Un des membres de cette Académie, dont les travaux ont embrassé toutes les parties de la physique, l'a parfaite-

(1) Ce Mémoire n'a pas été publié à part, mais les principaux résultats en ont été insérés dans celui que j'ai publié en 1820, dans le tome XV des Annales de chimie et de physique.

ment décrit dans la *Notice sur l'aimantation imprimée aux métaux par l'électricité en mouvement*, qu'il nous a lue le 2 avril 1821, en l'appelant un travail en quelque sorte de divination, qui est la fin de presque toutes les recherches physiques (1).

Mais il existe une autre manière d'atteindre plus directement le même but; c'est celle que j'ai suivie depuis, et qui m'a conduit au résultat que je désirais: elle consiste à constater, par l'expérience, qu'un conducteur mobile reste exactement en équilibre entre des forces égales, ou des moments de rotation égaux, ces forces et ces moments étant produits par des portions de conducteurs fixes dont les formes ou les grandeurs peuvent varier d'une manière quelconque, sous des conditions que l'expérience détermine, sans que l'équilibre soit troublé, et d'en conclure directement par le calcul quelle doit être la valeur de l'action mutuelle de deux portions infiniment petites, pour que l'équilibre soit en effet indépendant de tous les changements de forme ou de grandeur compatibles avec ces conditions.

Ce dernier procédé ne peut être employé que quand la nature de l'action qu'on étudie donne lieu à des cas d'équilibre indépendants de la forme des corps; il est, par conséquent, beaucoup plus restreint dans ses applications que celui dont j'ai parlé tout-à-l'heure : mais puisque les conducteurs voltaïques présentent des circonstances où cette sorte d'équilibre a lieu, il est naturel de le préférer à tout autre, comme plus direct, plus simple, et susceptible d'une plus grande exactitude quand les expériences sont faites avec les précautions convenables. Il y a d'ailleurs, à l'égard

(1) Voyez le Journal des savants, avril 1821, p. 233.

de l'action exercée par ces conducteurs, un motif bien plus décisif encore de le suivre dans les recherches relatives à la détermination des forces qui la produisent : c'est l'extrême difficulté des expériences où l'on se proposerait, par exemple, de mesurer ces forces par le nombre des oscillations d'un corps soumis à leurs actions. Cette difficulté vient de ce que quand on fait agir un conducteur fixe sur une portion mobile du circuit voltaïque, les parties de l'appareil nécessaire pour la mettre en communication avec la pile, agissent sur cette portion mobile en même temps que le conducteur fixe, et altèrent ainsi les résultats des expériences. Je crois cependant être parvenu à la surmonter dans un appareil propre à mesurer l'action mutuelle de deux conducteurs, l'un fixe et l'autre mobile, par le nombre des oscillations de ce dernier, et en faisant varier la forme du conducteur fixe. Je décrirai cet appareil dans la suite de ce Mémoire.

Il est vrai qu'on ne rencontre pas les mêmes obstacles quand on mesure de la même manière l'action d'un fil conducteur sur un aimant; mais ce moyen ne peut être employé quand il s'agit de la détermination des forces que deux conducteurs voltaïques exercent l'un sur l'autre, détermination qui doit être le premier objet de nos recherches dans l'étude des nouveaux phénomènes. Il est évident, en effet, que si l'action d'un fil conducteur sur un aimant était due à une autre cause que celle qui a lieu entre deux conducteurs, les expériences faites sur la première ne pourraient rien apprendre relativement à la seconde; et que si les aimants ne doivent leurs propriétés qu'à des courants électriques, entourant chacune de leurs particules, il faudrait, pour pouvoir en tirer

des conséquences certaines relativement à l'action qu'exerce sur ces courants celui du fil conducteur, que l'on sût d'avance s'ils ont la même intensité près de la surface de l'aimant et dans son intérieur, ou suivant quelle loi varie cette intensité; si les plans de ces courants sont partout perpendiculaires à l'axe du barreau aimanté, comme je l'avais d'abord supposé, ou si l'action mutuelle des courants d'un même aimant leur donne une situation d'autant plus inclinée à cet axe qu'ils en sont à une plus grande distance et qu'ils s'écartent davantage de son milieu, comme je l'ai conclu depuis de la différence qu'on remarque entre la situation des pôles d'un aimant, et celles des points qui jouissent des mêmes propriétés dans un fil conducteur roulé en hélice (1).

---

(1) Je crois devoir insérer ici la note suivante, qui est extraite de l'analyse des travaux de l'Académie pendant l'année 1821, publiée le 8 avril 1822. (Voyez la partie mathématique de cette analyse, p. 22 et 23.)

« La principale différence entre la manière d'agir d'un aimant et d'un « conducteur voltaïque dont une partie est roulée en hélice autour de « l'autre, consiste en ce que les pôles du premier sont situés plus près du « milieu de l'aimant que ses extrémités, tandis que les points qui présentent « les mêmes propriétés dans l'hélice sont exactement placés aux extrémités « de cette hélice : c'est ce qui doit arriver quand l'intensité des courants de « l'aimant va en diminuant de son milieu vers ses extrémités. Mais M. Ampère a reconnu depuis une autre cause qui peut aussi déterminer cet « effet. Après avoir conclu de ses nouvelles expériences, que les courants « électriques d'un aimant existent autour de chacune de ses particules, il « lui a été aisé de voir qu'il n'est pas nécessaire de supposer, comme il « l'avait fait d'abord, que les plans de ces courants sont partout perpendiculaires à l'axe de l'aimant; leur action mutuelle doit tendre à donner à « ces plans une situation inclinée à l'axe, surtout vers ses extrémités, en « sorte que les pôles, au lieu d'y être exactement situés, comme ils de-

Les divers cas d'équilibre que j'ai constatés par des expériences précises, donnent immédiatement autant de lois qui conduisent directement à l'expression mathématique de la

---

« vraient l'être, d'après les calculs déduits des formules données par « M. Ampère, lorsqu'on suppose tous les courants de même intensité et « dans des plans perpendiculaires à l'axe, doivent se rapprocher du milieu « de l'aimant d'une partie de sa longueur d'autant plus grande que les « plans d'un plus grand grand nombre de courants sont ainsi inclinés, et « qu'ils le sont davantage, c'est-à-dire d'autant plus que l'aimant est plus « épais relativement à sa longueur, ce qui est conforme à l'expérience. « Dans les fils conducteurs pliés en hélice, et dont une partie revient par « l'axe pour détruire l'effet de la partie des courants de chaque spire qui agit « comme s'ils étaient parallèles à cet axe, les deux circonstances qui, d'après « ce que nous venons de dire, n'ont pas nécessairement lieu dans les aimants, « existent au contraire nécessairement dans ces fils; aussi observe-t-on que « les hélices ont des pôles semblables à ceux des aimants, mais placés exac« tement à leurs extrémités comme le donne le calcul. »

On voit par cette note que, dès l'année 1821, j'avais conclu des phénomènes que présentent les aimants : 1° qu'en considérant chaque particule d'un barreau aimanté comme un aimant, les axes de ces aimants élémentaires doivent être, non pas parallèles à l'axe de l'aimant total comme on le supposait alors, mais situés dans des directions inclinées à cet axe et dans des directions déterminées par leur action mutuelle; 2° que cette disposition est une des causes pour lesquelles les pôles de l'aimant total ne sont pas situés à ses extrémités, mais entre les extrémités et le milieu de l'aimant. L'une et l'autre de ces assertions se trouvent aujourd'hui complètement démontrées par les résultats que M. Poisson a déduits des formules par lesquelles il a représenté la distribution, dans les aimants, des forces qui émanent de chacune de leurs particules. Ces formules sont fondées sur la loi de Coulomb, et il n'y a, par conséquent, rien à y changer quand on adopte la manière dont j'ai expliqué les phénomènes magnétiques, puisque cette loi est une conséquence de ma formule, comme on le verra dans la suite de ce Mémoire.

force que deux éléments de conducteurs voltaïques exercent l'un sur l'autre, d'abord en faisant connaître la forme de cette expression, ensuite en déterminant les nombres constants, mais d'abord inconnus, qu'elle renferme, précisément comme les lois de Képler démontrent d'abord que la force qui retient les planètes dans leurs orbites tend constamment au centre du soleil, puisqu'elle change pour une même planète en raison inverse du carré de sa distance à ce centre, enfin que le coefficient constant qui en représente l'intensité a la même valeur pour toutes les planètes. Ces cas d'équilibre sont au nombre de quatre : le premier démontre l'égalité des valeurs absolues de l'attraction et de la répulsion qu'on produit en faisant passer alternativement, en deux sens opposés, le même courant dans un conducteur fixe dont on ne change ni la situation ni la distance au corps sur lequel il agit. Cette égalité résulte de la simple observation que deux portions égales d'un même fil conducteur recouvertes de soie pour en empêcher la communication, et toutes deux rectilignes ou tordues ensemble de manière à former l'une autour de l'autre deux hélices dont toutes les parties sont égales, et qui sont parcourues par un même courant électrique, l'une dans un sens et l'autre en sens contraire, n'exercent aucune action, soit sur un conducteur mobile, soit sur un aimant; on peut aussi la constater à l'aide du conducteur mobile qu'on voit dans la figure 9 de la planche Ire du tome XVIII des Annales de chimie et de physique, relative à la description d'un de mes appareils électro-dynamiques, et qui est représenté ici (Pl. I, fig. 1). On place pour cela un peu au-dessous de la partie inférieure *deéd'* de ce conducteur, et dans une direction quelconque, un conducteur rectiligne

horizontal plusieurs fois redoublé AB, de manière que le milieu de sa longueur et de son épaisseur soit dans la verticale qui passe par les pointes x, y, autour desquelles tourne librement le conducteur mobile. On voit alors que ce conducteur reste dans la situation où on le place; ce qui prouve qu'il y a équilibre entre les actions exercées par le conducteur fixe sur les deux portions égales et opposées de circuit voltaïque $bcde$, $b'c'd'e'$, qui ne diffèrent que parce que, dans l'une, le courant électrique va en s'approchant du conducteur fixe AB, et dans l'autre, en s'en éloignant, quel que soit d'ailleurs l'angle formé par la direction de ce dernier conducteur avec le plan du conducteur mobile : or, si l'on considère d'abord les deux actions exercées entre chacune de ces portions de circuit voltaïque et la moitié du conducteur AB dont elle est la plus voisine, et ensuite les deux actions entre chacune d'elles et la moitié du même conducteur dont elle est la plus éloignée, on verra aisément, 1° que l'équilibre dont nous venons de parler ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs de cet angle, qu'autant qu'il y a séparément équilibre entre les deux premières actions et les deux dernières; 2° que si l'une des deux premières est attractive, parce que les côtés de l'angle aigu formé par les portions de conducteurs entre lesquelles elle a lieu, sont parcourus dans le même sens par le courant électrique, l'autre sera répulsive parce qu'elle aura lieu entre les deux côtés de l'angle égal opposé au sommet, qui sont parcourus en sens contraires par le même courant, en sorte qu'il faudra d'abord, pour qu'il y ait équilibre entre elles, que ces deux premières actions qui tendent à faire tourner le conducteur mobile, l'une dans un sens, l'autre dans le sens opposé, soient égales

entre elles; et ensuite que les deux dernières actions, l'une attractive et l'autre répulsive, qui s'exercent entre les côtés des deux angles obtus opposés au sommet et suppléments de ceux dont nous venons de parler, soient aussi égales entre elles. Il est inutile de remarquer que ces actions sont réellement les sommes des produits des forces qui agissent sur chaque portion infiniment petite du conducteur mobile, multipliées par leur distance à la verticale autour de laquelle il peut librement tourner; mais comme les distances à cette verticale des portions infiniment petites correspondantes des deux branches *bcde*, *b'c'd'e'* sont toujours égales entre elles, l'égalité des moments rend nécessaire celle des forces.

Le second des trois cas généraux d'équilibre, est celui que j'ai remarqué à la fin de l'année 1820; il consiste dans l'égalité des actions exercées sur un conducteur rectiligne mobile, par deux conducteurs fixes situés à égales distances du premier, et dont l'un est rectiligne, l'autre plié et contourné d'une manière quelconque, quelles que soient d'ailleurs les sinuosités que forme ce dernier. Voici la description de l'appareil avec lequel j'ai vérifié l'égalité des deux actions par des expériences susceptibles d'une grande précision, et dont j'ai communiqué les résultats à l'Académie, dans la séance du 26 décembre 1820.

Les deux règles verticales en bois, PQ, RS (fig. 2), portent, dans des rainures pratiquées sur celles de leurs faces qui se trouvent en regard, la première un fil rectiligne *bc*, la seconde un fil *kl* formant, dans toute sa longueur et dans un plan perpendiculaire au plan qui joindrait les deux axes des règles, des contours et des replis tels que ceux qu'on voit dans la figure le long de la règle RS, de manière

que ce fil ne s'éloigne, en aucun de ses points, que très-peu du milieu de la rainure.

Ces deux fils sont destinés à servir de conducteurs à deux portions d'un même courant, que l'on fait agir par répulsion sur la partie G H d'un conducteur mobile, composé de deux circuits rectangulaires presque fermés et égaux B C D E, F G H I, qui sont parcourus en sens contraires par le courant électrique, afin que les actions que la terre exerce sur ces deux circuits se détruisent mutuellement. Aux deux extrémités de ce conducteur mobile, sont deux pointes A et K qui plongent dans les coupes M et N, pleines de mercure, et soudées aux extrémités des deux branches de cuivre *g* M, *h* N. Ces branches sont en communication, par les boîtes de cuivre *g* et *h*, la première avec un fil de cuivre *gfe*, plié en hélice autour du tube de verre *hgf*, l'autre avec un fil rectiligne *hi* qui passe dans l'intérieur du même tube, et se termine dans l'auge *ki*, creusée dans une pièce de bois *vw* qu'on fixe à la hauteur que l'on veut, contre le montant *z*, avec la vis de pression *o*. D'après l'expérience dont j'ai parlé plus haut, cette portion du circuit composée de l'hélice *gf* et du fil rectiligne *hi*, ne peut exercer aucune action sur le conducteur mobile. Pour que le courant électrique passe dans les conducteurs fixes *bc* et *kl*, les fils dont ces conducteurs sont formés se prolongent en *cde*, *lmn*, dans deux tubes de verre (1) attachés à la traverse

(1) L'usage de ces tubes est d'empêcher la flexion des fils qui y sont renfermés, en les maintenant à des distances égales des deux conducteurs *be*, *kl*, afin que leurs actions sur GH qui diminuent celle de ces deux conducteurs, les diminuent également.

xy, et viennent se terminer, le premier dans la coupe *e*, et le second dans la coupe *n*. Tout étant ainsi disposé, on met du mercure dans toutes les coupes et dans les deux auges *ba*, *ki*, et l'on plonge le rhéophore positif *pa* dans l'auge *ba* qui est aussi creusée dans la pièce de bois *vw*, et le rhéophore négatif *qn* dans la coupe *n*. Le courant parcourt tous les conducteurs de l'appareil dans l'ordre suivant *pabcdefg* MABCDEF GHIKN *hiklmnq*; d'où il résulte qu'il est ascendant dans les deux conducteurs fixes, et descendant dans la partie GH du conducteur mobile qui est soumise à leur action, et qui se trouve au milieu de l'intervalle des deux conducteurs fixes dans le plan qui passe par leurs axes. Cette partie GH est donc repoussée par *bc* et *kl*: d'où il suit que si l'action de ces deux conducteurs est la même à égales distances, GH doit s'arrêter au milieu de l'intervalle qui les sépare; c'est ce qui arrive en effet.

Il est bon de remarquer 1° que les deux axes des conducteurs fixes étant à égales distances de GH, on ne peut pas dire rigoureusement que la distance est la même pour tous les points du conducteur *kl*, à cause des contours et des replis que forme ce conducteur. Mais comme ces contours et ces replis sont dans un plan perpendiculaire au plan qui passe par GH et par les axes des conducteurs fixes, il est évident que la différence de distance qui en résulte, est la plus petite possible, et d'autant moindre que la moitié de la largeur de la rainure RS, que cette moitié est moindre que l'intervalle des deux règles, puisque cette différence, dans le cas où elle est la plus grande possible, est égale à celle qui se trouve entre le rayon et la sécante d'un arc dont la tangente est égale à la moitié de la largeur de la rainure,

et qui appartient à un cercle dont le diamètre est l'intervalle des deux règles. 2° Que si l'on décompose chaque portion infiniment petite du conducteur *kl*, comme on décomposerait une force en deux autres petites portions qui en soient les projections, l'une sur l'axe vertical de ce conducteur, l'autre sur des lignes horizontales menées par tous ses points dans le plan où se trouvent les replis et les contours qu'il forme, la somme des premières, en prenant négativement celles qui, ayant une direction opposée à la direction des autres, doivent produire une action en sens contraire, sera égale à la longueur de cet axe; en sorte que l'action totale, résultant de toutes ces projections, sera la même que celle d'un conducteur rectiligne égal à l'axe, c'est-à-dire à celle du conducteur *bc* situé de l'autre côté à la même distance de GH, tandis que l'action des secondes sera nulle sur le même conducteur mobile GH, puisque les plans élevés perpendiculairement sur le milieu de chacune d'elles passeront sensiblement par la direction de GH. La réunion de ces deux séries de projections produit donc nécessairement sur GH une action égale à celle de *bc*; et comme l'expérience prouve que le conducteur sinueux *kl* produit aussi une action égale à celle de *bc*, quels que soient les replis et les contours qu'il forme, il s'ensuit qu'il agit, dans tous les cas, comme la réunion des deux séries de projections, ce qui ne peut avoir lieu, indépendamment de la manière dont il est plié et contourné, à moins que chacune des parties de ce conducteur n'agisse séparément comme la réunion de ses deux projections.

Pour que cette expérience ait toute l'exactitude désirable, il est nécessaire que les deux règles soient exactement verticales, et qu'elles soient précisément à la même distance du

conducteur mobile. Pour remplir ces conditions, on adapte une division $\alpha\beta$ à la traverse xy, et l'on fixe les règles avec deux crampons η et θ, et deux vis de pression λ, μ, ce qui permet de les écarter ou de les rapprocher à volonté, en les maintenant toujours à égale distance du milieu γ de la division $\alpha\beta$. L'appareil est construit de manière que les deux règles sont perpendiculaires à la traverse xy, et on rend celle-ci horizontale à l'aide des vis que l'on voit aux quatre coins du pied de l'instrument, et du fil à plomb XY qui répond exactement au point Z, déterminé convenablement sur ce pied, quand la traverse xy est parfaitement de niveau.

Pour rendre le conducteur A B C D E F G H I K mobile autour d'une ligne verticale, située à égale distance des deux conducteurs bc, kl, ce conducteur est suspendu à un fil métallique très-fin attaché au centre d'un bouton T, qui peut tourner sur lui-même sans changer de distance à ces deux conducteurs; ce bouton est au centre d'un petit cadran O, sur lequel l'indice L sert à marquer l'endroit où il faut l'arrêter pour que la partie GH du conducteur mobile réponde, sans que le fil soit tordu, au milieu de l'intervalle des deux conducteurs fixes bc, kl, afin de pouvoir remettre immédiatement l'aiguille dans la direction où il faut qu'elle soit pour cela, toutes les fois qu'on veut répéter l'expérience. On reconnaît que G H est en effet à égale distance de bc et de kl, au moyen d'un autre fil à plomb $\psi\omega$ attaché à une branche de cuivre $\varphi\chi\psi$ portée comme le cadran O par le support UVO, dans lequel cette branche $\varphi\chi\psi$ peut tourner autour de l'axe du bouton φ qui la termine, ce qui donne la facilité de faire répondre la pointe de l'aplomb ω sur la ligne $\gamma\delta$ milieu de la division $\alpha\beta$. Quand le conducteur est dans la position con-

venable, les trois verticales $\psi\omega$, GH et CD se trouvent dans le même plan, et l'on s'en assure aisément en plaçant l'œil dans ce plan en avant de $\psi\omega$.

Le conducteur mobile se trouve ainsi placé d'avance dans la situation où il doit y avoir équilibre entre les répulsions des deux conducteurs fixes, si ces répulsions sont exactement égales : on les produit alors en plongeant dans le mercure de l'auge *ba* et de la coupe *n* les fils *ap*, *nq*, qui communiquent avec les deux extrémités de la pile, et l'on voit le conducteur GH rester dans cette situation malgré la grande mobilité de ce genre de suspension, tandis que si l'on déplace, même très-peu, l'indice L, ce qui amène GH dans une situation où il n'est plus à égales distances des conducteurs fixes *bc*, *kl*, on le voit se mouvoir à l'instant où l'on établit les communications avec la pile, en s'éloignant de celui des conducteurs dont il se trouve le plus près. C'est ainsi que j'ai constaté, dans le temps où j'ai fait construire cet instrument, l'égalité des actions des deux conducteurs fixes, par des expériences répétées plusieurs fois avec toutes les précautions nécessaires pour qu'il ne pût rester aucun doute sur leur résultat.

On peut aussi démontrer la même loi par une expérience bien simple : il suffit pour cela de prendre un fil de cuivre revêtu de soie dont une portion est rectiligne et l'autre est repliée autour d'elle de manière qu'elle forme des sinuosités quelconques sans se séparer de la première qui en est isolée par la soie qui les recouvre. On constate alors qu'une autre portion de fil conducteur est sans action sur l'assemblage de ces deux portions ; et comme elle le serait également sur l'assemblage de deux fils rectilignes parcourus en sens con-

traires par un même courant électrique, d'après l'expérience par laquelle on constate de la manière la plus simple le premier cas d'équilibre, il s'ensuit que l'action d'un courant sinueux est précisément égale à celle d'un courant rectiligne compris entre les mêmes extrémités, puisque ces deux actions font l'une et l'autre équilibre à l'action d'un même courant rectiligne de même longueur que ce dernier, mais dirigé en sens contraire.

Le troisième cas d'équilibre consiste en ce qu'un circuit fermé de forme quelconque, ne saurait mettre en mouvement une portion quelconque d'un fil conducteur formant un arc de cercle dont le centre est dans un axe fixe, autour duquel il peut tourner librement et qui est perpendiculaire au plan du cercle dont cet arc fait partie.

Sur un pied TT′ (P. Ire, fig. 3), en forme de table, s'élèvent deux colonnes, EF, E′F′, liées entre elles par deux traverses LL′, EF′; un axe GH est maintenu entre ces deux traverses dans une position verticale. Ses deux extrémités G, H, terminées en pointes aiguës, entrent dans deux trous coniques pratiqués, l'un dans la traverse inférieure LL′, l'autre à l'extrémité d'une vis KZ portée par la traverse supérieure FF′, et destinée à presser l'axe GH sans le forcer. En C est fixé invariablement à cet axe un support QO dont l'extrémité O présente une charnière dans laquelle est engagé par son milieu un arc de cercle AA′ formé d'un fil métallique qui reste constamment dans une position horizontale, et qui a pour rayon la distance du point O à l'axe GH. Cet arc est équilibré par un contre-poids Q, afin de diminuer le frottement de l'axe GH dans les trous coniques où ses extrémités sont reçues.

Au-dessous de l'arc AA′ sont disposés deux augets M, M′ pleins de mercure, de telle sorte que la surface du mercure, s'élevant au-dessus des bords, vienne toucher l'arc AA′ en B et B′. Ces deux augets communiquent par des conducteurs métalliques, MN, M′N′, avec des coupes P, P′ pleines de mercure. La coupe P et le conducteur MN qui la réunit à l'auget M sont fixés à un axe vertical qui s'enfonce dans la table de manière à pouvoir tourner librement. La coupe P′, à laquelle est attaché le conducteur M′N′, est traversée par le même axe, autour duquel elle peut tourner aussi indépendamment de l'autre. Elle en est isolée par un tube de verre V qui enveloppe cet axe, et par une rondelle de verre U qui la sépare du conducteur de l'auget M, de manière qu'on peut disposer les conducteurs MN, M′N′ sous l'angle qu'on veut.

Deux autres conducteurs IR, I′R′ attachés à la table plongent respectivement dans les coupes P, P′, et les font communiquer avec des cavités R, R′ creusées dans la table et remplies de mercure. Enfin, une troisième cavité S pleine également de mercure se trouve entre les deux autres.

Voici la manière de faire usage de cet appareil : On fait plonger l'un des rhéophores, par exemple, le rhéophore positif dans la cavité R, et le rhéophore négatif dans la cavité S, qu'on met en communication avec la cavité R′ par un conducteur curviligne d'une forme quelconque. Le courant suit le conducteur RI, passe dans la coupe P, de là dans le conducteur NM, dans l'auget M, le conducteur M′N′, la coupe P′, le conducteur I′R′, et enfin de la cavité R′ dans le conducteur curviligne qui communique avec le mercure de la cavité S où plonge le rhéophore négatif.

D'après cette disposition le circuit voltaïque total est formé :

1° De l'arc BB′ et des conducteurs MN, M′N′;

2° D'un circuit qui se compose des parties RIP, P′I′R′ de l'appareil, du conducteur curviligne allant de R′ en S et de la pile elle-même.

Ce dernier circuit doit agir comme un circuit fermé, puisqu'il n'est interrompu que par l'épaisseur du verre qui isole les deux coupes P, P′ : il suffira donc d'observer son action sur l'arc BB′ pour constater par l'expérience l'action d'un circuit fermé sur un arc dans les différentes positions qu'on peut donner à l'un et à l'autre.

Lorsqu'au moyen de la charnière O on met l'arc AA′ dans une position telle que son centre soit hors de l'axe GH, cet arc prend un mouvement et glisse sur le mercure des augets M, M′ en vertu de l'action du courant curviligne fermé qui va de R′ en S. Si au contraire son centre est dans l'axe, il reste immobile; d'où il suit que les deux portions du circuit fermé qui tendent à le faire tourner en sens contraires autour de l'axe exercent sur cet arc des moments de rotation dont la valeur absolue est la même, et cela, quelle que soit la grandeur de la partie BB′ déterminée par l'ouverture de l'angle des conducteurs MN, M′N′. Si donc on prend successivement deux arcs BB′ qui diffèrent peu l'un de l'autre, comme le moment de rotation est nul pour chacun d'eux, il sera nul pour leur petite différence, et par conséquent pour tout élément de circonférence dont le centre est dans l'axe; d'où il suit que la direction de l'action exercée par le circuit fermé sur l'élément passe par l'axe, et qu'elle est nécessairement perpendiculaire à l'élément.

Lorsque l'arc AA′ est situé de manière que son centre soit

dans l'axe, les portions de conducteur MN, M′N′ exercent sur l'arc BB′ des actions répulsives égales et opposées, en sorte qu'il ne peut en résulter aucun effet; et puisqu'il n'y a pas de mouvement, on est sûr qu'il n'y a pas de moment de rotation produit par le circuit fermé.

Lorsque l'arc AA′ se meut dans l'autre situation où nous l'avions d'abord supposé, les actions des conducteurs MN et M′N′ ne sont plus égales : on pourrait croire que le mouvement n'est dû qu'à cette différence; mais suivant qu'on approche ou qu'on éloigne le circuit curviligne qui va de R′ en S, le mouvement est augmenté ou diminué, ce qui ne permet pas de douter que le circuit fermé ne soit pour beaucoup dans l'effet observé.

Ce résultat ayant lieu, quelle que soit la longueur de l'axe AA′, aura nécessairement lieu pour chacun des éléments dont cet arc est composé. Nous tirerons de là cette conséquence générale, que l'action d'un circuit fermé, ou d'un ensemble de circuits fermés quelconques, sur un élément infiniment petit d'un courant électrique, est perpendiculaire à cet élément.

C'est à l'aide d'un quatrième cas d'équilibre, dont il me reste à parler, qu'on peut achever de déterminer les coefficients constants qui entrent dans ma formule, sans avoir recours, comme je l'avais d'abord fait, aux expériences où un aimant et un fil conducteur agissent l'un sur l'autre. Voici l'instrument à l'aide duquel cette détermination repose uniquement sur l'observation de ce qui a lieu quand ce sont deux fils conducteurs dont on examine l'action mutuelle.

Dans la table MN (Pl. Ire, fig. 4), est creusée une cavité A, remplie de mercure, d'où part un conducteur fixe ABCDEFG formé d'une lame de cuivre, la portion CDE est circulaire,

et les parties CBA, EFG sont isolées l'une de l'autre par la soie qui les recouvre. En G ce conducteur est soudé à un tube de cuivre GH, surmonté d'une coupe I, qui communique avec le tube par le support HI du même métal. De la coupe I part un conducteur mobile IKLMNPQRS, dont la portion MNP est circulaire; il est entouré de soie dans les parties MLK et PQR pour qu'elles soient isolées, et il est tenu horizontal au moyen d'un contre-poids *a* fixé sur une circonférence de cercle qu'un prolongement *bcg* de la lame dont est composé le conducteur mobile forme autour du tube GH. La coupe S est soutenue par une tige ST, ayant le même axe que GH, dont elle est isolée par une substance résineuse que l'on coule dans le tube. Le pied de la tige ST est soudé au conducteur fixe TUVXYZA', qui sort du tube GH par une ouverture assez grande pour que la résine l'en isole aussi complètement dans cet endroit qu'elle le fait dans le reste du tube GH, à l'égard de ST. Ce conducteur à sa sortie du tube, est revêtu de soie pour empêcher la portion TUV de communiquer avec YZA'. Quant à la portion VXY, elle est circulaire, et l'extrémité A' plonge dans une seconde cavité A' creusée dans la table et pleine de mercure.

Les centres O, O', O'' des trois portions circulaires sont en ligne droite; les rayons des cercles qu'elles forment sont en proportion géométrique continue, et l'on place d'abord le conducteur mobile de manière que les distances OO', O'O'' sont dans le même rapport que les termes consécutifs de cette proportion; de sorte que les cercles O et O' forment un système semblable à celui des cercles O' et O''. On plonge alors le rhéophore positif en A et le rhéophore négatif en A', le courant parcourt successivement les trois cercles dont les centres sont en O, O', O'', qui se repoussent deux à deux, parce que

le courant va en sens opposés dans les parties voisines.

Le but de l'expérience qu'on fait avec cet instrument est de prouver que le conducteur mobile reste en équilibre dans la position où le rapport de OO′ à O′O″ est le même que celui des rayons de deux cercles consécutifs, et que si on l'écarte de cette position il y revient en oscillant autour d'elle.

Je vais maintenant expliquer comment on déduit rigoureusement de ces cas d'équilibre la formule par laquelle j'ai représenté l'action mutuelle de deux éléments de courant voltaïque, en montrant que c'est la seule force agissant suivant la droite qui en joint les milieux qui puisse s'accorder avec ces données de l'expérience. Il est d'abord évident que l'action mutuelle de deux éléments de courants électriques est proportionnelle à leur longueur; car, en les supposant divisés en parties infiniment petites égales à leur commune mesure, toutes les attractions ou répulsions de ces parties, pouvant être considérées comme dirigées suivant une même droite, s'ajoutent nécessairement. Cette même action doit encore être proportionnelle aux intensités des deux courants. Pour exprimer en nombre l'intensité d'un courant quelconque, on concevra qu'on ait choisi un autre courant arbitraire pour terme de comparaison, qu'on ait pris deux éléments égaux dans chacun de ces courants, qu'on ait cherché le rapport des actions qu'ils exercent à la même distance sur un même élément de tout autre courant, dans la situation où il leur est parallèle et où sa direction est perpendiculaire aux droites qui joignent son milieu avec les milieux de deux autres éléments. Ce rapport sera la mesure d'une des intensités, en prenant l'autre pour unité.

Désignant donc par i et i' les rapports des intensités des deux courants donnés à l'intensité du courant pris pour

unité, et par ds, ds' les longueurs des éléments que l'on considère dans chacun d'eux; leur action mutuelle, quand ils seront perpendiculaires à la ligne qui joint leurs milieux, parallèles entre eux et situés à l'unité de distance l'un de l'autre, sera exprimée par $ii'\,ds\,ds'$; que nous prendrons avec le signe + quand les deux courants, allant dans le même sens, s'attireront, et avec le signe — dans le cas contraire.

Si l'on voulait rapporter l'action des deux éléments à la pesanteur, on prendrait pour unité de forces le poids de l'unité de volume d'une matière convenue. Mais alors le courant pris pour unité ne serait plus arbitraire; il devrait être tel, que l'attraction entre deux de ses éléments ds, ds', situés comme nous venons de le dire, pût soutenir un poids qui fût à l'unité de poids comme $ds\,ds'$ est à 1. Ce courant une fois déterminé, le produit $ii'\,ds\,ds'$ désignerait le rapport de l'attraction de deux éléments d'intensités quelconques, toujours dans la même situation, au poids qu'on aurait choisi pour unité de force.

Cela posé, si l'on considère deux éléments placés d'une manière quelconque; leur action mutuelle dépendra de leurs longueurs, des intensités des courants dont ils font partie, et de leur position respective. Cette position peut se déterminer au moyen de la longueur r de la droite qui joint leurs milieux, des angles θ et θ' que font, avec un même prolongement de cette droite, les directions des deux éléments pris dans le sens de leurs courants respectifs, et enfin de l'angle ω que font entre eux les plans menés par chacune de ces directions et par la droite qui joint les milieux des éléments.

La considération des diverses attractions ou répulsions observées dans la nature me portait à croire que la force dont je cherchais l'expression, agissait de même en raison inverse

de la distance; je la supposai, pour plus de généralité, en raison inverse de la puissance n[ième] de cette distance, n étant une constante à déterminer. Alors en représentant par ρ, la fonction inconnue des angles θ, θ', ω, j'eus $\frac{\rho ii' ds ds'}{r^n}$ pour l'expression générale de l'action de deux éléments ds, ds' de deux courants ayant pour intensités i et i'. Il me restait à déterminer la fonction ρ, je considérai d'abord pour cela deux éléments ad, $a'd'$ (pl. I[re], fig. 5) parallèles entre eux, perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux, et situés à une distance quelconque r l'un de l'autre; leur action étant exprimée d'après ce qui précède par $\frac{ii' ds ds'}{r^n}$, je supposai que ad restât fixe, et que $a'd'$ fût transporté parallèlement à lui-même, de manière que son milieu fût toujours à la même distance de celui de ad; ω étant toujours nul, la valeur de leur action mutuelle ne pouvait dépendre que des angles désignés ci-dessus par θ, θ', et qui, dans ce cas, sont égaux ou suppléments l'un de l'autre, selon que les courants sont dirigés dans le même sens ou en sens opposés; je trouvai ainsi pour cette valeur $\frac{ii' ds ds' \varphi(\theta, \theta')}{r^n}$. En nommant k la constante positive ou négative à laquelle se réduit $\varphi(\theta, \theta')$ quand l'élément $a'd'$ est en $a'''d'''$ dans le prolongement de ad, et dirigé dans le même sens, j'obtins $\frac{kii' ds ds'}{r^n}$ pour l'expression de l'action de ad sur $a'''b'''$; dans cette expression la constante k représente le rapport de l'action de ad sur ad''' à celle de ad sur $a'd'$, rapport indépendant de la distance r, des intensités i, i', et des longueurs ds, ds' des deux éléments que l'on considère.

Ces valeurs de l'action électro-dynamique, dans les deux

cas les plus simples, suffisent pour trouver la forme générale de la fonction ρ, en partant de l'expérience qui montre que l'attraction d'un élément rectiligne infiniment petit est la même que celle d'un autre élément sinueux quelconque, terminé aux deux extrémités du premier, et de ce théorème que je vais établir, savoir: qu'une portion infiniment petite de courant électrique n'exerce aucune action sur une autre portion infiniment petite d'un courant situé dans un plan qui passe par son milieu, et qui est perpendiculaire à sa direction. En effet, les deux moitiés du premier élément produisent sur le second des actions égales, l'une attractive et l'autre répulsive, parce que dans l'une de ces moitiés le courant va en s'approchant et dans l'autre en s'éloignant de la perpendiculaire commune. Or, ces deux forces égales font un angle qui tend vers deux angles droits à mesure que l'élément tend vers zéro. Leur résultante est donc infiniment petite par rapport à ces forces, et doit par conséquent être négligée dans le calcul. Cela posé, soient Mm (fig. 6) $=\mathrm{d}s$ et M'$m=\mathrm{d}s'$, deux éléments de courants électriques, dont les milieux soient aux points A et A'; faisons passer le plan MA'm par la droite AA' qui les joint, et par l'élément Mm. Substituons à la portion de courant ds qui parcourt cet élément, sa projection N$n=\mathrm{d}s$ cos. θ sur la droite AA', et sa projection P$p=\mathrm{d}s$ sin. θ sur la perpendiculaire élevée en A cette droite dans le plan MA'm; substituons ensuite à la portion de courant ds' qui parcourt M'm' sa projection N'$n'=\mathrm{d}s'$ cos. θ sur la droite AA' et sa projection P'$p'=\mathrm{d}s'$ sin. θ' sur la perpendiculaire à AA' menée par le point A' sur AA' dans le plan M'Am'; remplaçons enfin cette dernière par sa projection T'$t'=\mathrm{d}s'$sin. θ' cos. ω sur le plan

MA'm et par sa projection U'u'=ds' sin. θ' sin. ω sur la perpendiculaire à ce plan menée par le point A'; d'après la loi établie ci-dessus, l'action des deux éléments ds et ds' sera la même que celle de l'assemblage des deux portions de courants ds cos. θ et ds sin. θ sur celui des trois portions ds' cos. θ', ds' sin. θ' cos. ω, ds'sin. θ' sin. ω; cette dernière ayant son milieu dans le plan MAm auquel elle est perpendiculaire, il n'y aura aucune action entre elle et les deux portions d$s$cos. θ, ds sin. θ, qui sont dans ce plan. Il ne pourra non plus, par la même raison, y en avoir aucune entre les portions d$s$cos. θ, ds' sin. θ' cos. ω, ni entre les portions ds sin. θ, ds' cos. θ', puisqu'en concevant par la droite AA' un plan perpendiculaire au plan MA'm, d$s$cos. θ et ds'cos. θ' se trouvent dans ce plan, et que les portions ds' sin. θ' cos. ω et ds sin. θ lui sont perpendiculaires et ont leurs milieux dans ce même plan. L'action des deux élements ds et ds' se reduit donc à la réunion des deux actions restantes, savoir : l'action mutuelle de ds sin. θ et de ds' sin. θ' cos. ω et à celle de ds cos. θ et de ds' cos. θ', ces deux actions étant toutes deux dirigées suivant la droite AA' qui joint les milieux des portions de courants entre lesquelles elles s'exercent, il suffit de les ajouter pour avoir l'action mutuelle des deux éléments ds et ds'. Or les portions ds sin. θ et ds'sin. θ' cos. ω sont dans un même plan, et toutes deux perpendiculaires à la droite AA'; leur action mutuelle suivant cette droite est donc, d'après ce que nous de voir, égale à

$$\frac{ii'\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'\sin.\theta\sin.\theta'\cos.\omega}{r^n}$$

et celle des deux portions ds cos. θ et ds' cos. θ' dirigée sui-

vant la même droite AA', a pour valeur

$$\frac{ii'\,k\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'\cos.\theta\cos.\theta'}{r^n},$$

et par conséquent l'action des deux éléments ds, ds' l'un sur l'autre est nécessairement exprimée par

$$\frac{ii'\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}{r^n}(\sin.\theta\sin.\theta'\cos.\omega+k\cos.\theta\cos.\theta').$$

On simplifie cette formule en y introduisant l'angle ε des deux éléments au lieu de ω; car en considérant le triangle sphérique dont les côtés seraient θ, θ', ε, on a

$$\cos.\varepsilon=\cos.\theta\cos.\theta'+\sin.\theta\sin.\theta'\cos.\omega;$$

d'où

$$\sin.\theta\sin.\theta'\cos.\omega=\cos.\varepsilon-\cos.\theta\cos.\theta';$$

substituant dans la formule précédente et faisant $k-1=h$, elle devient

$$\frac{ii'\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}{r^n}(\cos.\varepsilon+h\cos.\theta\cos.\theta'),$$

et il est bon de remarquer qu'elle change de signe quand un seul des courants, par exemple celui de l'élément ds, prend une direction diamétralement opposée à celle qu'il avait, car alors cos. θ et cos. ε changent de signe, et cos. θ' reste le même. Cette valeur de l'action mutuelle de deux éléments n'a été déduite que de la substitution des projections d'un élément à cet élément même; mais il est facile de s'assurer qu'elle exprime qu'on peut substituer à un élément un contour polygonal quelconque, et par suite un arc

quelconque de courbe terminé aux mêmes extrémités, pourvu que toutes les dimensions de ce polygone ou de cette courbe soient infiniment petites.

Soient, en effet, ds_1, ds_2,... ds_m les différents côtés du polygone infiniment petit substitué à ds; la direction AA′ pourra toujours être considérée comme celle des lignes qui joignent les milieux respectifs de ces côtés avec A′.

Soient θ_1, θ_2... θ_m les angles qu'ils font respectivement avec AA′; et ε_1, ε_2,... ε_m ceux qu'ils font avec M′m′, en désignant, suivant l'usage, par Σ une somme de termes de même forme, la somme des actions des côtés $ds_1 ds_2$,... ds_m sur ds', sera

$$\frac{ii'ds'}{r^n}(\Sigma ds_1 \cos.\varepsilon_1 + h\cos.\theta' \Sigma ds_1 \cos.\theta_1)$$

Or $\Sigma\, ds_1 \cos.\,\varepsilon_1$ est la projection du contour polygonal sur la direction de ds', et est par conséquent égal à la projection de ds sur la même direction, c'est-à-dire à $ds \cos.\varepsilon$; de même $\Sigma ds_1 \cos.\,\theta_1$ est égal à la projection de ds sur AA′ qui est $ds \cos.\theta$; l'action exercée sur ds' par le contour polygonal terminé aux extrémités de ds a donc pour expression

$$\frac{ii'ds'}{r^n}(ds\cos.\varepsilon + h ds\cos.\theta\cos.\theta')$$

et est la même que celle de ds sur ds'.

Cette conséquence étant indépendante du nombre des côtés ds_1, ds_2,... ds_m, aura lieu pour un arc infiniment petit d'une courbe quelconque.

On prouverait semblablement que l'action de ds' sur ds, peut être remplacée par celle qu'une courbe infiniment petite quelconque, dont les extrémités seraient les mêmes que

celles de ds', exercerait sur chacun des éléments de la petite courbe que nous avons déja substituée à ds, et par conséquent sur cette petite courbe elle-même. Ainsi la formule que nous avons trouvée exprime qu'un élément curviligne quelconque produit le même effet que la portion infiniment petite de courant rectiligne terminée aux mêmes extrémités, quelles que soient d'ailleurs les valeurs des constantes n et h. L'expérience par laquelle on constate ce résultat ne peut donc servir en rien à déterminer ces constantes.

Nous aurons alors recours aux deux autres cas d'équilibre dont nous avons déja parlé. Mais auparavant nous transformerons l'expression précédente de l'action de deux éléments de courants voltaïques, en y introduisant les différentielles partielles de la distance de ces deux éléments.

Soient x, y, z les coordonnées du premier point, et x', y', z' celles du second, il viendra

$$\cos.\theta = \frac{x-x'}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy}{ds} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz}{ds},$$

$$\cos.\theta' = \frac{x-x'}{r}\frac{dx'}{ds} + \frac{y-y'}{r}\frac{dy'}{ds'} + \frac{z-z'}{r}\frac{dz'}{ds'},$$

mais on a

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z)^2,$$

d'où, en prenant successivement les coefficients différentiels partiels par rapport à s et s',

$$r\frac{dr}{ds} = (x-x')\frac{dx}{ds} + (y-y')\frac{dy}{ds} + (z-z')\frac{dz}{ds},$$

$$r\frac{dr}{ds'} = -(x-x')\frac{dx'}{ds'} - (y-y')\frac{dy'}{ds'} - (z-z')\frac{dz'}{ds'},$$

ainsi

$$\cos.\theta = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}, \quad \cos.\theta' = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}.$$

Pour avoir la valeur de cos. ε, nous observerons que

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}, \text{ et } \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'}, \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'}, \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}$$

sont les cosinus des angles que ds et ds', forment avec les trois axes, et nous en conclurons

$$\cos.\varepsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'}.$$

Or, en différentiant par rapport à s' l'équation précédente qui donne $r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$, on trouve

$$r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'} = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s'} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}s'} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}s'} = -\cos.\varepsilon.$$

Si l'on substitue, dans la formule qui représente l'action mutuelle des deux éléments ds, ds', au lieu de cos. θ, cos. θ, cos. ε, les valeurs que nous venons d'obtenir, cette formule deviendra, en remplaçant $1 + h$ par son égal k,

$$-\frac{ii'\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}{r^n}\left(r\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'} + k\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}\right),$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$-\frac{ii'\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}{r^n}\cdot\frac{1}{r^{k-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(r^k\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)}{\mathrm{d}s'},$$

ou enfin

$$ii'r^{1-n-k}\frac{\mathrm{d}\left(r^k\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)}{\mathrm{d}s'}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'.$$

On pourrait encore lui donner la forme suivante :

$$-\frac{ii'}{1+k}r^{1-n-k}\frac{d^2(r^{1+k})}{ds\,ds'}\,ds\,ds'.$$

Examinons maintenant ce qui résulte du troisième cas d'équilibre dont nous avons parlé, et qui démontre que la composante de l'action d'un circuit fermé quelconque sur un élément, suivant la direction de cet élément, est toujours nulle, quelle que soit la forme du circuit. En désignant par ds' l'élément en question, l'action d'un élément ds du circuit fermé sur ds' sera, d'après ce qui précède,

$$-ii'ds'.r^{1-n-k}\frac{d\left(r^k\frac{dr}{ds'}\right)}{ds}ds,$$

ou, en remplaçant $\frac{dr}{ds'}$ par $-\cos.\theta'$,

$$ii'ds'r^{1-n-k}\frac{d(r^k\cos.\theta')}{ds}ds;$$

la composante de cette action suivant ds' s'obtiendra en multipliant cette expression par $\cos.\theta'$, et sera

$$ii'ds'r^{1-n-k}\cos.\theta'\frac{d(r^k\cos.\theta')}{ds}ds.$$

Cette différentielle intégrée dans toute l'étendue du circuit s donnera la composante tangente totale, et devra être nulle, quelle que soit la forme de ce circuit. En l'intégrant par partie, après l'avoir écrite ainsi

$$ii'ds'r^{1-n-2k}r^k\cos.\theta'\frac{d(r^k\cos.\theta')}{ds}ds,$$

nous aurons

$$\frac{1}{2}\, ii'\, \mathrm{d}s' \left[r^{1-n} \cos.^2\theta' - (1-n-2k) \int r^{-n} \cos.^2\theta'\, \mathrm{d}r \right].$$

Le premier terme $r^{1-n}\cos.^2\theta'$ s'évanouit aux limites. Quant à l'intégrale $\int r^{-n}\cos.^2\theta'\,\mathrm{d}r$, il est très-facile de concevoir un circuit fermé pour lequel elle ne se réduise pas à zéro. En effet, si on coupe ce circuit par des surfaces sphériques très-rapprochées ayant pour centre le milieu de l'élément $\mathrm{d}s'$, les deux points où chacune de ces sphères coupera le circuit donneront la même valeur pour r et des valeurs égales et de signes contraires pour $\mathrm{d}r$; mais les valeurs de $\cos.^2\theta'$ pourront être différentes, et il y aura une infinité de manières de faire en sorte que les carrés de tous les cosinus relatifs aux points situés d'un même côté entre les points extrêmes du circuit soient moindres que ceux relatifs aux points correspondants de l'autre côté; or, dans ce cas, l'intégrale ne s'évanouira pas; et comme l'expression ci-dessus doit être nulle, quelle que soit la forme du circuit, il faut donc que le coefficient $1-n-2k$ de cette intégrale soit nul, ce qui donne entre n et k cette première relation $1-n-2k=0$.

Avant de chercher une seconde équation pour déterminer ces deux constantes, nous commencerons par prouver que k est négatif, et, par conséquent, que $n=1-2k$ est plus grand que 1; nous aurons recours pour cela à un fait bien facile à constater par l'expérience, savoir qu'un conducteur rectiligne indéfini attire un circuit fermé, quand le courant électrique de ce circuit va dans le même sens que celui du conducteur dans la partie qui en est la plus voisine, et qu'il le repousse dans le cas contraire.

Soit UV (fig. 7) le conducteur rectiligne indéfini; suppo-

sons pour plus de simplicité que le circuit fermé T H K T′ K′H′ soit dans le même plan que le fil conducteur U V, et cherchons l'action exercée par un élément quelconque M M′ de ce dernier. Pour cela tirons du milieu A de cet élément des rayons vecteurs à tous ces points du circuit, et cherchons l'action perpendiculaire à U V exercée par cet élément sur le circuit.

La composante perpendiculaire à U V de l'action exercée par $MM' = ds'$ sur un élément $KH = ds$ s'obtiendra en multipliant l'expression de cette action par $\sin.\theta'$; elle sera donc, en observant que $1 - n - 2k = 0$,

$$ii'ds' \sin.\theta' r^k \frac{d(r^k \cos.\theta')}{ds} ds,$$

ou

$$\frac{1}{2} ii' ds' \operatorname{tang}.\theta' \frac{d(r^{2k} \cos.^2\theta')}{ds} ds,$$

expression qui doit être intégrée dans toute l'étendue du circuit. L'intégration par parties donnera

$$\frac{1}{2} ii' ds' \left(r^{2k} \sin.\theta' \cos.\theta' - \int r^{2k} d\theta'\right).$$

Le premier terme s'évanouissant aux limites, il reste seulement

$$-\frac{1}{2} ii' ds' \int r^{2k} d\theta'.$$

Considérant maintenant les deux éléments K H, K′ H′ compris entre les deux mêmes rayons consécutifs, $d\theta'$ est le même de part et d'autre, mais doit être pris avec un signe contraire, en sorte qu'en faisant $AH = r$, $AH' = r'$, on a pour l'action réunie des deux éléments

$$+\frac{1}{2} ii' ds' \left[\int (r'^{2k} - r^{2k})\, d\theta'\right],$$

où nous supposons que r' est plus grand que r. Le terme de cette intégrale qui résulte de l'action de la partie THT' convexe vers UV l'emportera sur celui qui est produit par l'action de la partie concave TH'T' si k est négatif; le contraire aura lieu si k est positif, et il n'y aura pas d'action si k est nul. Les mêmes conséquences ayant lieu pour tous les éléments de UV, il s'ensuit que la partie convexe vers UV aura plus d'influence sur le mouvement du circuit que la partie concave, si $k<0$, autant si $k=0$, et moins si $k>0$. Or l'expérience prouve qu'elle en a davantage. On a donc $k<0$, et par suite $n>1$, puisque $n=1-2k$.

On déduit de là cette conséquence remarquable, que les parties d'un même courant rectiligne se repoussent; car si l'on fait $\theta=0, \theta'=0$, la formule qui donne l'attraction de deux éléments devient $\frac{k\,ii'ds\,ds'}{r^n}$; et comme elle est négative, puisque k l'est, il y a répulsion. C'est ce que j'ai vérifié par l'expérience que je vais décrire. On prend un vase de verre PQ (fig. 8) séparé par la cloison MN en deux compartiments égaux et remplis de mercure, on y place un fil de cuivre recouvert de soie ABCDE, dont les branches AB, ED, situées parallèlement à la cloison MN, flottent sur le mercure avec lequel communiquent les extrémités nues A et E de ces branches. En mettant les rhéophores dans les capsules S et T, dont le mercure communique avec celui du vase PQ par les portions de conducteur hH, kK, on établit deux courants, dont chacun a pour conducteur une partie de mercure et une partie solide: quelle que soit la direction du courant, on voit toujours les deux fils AB, ED marcher parallèlement à la cloison MN en s'éloignant des points H et K, ce qui indique une répul-

sion pour chaque fil entre le courant établi dans le mercure et son prolongement dans le fil lui-même. Suivant le sens du courant, le mouvement du fil de cuivre est plus ou moins facile, parce que, dans un cas, l'action exercée par le globe sur la portion BCD de ce fil, s'ajoute à l'effet obtenu, et que dans l'autre au contraire, elle le diminue et doit en être retranchée.

Examinons maintenant l'action qu'exerce un courant électrique formant un circuit formé, ou un système de courants formant aussi des circuits fermés, sur un élément de courant électrique.

Prenons l'origine des coordonnées au milieu A (fig. 9) de l'élément proposé M'N', et nommons λ, μ, ν, les angles qu'il fait avec les trois axes. Soit MN un élément quelconque du courant formant un circuit fermé, ou d'un des courants formant également des circuits fermés dont se compose le système de courants que l'on considère, en nommant ds' et ds les éléments M'N', MN, r la distance AA' de leurs milieux et θ' l'angle du courant M'N' avec AA', la formule que nous avons trouvée précédemment pour exprimer l'action mutuelle des deux éléments deviendra, en y remplaçant $\frac{dr}{ds}$ par $-\cos.\theta'$,

$$ii'ds'r^k \frac{d(r^n \cos.\theta')ds}{ds}.$$

Les angles que AA' fait avec les trois axes ayant pour cosinus $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$, on a

$$\cos.\theta' = \frac{x}{r}\cos.\lambda + \frac{y}{r}\cos.\mu + \frac{z}{r}\cos.\nu;$$

en substituant cette valeur à $\cos.\theta$, et en multipliant par $\frac{x}{r}$, nous trouverons pour l'expression de la composante suivant l'axe des x,

$$ii'ds'r^{k-1}x\,d\left(r^{k-1}x\cos.\lambda + r^{k-1}y\cos.\mu + r^{k-1}z\cos.\nu\right),$$

le signe d se rapportant seulement, excepté dans le facteur ds', aux différentielles prises en ne faisant varier que s, cette expression peut s'écrire ainsi

$$= ii'ds'\left[\cos.\lambda\, r^{k-1}x\,d\left(r^{k-1}x\right) + \frac{x\cos.\mu}{y} r^{k-1}y\,d\left(r^{k-1}y\right) + \frac{x\cos.\nu}{z} r^{k-1}z\,d\left(r^{k-1}z\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}ii'ds'\left[\cos.\lambda\,d\left(r^{2k-2}x^2\right) + \frac{x}{y}\cos.\mu\,d\left(r^{2k-2}y^2\right) + \frac{x}{z}\cos.\nu\,d\left(r^{2k-2}z^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}ii'ds'\left(d\frac{x^2\cos.\lambda + xy\cos.\mu + xz\cos.\nu}{r^{n+1}} - \frac{y^2\cos.\mu}{r^{n+1}}d\frac{x}{y} - \frac{z^2\cos.\nu}{r^{n+1}}d\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}ii'ds'\left(d\frac{x\cos.\theta'}{r^n} + \frac{x\,dy - y\,dx}{r^{n+1}}\cos.\mu - \frac{z\,dx - x\,dz}{r^{n+1}}\cos.\nu\right),$$

en remplaçant $2k-2$ par sa valeur $-n-1$.

Si l'on représente par r_1, x_1, θ'_1 et r_2, x_2, θ'_2, les valeurs de r, x, θ', aux deux extrémités de l'arc s, et par X la résultante suivant l'axe des x de toutes les forces exercées par les éléments de cet arc sur ds', on aura

$$X = \frac{1}{2}ii'ds'\left(\frac{x_2\cos.\theta'_2}{r^n_2} - \frac{x_1\cos.\theta'_1}{r^n_1} + \cos.\mu\int\frac{x\,dy - y\,dx}{r^{n+1}} - \cos.\nu\int\frac{z\,dx - x\,dz}{r^{n+1}}\right).$$

Si cet arc forme un circuit fermé r_2, x_2, θ'_2 seront égaux à

r_1, x_1, θ'_1, et la valeur de X se réduira à

$$X = \frac{1}{2} ii' ds' \left(\cos.\mu \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^{n+1}} - \cos.\nu \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^{n+1}} \right).$$

En désignant par Y et Z les forces suivant les axes des y et des z résultant de l'action des mêmes éléments sur ds', on trouvera par un calcul semblable

$$Y = \frac{1}{2} ii' ds' \left(\cos.\nu \int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^{n+1}} - \cos.\lambda \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^{n+1}} \right),$$

$$Z = \frac{1}{2} ii' ds' \left(\cos.\lambda \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^{n+1}} - \cos.\mu \int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^{n+1}} \right),$$

et en faisant

$$\int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^{n+1}} = A, \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^{n+1}} = B, \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^{n+1}} = C,$$

il viendra

$$X = \frac{1}{2} ii' ds' (C \cos.\mu - B \cos.\nu),$$

$$Y = \frac{1}{2} ii' ds' (A \cos.\nu - C \cos.\lambda),$$

$$Z = \frac{1}{2} ii' ds' (B \cos.\lambda - A \cos.\mu).$$

En multipliant la première de ces équations par A, la seconde par B et la troisième par C, on trouve $AX + BY + CZ = 0$; et si l'on conçoit par l'origine une droite A′E qui fasse avec les axes des angles dont les cosinus soient respectivement

$$\frac{A}{B} = \cos.\xi_1, \frac{B}{D} \cos.\eta_1, \frac{C}{D} = \cos.\zeta_1,$$

en supposant, pour abréger,

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=D,$$

elle sera perpendiculaire sur la résultante R des trois forces X, Y, Z, qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R},$$

puisqu'on a, en vertu de l'équation précédente,

$$\frac{A}{D}\cdot\frac{X}{R}+\frac{B}{D}\cdot\frac{Y}{X}+\frac{C}{D}\cdot\frac{Z}{R}=0.$$

Il est à remarquer que la droite que nous venons de déterminer est tout-à-fait indépendante de la direction de l'élément M′ N′; car elle se déduit immédiatement des intégrales A, B, C qui ne dépendent que du circuit fermé et de la position des plans coordonnés, et qui sont les sommes des projections sur les plans coordonnés des aires des triangles qui ont leur sommet au milieu de l'élément ds', et pour bases les différents éléments des circuits fermés s, toutes ces aires étant divisées par la puissance $n+1$ du rayon vecteur r. La résultante étant perpendiculaire sur cette droite A′E que je nommerai directrice, elle se trouve, quelle que soit la direction de l'élément, dans le plan élevé au point A′ perpendiculairement à A′E; je donnerai à ce plan le nom de plan directeur. Si l'on fait la somme des carrés de X, Y, Z, on trouvera pour valeur de la résultante de l'action du circuit unique ou de l'ensemble de circuits que l'on considère,

$$R=\frac{1}{2}Dii'ds'\sqrt{(\cos.\zeta_1\cos.\mu-\cos.\eta_1\cos.\nu)^2+(\cos.\xi_1\cos.\nu-\cos.\zeta_1\cos.\lambda)^2+(\cos.\eta_1\cos.\lambda-\cos.\xi_1\cos.\mu)^2},$$

ou, en appelant ε l'angle de l'élément ds' avec la directrice,

$$R=\frac{1}{2}Dii'ds'\sin.\varepsilon.$$

Il est facile de déterminer la composante de cette action dans un plan donné passant par l'élément ds' et faisant un angle φ avec le plan mené pas ds' et la directrice. En effet, la résultante R étant perpendiculaire à ce dernier plan, sa composante sur le plan donné sera

$$\mathrm{R}\sin.\varphi, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\mathrm{D}ii'\mathrm{d}s'\sin.\varepsilon\sin.\varphi.$$

Or, $\sin.\varepsilon \sin.\varphi$ est égal au sinus de l'angle ψ que la directrice fait avec le plan donné. C'est ce que l'on déduit immédiatement de l'angle trièdre formé par ds', par la directrice et par sa projection sur le plan donné. La composante dans ce plan aura donc pour expression

$$\frac{1}{2}\mathrm{D}ii'\mathrm{d}s'\sin.\psi.$$

Cette expression peut se mettre sous une autre forme en observant que ψ est le complément de l'angle que fait la directrice avec la normale au plan dans lequel on considère l'action. On a donc, en nommant ξ, η, ζ les angles que cette dernière droite forme avec les trois axes,

$$\sin.\psi = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}\cos.\xi + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}\cos.\eta + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\cos.\zeta,$$

et l'expression de l'action devient

$$\frac{1}{2}ii'\mathrm{d}s'(\mathrm{A}\cos.\xi + \mathrm{B}\cos.\eta + \mathrm{C}\cos.\zeta),$$

ou

$$\frac{1}{2}\mathrm{U}ii'\mathrm{d}s',$$

en faisant

$$U = A\cos.\xi + B\cos.\eta + C\cos.\zeta.$$

On voit que cette action est indépendante de la direction de l'élément dans le plan que l'on considère, nous la désignerons sous le nom d'action exercée dans ce plan, et nous conclurons de ce qu'elle reste la même lorsqu'on donne successivement à l'élément différentes directions dans un même plan, que si celle que la terre exerce sur un conducteur mobile dans un plan fixe est produite par des courants électriques formant des circuits fermés, et dont les distances au conducteur sont assez grandes pour être considérées comme constantes pendant qu'il se meut dans ce plan, elle aura toujours la même valeur dans les différentes positions que prendra successivement le conducteur, parce que les actions exercées sur chacun des éléments dont il est composé restant toujours les mêmes et toujours perpendiculaires à ces éléments, leur résultante ne pourra varier ni dans sa grandeur ni dans sa direction relativement au conducteur. Cette direction changera d'ailleurs dans le plan fixe en y suivant le mouvement de ce conducteur : c'est en effet ce qu'on observe à l'égard d'un conducteur qui est mobile dans un plan horizontal, et qu'on dirige successivement dans divers azimuths.

On peut vérifier ce résultat par l'expérience suivante : dans un disque de bois ABCD (fig. 10), on creuse une rigole circulaire KLMN dans laquelle on place deux vases en cuivre KL, MN de même forme, et qui occupent chacun presque la demi-circonférence de la rigole de manière cependant qu'il reste entre eux deux intervalles KN, LM, qu'on remplit d'un mastic isolant; à chacun de ces vases sont soudées les deux lames de cuivre PQ, RS, incrustées dans le

disque et qui portent les coupes X, Y, destinées à mettre, au moyen du mercure qu'elles contiennent, les vases K L, M N, en communication avec les rhéophores d'une très-forte pile; dans le disque est incrustée une autre lame T O portant la coupe Z, où l'on met aussi un peu de mercure; cette lame T O est soudée au centre O du disque à une tige verticale sur laquelle est soudée une quatrième coupe U, dont le fond est garni d'un morceau de verre ou d'agate pour rendre plus mobile le sautoir dont nous allons parler, mais dont les bords sont assez élevés pour être en communication avec le mercure qu'on met dans cette coupe; elle reçoit la pointe V (fig. 11) qui sert de pivot au sautoir F G H I, dont les branches E G, E I sont égales entre elles et soudées en G et I aux lames *gxh, iyf* qui plongent dans l'eau acidulée des vases K L, M N, lorsque la pointe V repose sur le fond de la coupe U, et qui sont attachées par leurs autres extrémités *h*, *f* aux branches E H, E F, sans communiquer avec elles. Ces deux lames sont égales et semblables et pliées en arcs de cercle d'environ 90°. Lorsqu'on plonge les rhéophores, l'un dans la coupe Z, l'autre dans l'une des deux coupes X ou Y, le courant ne passe que par une des branches du sautoir, et l'on voit celui-ci tourner sur la pointe V par l'action de la terre, de l'est à l'ouest par le midi quand le courant va de la circonférence au centre, et dans le sens contraire quand il va du centre à la circonférence, conformément à l'explication que j'ai donnée de ce phénomène, et qu'on peut voir dans mon Recueil d'Observations électro-dynamiques, page 284. Mais lorsqu'on les plonge dans les coupes X et Y, le courant parcourant en sens contraires les deux branches E G, E I, le sautoir reste immobile dans quelque situation qu'on l'ait

placé, quand, par exemple, une des branches est parallèle et l'autre perpendiculaire au méridien magnétique, et cela lors même qu'en frappant légèrement sur le disque ABCD, on augmente, par les petites secousses qui en résultent, la mobilité de l'instrument. En pliant un peu les branches du sautoir autour du point E, on peut leur faire faire différents angles, et le résultat de l'expérience est toujours le même. Il s'ensuit évidemment que la force avec laquelle la terre agit sur une portion de conducteur, perpendiculairement à sa direction, pour la mouvoir dans un plan horizontal, et, par conséquent, dans un plan donné de position à l'égard du système des courants terrestres, est la même, quelle que soit la direction, dans ce plan, de la portion de conducteur, ce qui est précisément le résultat de calcul qu'il s'agissait de vérifier.

Il est bon de remarquer que l'action des courants de l'eau acidulée sur leurs prolongements dans les lames gh, if ne trouble en aucune manière l'équilibre de l'appareil; car il est aisé de voir que l'action dont il est ici question tend à faire tourner la lame gh autour de la pointe V dans le sens hxg, et la lame if dans le sens fyi, d'où résulte, à cause de l'égalité de ces lames, deux moments de rotations égaux et de signes contraires qui se détruisent.

On sait que c'est à M. Savary qu'est due l'expérience par laquelle on constate cette action; cette expérience peut se faire plus commodément en remplaçant la spirale en fil de cuivre de l'appareil dont il s'est d'abord servi, par une lame circulaire du même métal. Cette lame ABC (fig. 12) forme un arc de cercle presque égal à une circonférence entière; mais ses extrémités A et C sont séparées l'une de l'autre par un morceau D d'une substance isolante. On met une de

ses extrémités A, par exemple, en communication avec un des rhéophores par la pointe O qu'on place dans la coupe S (fig. 13) pleine de mercure; celle-ci est jointe par le fil métallique STR à la coupe R dans laquelle plonge un des rhéophores. Cette pointe O (fig. 12) communique avec l'extrémité A par le fil de cuivre AEQ dont le prolongement QF soutient en F la lame ABC par un anneau de substance isolante, qui entoure en ce point le fil de cuivre. Lorsque la pointe O repose sur le fond de la coupe S (fig. 13), la lame ABC (fig. 12) plonge dans l'eau acidulée contenue dans le vase de cuivre MN (fig. 13) qui communique avec la coupe P où se rend l'autre rhéophore; on voit alors tourner cette lame dans le sens CBA, et pourvu que la pile soit assez forte, le mouvement reste toujours dans ce sens lorsqu'on renverse les communications avec la pile, en changeant réciproquement les deux rhéophores de la coupe P à la coupe R, ce qui prouve que ce mouvement n'est point dû à l'action de la terre et ne peut venir que de celle que les courants de l'eau acidulée exercent sur le courant de la lame circulaire ABC (fig. 12), action qui est toujours répulsive, parce que si GH représente un des courants de l'eau acidulée qui se prolonge en HK dans la lame ABC, quel que soit le sens de ce courant, il parcourra évidemment l'un des côtés de l'angle GHK en s'approchant, et l'autre en s'éloignant du sommet H. Mais il faut, pour que le mouvement qu'on observe dans ce cas ait lieu, que la répulsion entre deux éléments, l'un en I et l'autre en L, ait lieu suivant la droite IL, oblique à l'arc ABC, et non suivant la perpendiculaire LT à l'élément situé en L, car la direction de cette perpendiculaire rencontrant la verticale menée par le point O autour de laquelle la partie mobile de l'appareil est assujettie à tourner, une force di-

rigée suivant cette perpendiculaire ne pourrait lui imprimer aucun mouvement de rotation.

Je viens de dire que, quand on veut s'assurer que le mouvement de cet appareil n'est pas produit par l'action de la terre, en constatant qu'il continue d'avoir lieu dans le même sens quand l'on renverse les communications avec la pile en changeant les rhéophores de coupes, il fallait employer une pile qui fût assez forte; il est impossible en effet, dans cette disposition de conducteur mobile, d'empêcher la terre d'agir sur le fil vertical AE pour le porter à l'ouest, quand le courant y est ascendant, à l'est quand le courant y est descendant, et sur le fil horizontal EQ, pour le faire tourner autour de la verticale passant par le point O, dans le sens direct est, sud, ouest, quand le courant va de E en Q, en s'approchant du centre de rotation, et dans le sens rétrograde ouest, sud, est, quand il va de Q en E, en s'éloignant du même centre (1). La première de ces actions est peu sensible, lors du moins qu'on ne donne au fil vertical AE que la longueur nécessaire pour la stabilité du conducteur mobile sur sa pointe O; mais la seconde est déterminée par les dimensions de l'appareil; et comme elle change de sens lorsqu'on renverse les communications avec la pile, elle s'ajoute dans un ordre de communication avec l'action exercée par les courants de l'eau acidulée, et s'en retranche dans l'autre; c'est pourquoi le mouvement observé est toujours plus rapide dans un cas que dans l'autre; cette différence est d'autant plus marquée,

---

(1) Voyez sur ces deux sortes d'actions exercées par le globe terrestre, ce qui est dit dans mon recueil d'Observations électro-dynamiques, pages 280, 284.

que le courant produit par la pile est plus faible, parce qu'à mesure que son intensité diminue, l'action électro-dynamique étant, toutes choses égales d'ailleurs, comme le produit des intensités des deux portions de courants qui agissent l'une sur l'autre, cette action entre les courants de l'eau acidulée et ceux de la lame ABC, diminue comme le carré de leur intensité, tandis que l'intensité des courants terrestres restant la même, leur action, sur ceux de la lame, ne devient moindre que proportionnellement à la même intensité : à mesure que l'énergie de la pile diminue, l'action du globe devient de plus en plus près de détruire celle des courants de l'eau acidulée dans la disposition des communications avec la pile où ces actions sont opposées, et l'on voit, lorsque cette énergie est devenue très-faible, l'appareil s'arrêter dans ce cas, et le mouvement se produire ensuite en sens contraire ; alors l'expérience conduirait à une conséquence opposée à celle qu'il s'agissait d'établir, puisque l'action de la terre devenant prépondérante, on pourrait méconnaître l'existence de celle des courants de l'eau acidulée. Au reste, la première de ces deux actions est toujours nulle sur la lame circulaire ABC, parce que la terre agissant comme un système de courants fermés, la force qu'elle exerce sur chaque élément étant perpendiculaire à la direction de cet élément, passe par la verticale menée par le point O, et ne peut, par conséquent, tendre à faire tourner autour d'elle le conducteur mobile.

Nous allons, pour servir d'exemple, appliquer les formules précédentes au cas où le système se réduit à un seul courant circulaire fermé.

Lorsque le système n'est composé que d'un seul courant,

parcourant une circonférence de cercle d'un rayon quelconque m, on simplifie le calcul, en prenant, pour le plan des xy, le plan mené par l'origine des coordonnées, c'est-à-dire par le milieu A de l'élément ab (fig. 14), parallèlement à celui du cercle; et pour le plan des xz, celui qui est mené perpendiculairement au plan du cercle par la même origine et par le centre O.

Soient p et q les coordonnées de ce centre O; supposons que le point C soit la projection de O sur le plan de xy, N celle d'un point quelconque M du cercle, et nommons ω l'angle ACN; si l'on abaisse NP perpendiculairement sur AX, les trois coordonnées x, y, z du point M seront MN, NP, AP, et l'on trouvera facilement pour leurs valeurs :

$$z=q, y=m \sin.\omega, x=p-m \cos.\omega.$$

Les quantités que nous avons désignées par A, B, C, étant respectivement égales à

$$\int \frac{y\,dz-z\,dy}{r^{n+1}}, \int \frac{z\,dx-x\,dz}{r^{n+1}}, \int \frac{x\,dy-y\,dx}{r^{n+1}};$$

nous aurons

$$A=-mq\int \frac{\cos.\omega\,d\omega}{r^{n+1}},$$

$$B=mq\int \frac{\sin.\omega\,d\omega}{r^{n+1}},$$

$$C=mp\int \frac{\cos.\omega\,d\omega}{r^{n+1}}-m^2\int \frac{d\omega}{r^{n+1}}.$$

Si l'on intègre par partie ceux de ces termes qui contiennent $\sin.\omega$ et $\cos.\omega$, en faisant attention que

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = q^2 + p^2 + m^2 - 2mp \cos.\omega$$

donne

$$dr = \frac{mp \sin.\omega\, d\omega}{r},$$

qu'on supprime les termes qui sont nuls parce que ces intégrales doivent être prises depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$, et qu'on mette les valeurs de A, B, C ainsi trouvées dans celle de U,

$$U = A\cos.\xi + B\cos.\eta + C\cos.\zeta,$$

on obtiendra

$$U = m\left[(n+1)(p^2\cos.\zeta - pq\cos.\xi)\int\frac{\sin.^2\omega\, d\omega}{r^{n+3}} - \cos.\zeta\int\frac{d\omega}{r^{n+1}}\right].$$

Or, l'angle ξ peut être exprimé au moyen de ζ; car, en désignant par h la perpendiculaire OK abaissée du centre O sur le plan bAG pour lequel on calcule la valeur de U, on aura $h = q\cos.\zeta + p\cos.\xi$, et cette valeur deviendra

$$U = m^2\left\{(n+1)[(p^2+q^2)\cos.\zeta - hq]\int\frac{\sin.^2\omega\, d\omega}{r^{n+3}} - \cos.\zeta\int\frac{d\omega}{r^{n+1}}\right\}.$$

L'évaluation en est bien simple dans le cas où le rayon m est très-petit par rapport à la distance l de l'origine A au centre O; car, si on la développe en série suivant les puissances de m, on verra que quand on néglige les puissances de m supérieures à 3, les termes en m^3 s'évanouissent entre les limites $0, 2\pi$, et que ceux en m^2 s'obtiennent en remplaçant r par $l = \sqrt{p^2+q^2}$; il ne reste alors qu'à calculer les valeurs de

$$\int\sin.^2\omega\, d\omega \text{ et de } \int d\omega \text{ depuis } \omega = 0 \text{ jusqu'à } \omega = 2\pi;$$

ce qui donne π pour la première, et 2π pour la seconde; la valeur de U se réduit donc à

$$U = \pi m^2 \left[\frac{(n-1)\cos.\zeta}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)hq}{l^{n+3}}\right].$$

Pour plus de généralité, nous allons supposer maintenant que le courant fermé, au lieu d'être circulaire, ait une forme quelconque, mais sans cesser d'être plan et très-petit.

Soit MNL (fig. 15) un très-petit circuit fermé et plan dont l'aire soit λ et qui agisse sur un élément placé à l'origine A. Partageons sa surface en éléments infiniment petits, par des plans passant par l'axe des z, et soit APQ la trace d'un de ces plans, et M, N ses points de rencontre avec le circuit λ, projetés sur le plan des xy en P et Q. Prolongeons la corde MN jusqu'à l'axe des z en G; abaissons de A une perpendiculaire $AE = q$ sur le plan du circuit, et joignons EG. Soit Apq la trace d'un plan infiniment voisin du premier, faisant avec celui-ci un angle $d\varphi$; faisons $AP = u$ et $PQ = \delta u$. L'action du circuit sur l'élément en A dépend, comme nous l'avons vu, de trois intégrales désignées par A, B, C, que nous allons calculer. Considérons d'abord C, dont la valeur est

$$C = \int \frac{x\,dy - y\,dx}{r^{n+1}} = \int \frac{u^2\,d\varphi}{r^{n+1}}.$$

Cette intégrale est relative à tous les points du circuit, et si l'on considère simultanément les deux éléments compris entre les deux plans voisins AGNQ et AGnq, et qui se rapportent à des valeurs égales et des signes contraires de $d\varphi$, on verra que les actions de ces deux éléments doivent être ôtées l'une de l'autre, et que celle de l'élément qui est le plus

près de A produit l'action la plus forte. Observant que pour avoir l'action du plus éloigné, il faut remplacer u et r par $u+\delta u$ et $r+\delta r$, on trouve

$$C=\int\frac{u^2\,d\varphi}{r^{n+1}}-\int\frac{(u+\delta u)^2\,d\varphi}{(r+\delta r)^{n+1}},$$

ces deux intégrales étant prises entre les deux valeurs de φ relatives aux points extrêmes L, L' entre lesquels est compris le circuit.

La différence de ces deux intégrales pouvant être considérée comme la variation de la première prise en signe contraire, lorsqu'on néglige toutes les puissances des dimensions du circuit dont les exposants surpassent l'unité, il vient

$$C=-\delta\int\frac{u^2\,d\varphi}{r^{n+1}}=\int\left[\frac{(n+1)u^2\,\delta r}{r^{n+2}}-\frac{2\,u\,\delta u}{r^{n+1}}\right]d\varphi.$$

Or

$$r^2=u^2+z^2,$$

d'où

$$\delta r=\frac{u\,\delta u+z\,\delta z}{r};$$

d'ailleurs l'angle ZAE étant égal à ζ, on a

$$AG=\frac{q}{\cos.\zeta},\ GH=z-\frac{q}{\cos.\zeta},$$

et, à cause des triangles semblables MHG, MSN,

$$MH:MS::GH:NS,$$

c'est-à-dire

$$u:\delta u::z-\frac{q}{\cos.\zeta}:\delta z;$$

en tirant de cette proportion la valeur de δz et la reportant dans celle de δr, on obtient

$$\delta z=\frac{z\cos.\zeta-q}{u\cos.\zeta}\,\delta u,\ \delta r=\frac{(u^2+z^2)\cos.\zeta-qz}{ur\cos.\zeta}\,\delta u=\frac{r^2\cos.\zeta-qz}{ur\cos.\zeta}\,\delta u,$$

et en substituant cette valeur dans celle de C, il vient

$$C = \int \left[\frac{(n+1)(r^2 \cos.\xi - qz)}{r^{n+3} \cos.\zeta} - \frac{2}{r^{n+1}} \right] u \, \delta u \, d\varphi$$

$$= \int \left[\frac{n-1}{r^{n+1}} - \frac{(n+1) qz}{r^{n+3} \cos.\zeta} \right] u \, \delta u \, d\varphi.$$

Le circuit étant très-petit, on peut regarder les valeurs de r et de z comme constantes et égales par exemple à celles qui se rapportent au centre de gravité de l'aire du circuit, afin que les termes du troisième ordre s'évanouissent, en représentant ces valeurs par l et $z_{\prime}$, l'intégrale précédente prendra cette forme

$$C = \left[\frac{n-1}{l^{n+1}} - \frac{(n+1) qz_{\prime}}{l^{n+3} \cos.\zeta} \right] \int u \, d\varphi \, \delta u.$$

Mais $u \, d\varphi$ est l'arc PK décrit de A comme centre avec le rayon u et $PQ = \delta u$; donc $u \, d\varphi \, \delta u$ est l'aire infiniment petite $PQqp$, et l'intégrale $\int u \, d\varphi \, du$ exprime l'aire totale de la projection du circuit, c'est-à-dire $\lambda \cos.\zeta$, puisque ζ est l'angle du plan du circuit avec le plan des xy; on aura donc enfin

$$C = \left[\frac{(n-1) \cos.\zeta}{l^{n+1}} - \frac{(n+1) qz_{\prime}}{l^{n+3}} \right] \lambda.$$

On obtiendra des valeurs analogues pour B et A, savoir :

$$B = \left[\frac{(n-1) \cos.\eta}{l^{n+1}} - \frac{(n+1) qy_{\prime}}{l^{n+3}} \right] \lambda,$$

$$A = \left[\frac{(n-1) \cos.\xi}{l^{n+1}} - \frac{(n+1) qx_{\prime}}{l^{n+3}} \right] \lambda.$$

On connaîtra ainsi les angles que la directrice fait avec les axes, puisqu'on a pour leurs cosinus $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, en faisant

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Quant à la force produite par l'action du circuit sur l'élément situé à l'origine, elle aura, comme on l'a vu plus haut, pour expression $\frac{1}{2} ii' ds' D \sin. \varepsilon$, ε étant l'angle que fait cet élément avec la directrice, à laquelle cette force est perpendiculaire ainsi qu'à la direction de l'élément.

Dans le cas où le petit circuit que l'on considère est dans le même plan que l'élément ds' sur lequel il agit, on a, en prenant ce plan pour celui des xy,

$$q = 0, \cos. \zeta = 1, \cos. \eta = 0, \cos. \xi = 0,$$

et par suite

$$A = 0, B = 0, C = \frac{n-1}{l^{n+1}} \lambda;$$

D se réduit alors à C; ε est égal à $\frac{\pi}{2}$, et l'action du circuit sur l'élément ds devient

$$\frac{n-1}{2} \cdot \frac{ii ds' \lambda}{l^{n+1}}.$$

Je vais maintenant exposer une nouvelle manière de considérer l'action des circuits plans d'une forme et d'une grandeur quelconque.

Soit un circuit plan quelconque M N m (fig. 16); partageons sa surface en éléments infiniment petits par des droites parallèles coupées par un second système de parallèles faisant des angles droits avec les premières, et imaginons autour de chacune de ces aires infiniment petites des courants dirigés dans le même sens que le courant M N m. Toutes les parties de ces courants qui se trouveront suivant ces lignes droites, seront détruites, parce qu'il y en aura deux de signes contraires

qui parcourront la même droite; et il ne restera que les parties curvilignes de ces courants, telles que MM', mm', qui formeront le circuit total MNm.

Il suit de là que les trois intégrales A, B, C s'obtiendront pour le circuit plan d'une grandeur finie, en substituant dans les valeurs que nous venons d'obtenir pour ces trois quantités, à la place de λ un élément quelconque de l'aire du circuit que nous pouvons représenter par $d^2\lambda$ et intégrant dans toute l'étendue de cette aire.

Lorsque, par exemple, l'élément est situé dans le même plan que le circuit, et qu'on prend ce plan pour celui des xy, on a

$$A=0,\ B=0,\ C=(n-1)\iint\frac{d^2\lambda}{l^{n+1}},$$

et la valeur de la force devient

$$\frac{n-1}{2}ii'ds'\iint\frac{d^2\lambda}{l^{n+1}};$$

d'où il suit que, si à chacun des points de l'aire du circuit on élève une perpendiculaire égale à $\frac{1}{l^{n+1}}$, le volume du prisme qui aura pour base le circuit et qui sera terminé à la surface formée par les extrémités de ces perpendiculaires, représentera la valeur de $\iint\frac{d^2\lambda}{l^{n+2}}$; et ce volume multiplié par $\frac{n-1}{2}ii'ds'$ exprimera l'action cherchée.

Il est bon d'observer que la question étant ramenée à la cubature d'un solide, on pourra adopter le système de coordonnées, et la division de l'aire du circuit en éléments qui conduiront aux calculs les plus simples.

Passons à l'action mutuelle de deux circuits très-petits

O et O′ (fig. 18) situés dans un même plan. Soit MN un élément ds' quelconque du second. L'action du circuit O sur ds' est, d'après ce qui précède,

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{ii'\mathrm{d}s'\lambda\,\mathrm{d}\varphi}{r^{n+1}}.$$

Nommant dφ l'angle MNO, et décrivant l'arc MP entre les côtés de cet angle, on pourra remplacer le petit courant MN par les deux courants MP, NP dont les longueurs sont respectivement $r\mathrm{d}\varphi$ et dr; l'action du circuit O sur l'élément MP, qui est normale à sa direction, s'obtiendra en remplaçant dans l'expression précédente ds' par MP, et sera

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{ii'\lambda\,\mathrm{d}\varphi}{r^{n}};$$

l'action sur NP, perpendiculaire à sa direction, sera de même

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{ii'\lambda\,\mathrm{d}r}{r^{n+1}}.$$

Cette dernière intégrée dans toute l'étendue du circuit fermé O′ est nulle, il suffit de considérer la première qui est dirigée vers le point O, d'où il résulte déjà que l'action des deux petits circuits est dirigée suivant la droite qui les joint.

Prolongeons les rayons OM, ON jusqu'à ce qu'ils rencontrent la courbe en M′ et N′; l'action de M′N′ devra être retranchée de celle de MN, et l'action résultante s'obtiendra en prenant comme précédemment la variation de celle de MN en signe contraire, ce qui donne

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{ii'\lambda\,\mathrm{d}\varphi\,\delta r}{r^{n+1}} \quad\text{ou}\quad \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{ii'\lambda r\,\mathrm{d}\varphi\,\delta r}{r^{n+2}}.$$

Or, $r\mathrm{d}\varphi\,\delta r$ est la mesure du segment infiniment petit MNN′M′

Faisant la somme de toutes les expressions analogues relatives aux différents éléments du circuit O', et considérant r comme constant et égal à la distance des centres de gravité des aires λ et λ' des deux circuits, on aura pour l'action qu'ils exercent l'un sur l'autre

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{ii'\lambda\lambda'}{r^{n+2}},$$

et cette action sera dirigée suivant la droite OO'. Il résulte de là que l'on obtiendra l'action mutuelle de deux circuits finis situés dans un même plan, en considérant leurs aires comme partagées en éléments infiniment petits dans tous les sens, et supposant que ces éléments agissent l'un sur l'autre suivant la droite qui les joint, en raison directe de leurs surfaces et en raison inverse de la puissance $n+2$ de leur distance.

L'action mutuelle des courants fermés n'étant plus alors fonction que de la distance, on en tire cette conséquence importante, qu'il ne peut jamais résulter de cette action un mouvement de rotation continue.

La formule que nous venons de trouver pour ramener l'action mutuelle de deux circuits fermés et plans à celles des éléments des aires de ces circuits, conduit à la détermination de la valeur de n. En effet, si l'on considère deux systèmes semblables composés de deux circuits fermés et plans, les éléments semblables de leurs aires seront proportionnels aux carrés des lignes homologues, et les distances de ces éléments seront proportionnelles aux premières puissances de ces mêmes lignes. Appelant m le rapport des lignes homologues des deux systèmes, les actions de deux éléments du premier système et de leurs correspondants du second se-

ront respectivement

$$\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^{n+2}} \text{ et } \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{ii'\lambda\lambda'm^4}{r^{n+2}m^{n+2}};$$

leur rapport, et par suite celui des actions totales, sera donc m^{2-n}. Or, nous avons décrit précédemment une expérience par laquelle on peut prouver directement que ces deux actions sont égales; il faut donc que $n=2$, et, en vertu de l'équation $1-n-2k=0$, que $k=-\frac{1}{2}$. Ces valeurs de n et de k réduisent à une forme très-simple l'expression

$$-\frac{1+k}{ii'}r^{1-n-k}\frac{d^2(r^{1+k})}{ds\,ds'}$$

de l'action mutuelle de ds et de ds'; cette expression devient

$$-\frac{2ii'}{\sqrt{r}}\cdot\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}ds\,ds'.$$

Il suit aussi de ce que $n=2$, que dans le cas où les directions des deux éléments restent les mêmes, cette action est en raison inverse du carré de leur distance. On sait que M. de La Place a établi la même loi, d'après une expérience de M. Biot, lorsqu'il s'agit de l'action mutuelle d'un élément de conducteur voltaïque et d'une molécule magnétique : mais ce résultat ne pouvait être étendu à l'action de deux éléments de conducteurs, qu'en admettant que l'action des aimants est due à des courants électriques; tandis que la démonstration expérimentale que je viens d'en donner est indépendante de toutes les hypothèses que l'on pourrait faire sur la constitution des aimants.

Soit MON (fig. 17) un circuit formant un secteur dont les côtés comprennent un angle infiniment petit, et cherchons l'action qu'il exerce sur un conducteur rectiligne OS′ passant

par le centre O du secteur, et calculons d'abord celle d'un élément MNQP de l'aire de ce secteur sur un élément M′N′ du conducteur OS′. Faisons $OM=u$, $MP=du$, $OM'=s'$, $MM'=r$, $S'ON=\varepsilon$, $NOM=d\varepsilon$. Le moment de MNQP pour faire tourner M′ autour de O sera, en observant que l'aire MNQP a pour expression $udud\varepsilon$,

$$\frac{1}{2}ii's'ds'\frac{udud\varepsilon}{r^3},$$

et le moment du secteur sur le conducteur s' s'obtiendra en intégrant cette expression par rapport à u et s'.

On a

$$r^2=s'^2+u^2-2us'\cos.\varepsilon,$$

d'où

$$r\frac{dr}{du}=u-s'\cos.\varepsilon,\ r\frac{dr}{ds'}=s'-u\cos.\varepsilon,$$

et, en différenciant une seconde fois,

$$r\frac{d^2r}{duds'}+\frac{dr}{ds'}.\frac{dr}{du}=-\cos.\varepsilon,$$

ou, en substituant à $\frac{dr}{ds'}$ et $\frac{dr}{du}$ leurs valeurs,

$$r\frac{d^2r}{duds'}+\frac{(u-s'\cos.\varepsilon)(s'-u\cos.\varepsilon)}{r^2}=-\cos.\varepsilon,$$

ce qui devient, en effectuant les calculs et réduisant,

$$r\frac{d^2r}{duds'}+\frac{us'\sin.^2\varepsilon}{r^2}=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{us'}{r^3}=-\frac{1}{\sin.^2\varepsilon}.\frac{d^2r}{duds'};$$

substituant cette valeur dans le moment élémentaire, on a

pour l'expression du moment total

$$\frac{1}{2} ii' \mathrm{d}\varepsilon \iint \frac{u s' \mathrm{d}u \mathrm{d}s'}{r^3} = -\frac{1}{2} ii' \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\sin.^2\varepsilon} \iint \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}u \mathrm{d}s'} \mathrm{d}u \mathrm{d}s'.$$

En considérant la portion $L'L''$ du courant s', et la portion $L_1 L_2$ du secteur, et en faisant $L'L_1 = r_1'$, $L''L_1 = r_1''$, $L'L_2 = r_2'$, $L''L_2 = r_2''$, la valeur de cette intégrale est évidemment

$$\frac{1}{2} ii' \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\sin.^2\varepsilon} (r_2' + r_1'' - r_2'' - r_1').$$

Lorsque c'est à partir du centre O que commencent le secteur et le conducteur s', la distance $r'_1 = 0$; et si l'on fait $OL_2 = a$, $OL'' = b$, $L''L_2 = r$, on trouve que leur action mutuelle est exprimée par

$$\frac{1}{2} ii' \frac{d\varepsilon}{\sin.^2\varepsilon} \left(a + b - r\right).$$

Quand le conducteur $L'L''$ (fig. 19) a pour milieu le centre L_1 du secteur, et que sa longueur est double du rayon a de ce secteur, on a $a = b$, et en faisant $L'L_1 L_2 = 2\theta = \pi - \varepsilon$,

$$r_1' = r_1'' = a, r_2' = 2a \sin.\theta, r_2'' = 2a \cos.\theta, \mathrm{d}\varepsilon = -2\mathrm{d}\theta,$$

en sorte que la valeur du moment de rotation devient

$$a ii' \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\sin.^2\varepsilon} (\sin.\theta - \cos.\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a ii' \mathrm{d}\theta (\cos.\theta - \sin.\theta)}{\sin.^2\theta \cos.^2\theta},$$

On peut déduire de ce résultat une manière de vérifier ma formule au moyen d'un instrument dont je vais donner la description.

Aux deux points a, a' (fig. 20) de la table mn s'élèvent deux supports ab, $a'b'$ dont les parties supérieures cb, $c'b'$ sont isolantes; ils soutiennent une lame de cuivre $\mathrm{H}de\mathrm{H}'d'e'$

pliée en deux suivant la droite H H′, et qui est terminée par deux coupes H et H′ où l'on met du mercure. Aux points A, C, A′C′, de la table sont quatre cavités remplies de même de mercure. De A part un conducteur en cuivre AEFGSRQ, soutenu par HH′ et terminé par une coupe Q; de A′ il en part un second A′E′F′G′S′R′Q′ symétrique au premier; ils sont tous les deux entourés de soie, pour être isolés l'un de l'autre et du conducteur H H′. Dans la coupe Q plonge la pointe d'un conducteur mobile QPONMLKIH revenant sur lui-même de K en I, et ayant dans cette partie ses deux branches PO, KI entourées de soie; il est terminé par une seconde pointe plongée dans la coupe H; NML forme une demi-circonférence dont LN est le diamètre, et K le centre; la tige PK*p* est verticale, et terminée en *p* par une pointe retenue par trois cercles horizontaux B, D, T qui peuvent tourner autour de leurs centres et sont destinés à diminuer le frottement.

XY est une tablette fixe qui reçoit dans une rainure un conducteur VU*ifkhgo*ZC revenant sur lui-même de *g* en *o* et doublé de soie dans cette partie; *ifkhg* est un secteur de cercle qui a pour centre le point *k*; les parties U*i* et *go* sont rectilignes; elles traversent en *x* le support *ab*, dans lequel on a pratiqué une ouverture à cet effet, et se séparent en *o* pour aller se plonger respectivement dans les cavités A et C. A droite de F G se trouve un assemblage de conducteurs fixes et mobile parfaitement semblable à celui que nous venons de décrire, et lorsqu'on plonge le rhéophore positif de la pile en C, et le négatif en C′, le courant électrique parcourt les conducteurs CZ*oghkfi*UV, AEFGSRQ; de là il passe dans le conducteur mobile QPONMLKIH, et se rend en H′ par HH′; il parcourt ensuite le conducteur mobile sy-

métrique H′I′K′L′M′N′O′P′Q′, arrive en Q′, suit le conducteur Q′R′S′G′F′E′A′ qui le conduit dans la cavité A′, d'où il se rend en C′ par le conducteur V′U′$i'f'k'h'g'o'$Z′C′, et de là dans le rhéophore négatif.

Le courant allant dans la direction LN dans le diamètre LN, et de h en k, puis de k en f, dans les rayons hk, kf, il y a répulsion entre ces rayons et le diamètre; de plus, le circuit fermé $ghkfi$ ne produisant aucune action sur le demi-cercle LMN dont le centre se trouve dans l'axe fixe pH, le conducteur mobile ne peut être mis en mouvement que par l'action du secteur $ghkfi$ sur le diamètre LN, vu que dans toutes les autres parties de l'appareil passent deux courants opposés dont les actions se détruisent. L'équilibre aura lieu quand le diamètre LN fera des angles égaux avec les rayons kf, kh; et si on l'écarte de cette position, il oscillera par l'action seule du seteur $ghkfi$ sur ce diamètre.

Soit 2η l'angle au centre du secteur, on aura dans la position d'équilibre

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + \eta \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \eta,$$

d'où l'on conclut

$$\cos.\theta - \sin.\theta = \cos.\theta - \cos.\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\sin.\frac{\pi}{4}\sin.\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$
$$= -\sqrt{2}\sin.\frac{1}{2}\eta,$$

et

$$\sin.\theta\cos.\theta = \frac{1}{2}\sin.2\theta = \frac{1}{2}\cos.\eta;$$

Mais il est aisé de voir que quand on déplace, de sa position d'équilibre, le conducteur L′L″ d'une quantité égale à $2d\theta$, le moment des forces qui tendent à l'y ramener se compose de

ceux que produisent deux petits secteurs dont l'angle est égal à ce déplacement, et dont les actions sont égales, moment dont la valeur, d'après ce que nous avons vu tout à l'heure, est

$$\frac{1}{2}\frac{aii'(\cos.\theta-\sin.\theta)}{\sin.^2\theta\cos.^2\theta}d\theta = -\frac{2aii'\sqrt{2}\sin.\frac{1}{2}\eta}{\cos.^2\eta}d\theta.$$

D'où il suit que les durées des oscillations seront, pour le même diamètre, proportionnelles à

$$\frac{\sqrt{\sin.\frac{1}{2}\eta}}{\cos.\eta}.$$

Faisant donc simultanément osciller les conducteurs mobiles dans les deux parties symétriques de l'appareil, en supposant les angles des secteurs différents, on aura des courants de même intensité, et on observera si les nombres d'oscillations faites dans un même temps, sont proportionnels aux deux expressions

$$\frac{\sqrt{\sin.\frac{1}{2}\eta}}{\cos.\eta} \text{ et } \frac{\sqrt{\sin.\frac{1}{2}\eta'}}{\cos.\eta'};$$

en appelant 2η et $2\eta'$ les angles au centre des deux secteurs.

Nous allons maintenant examiner l'action mutuelle de deux conducteurs rectilignes; et rappelons-nous d'abord qu'en nommant β l'angle compris entre la direction de l'élément ds' et celle de la droite r, la valeur de l'action que les deux éléments de courants électriques ds et ds' exercent l'un sur l'autre a déja été mise sous la forme

$$ii'ds'r^k d(r^k\cos.\beta),$$

en la multipliant et la divisant par $\cos.\beta$, et en faisant attention que $k=-\frac{1}{2}$ donne $r^{2k}=\frac{1}{r}$, nous verrons qu'on peut

l'écrire ainsi :

$$\frac{ii'\,\mathrm{d}s'}{\cos.\beta}\, r^k \cos.\beta\, \mathrm{d}\,(r^k \cos.\beta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{ii'\mathrm{d}s'}{\cos.\beta}\,\mathrm{d}\left(\frac{\cos.^2\beta}{r}\right),$$

d'où il nous sera facile de conclure que la composante de cette action suivant la tangente à l'élément $\mathrm{d}s'$, est égale à

$$\frac{1}{2}\, ii'\mathrm{d}s'\,\mathrm{d}\left(\frac{\cos.^2\beta}{r}\right),$$

et que la composante normale au même élément, l'est à

$$\frac{1}{2}\, ii'\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{tang.}\,\beta\,\mathrm{d}\left(\frac{\cos.^2\beta}{r}\right),$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\, ii'\mathrm{d}s'\left[\mathrm{d}\left(\frac{\sin.\beta\cos.\beta}{r}\right) - \frac{\mathrm{d}\beta}{r}\right].$$

Ces valeurs des deux composantes se trouvent à la page 331 de mon Recueil d'Observations électro-dynamiques, publié en 1822.

Appliquons la dernière au cas de deux courants rectilignes parallèles, situés à une distance a l'un de l'autre.

On a alors

$$r = \frac{a}{\sin.\beta},$$

et la composante normale devient

$$\frac{1}{2}\, ii'\mathrm{d}s'\left[\frac{\mathrm{d}(\sin.^2\beta\cos.\beta)}{a} - \frac{\sin.\beta\,\mathrm{d}\beta}{a}\right].$$

Soit M′ (fig. 21) un point quelconque du courant qui parcourt la droite $L_1 L_2$; et β', β'' les angles $L' M' L_2$, $L'' M' L_2$ formés avec

L_1L_2 par les rayons vecteurs extrêmes $M'L'$, $M'L''$; on aura l'action de ds' sur $L'L''$ en intégrant l'expression précédente entre les limites β', β'', ce qui donne

$$\frac{1}{2a} ii'ds'(\sin.^2\beta''\cos.\beta'' + \cos.\beta'' - \sin.^2\beta'\cos.\beta' - \cos.\beta');$$

mais on a à chaque limite, en y représentant les valeurs de s par b' et b'',

$$s' = b'' - a\cot.\beta'' = b' - a\cot.\beta', ds' = \frac{a\,d\beta''}{\sin.^2\beta''} = \frac{a\,d\beta'}{\sin.^2\beta'};$$

en substituant ces valeurs et intégrant de nouveau entre les limites β_1', β_2' et β_1'', β_2'', on a pour la valeur de la force cherchée,

$$\frac{1}{2} ii'\left(\sin.\beta_2'' - \sin.\beta_1'' - \sin.\beta_2' + \sin.\beta_1' - \frac{1}{\sin.\beta_2''} + \frac{1}{\sin.\beta_1''} + \frac{1}{\sin.\beta_2'} - \frac{1}{\sin.\beta_1'}\right),$$

ou

$$\frac{1}{2} ii'\left(\frac{a}{r_2''} - \frac{a}{r_1''} - \frac{a}{r_2'} + \frac{a}{r_1'}\right) + \frac{r_1'' + r_2' - r_2'' - r_1'}{a}.$$

Si les deux conducteurs sont de même longueur et perpendiculaires aux droites qui en joignent les deux extrémités d'un même côté, on a

$$r_1' = r_2'' = a, \quad \text{et} \quad r_2' = r_1'' = c,$$

en nommant c la diagonale du rectangle formé par ces deux droites et les deux directions des courants, l'expression précédente devient alors

$$ii'\left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c}\right) = \frac{ii'l^2}{ac};$$

en nommant l la longueur des conducteurs, et quand ce rectangle devient un carré, on a $\frac{ii'}{\sqrt{2}}$ pour la valeur de la force; enfin, si l'on suppose l'un des conducteurs indéfini dans les deux sens, et que l soit la longue de l'autre, les termes où r_1', r_2', r_1'', r_2'' se trouvent au dénominateur disparaîtront; on aura

$$r_2' + r_1'' - r_2'' - r_1' = 2l,$$

et l'expression de la force deviendra

$$\frac{ii'l}{a},$$

qui se réduit à ii' quand la longueur l est égale à la distance a.

Quant à l'action de deux courants parallèlement à la direction de s', elle peut s'obtenir quelle que soit la forme du courant s. En effet la composante suivant à ds' étant

$$\frac{1}{2} ii' ds' d\left(\frac{\cos.^2 \beta}{r}\right),$$

l'action totale qu'exerce ds' dans cette direction sur le courant L'L'' (fig. 21) a pour valeur

$$\frac{1}{2} ii' ds' \left(\frac{\cos.^2 \beta''}{r''} - \frac{\cos.^2 \beta'}{r'}\right),$$

et il est remarquable qu'elle ne dépend que de la situation des extrémités L', L'' du conducteur s; elle est donc la même, quelle que soit la forme de ce conducteur, qui peut être plié suivant une ligne quelconque.

Si l'on nomme a' et a'' les perpendiculaires abaissées des

deux extrémités de la portion de conducteur L′ L″ que l'on considère comme mobile, sur le conducteur rectiligne dont il s'agit de calculer l'action parallèlement à sa direction, on aura

$$r'' = \frac{a''}{\sin.\beta''},\ r' = \frac{a'}{\sin.\beta'},$$

$$ds' = -\frac{dr''}{\cos.\beta''} = \frac{a''\,d\beta''}{\sin.^2\beta''} = -\frac{dr'}{\cos.\beta'} = \frac{a'\,d\beta'}{\sin.^2\beta'},$$

et par conséquent

$$\frac{ds'}{r''} = \frac{d\beta''}{\sin.\beta''},\ \frac{ds'}{r'} = \frac{d\beta'}{\sin.\beta'},$$

d'où il est aisé de conclure que l'intégrale cherchée est

$$-\frac{1}{2}ii'\int\left(\frac{\cos.^2\beta''\,d\beta''}{\sin.\beta''} - \frac{\cos.^2\beta'\,d\beta'}{\sin.\beta'}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}ii'\left(1\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta''}{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta'} + \cos.\beta'' - \cos.\beta' + C\right).$$

Il faudra prendre cette intégrale entre les limites déterminées par les deux extrémités du conducteur rectiligne; en nommant β_1', β_2' et β_1'', β_2'' les valeurs de β' et de β'' relatives à ces limites, on a sur-le-champ celle de la force exercée par le conducteur rectiligne, et cette dernière valeur ne dépend évidemment que des quatre angles β_1', β_1'', β_2', β_2''.

Lorsqu'on veut la valeur de cette force pour le cas où le conducteur rectiligne s'étend indéfiniment dans les deux sens, il faut faire $\beta_1' = \beta_1'' = 0$, et $\beta_2' = \beta_2'' = \pi$: il semble, au premier coup d'œil, qu'elle devient nulle, ce qui serait contraire à l'expérience; mais on voit aisément que la partie de l'intégrale où entrent les cosinus de ces quatre angles est la

seule qui s'évanouisse dans ce cas, et que le reste de l'intégrale

$$\frac{1}{2}ii'\left(\mathrm{l}\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_1''}{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_1'}-\mathrm{l}\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_2''}{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_2'}\right)$$

$$=\frac{1}{2}ii'\,\mathrm{l}\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_1''\,\text{cot.}\frac{1}{2}\beta_2''}{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_1'\,\text{cot.}\frac{1}{2}\beta_2'}$$

devient, à cause qu'on a $\beta_2''=\pi-\beta_1''$ et $\beta_2'=\pi-\beta_1'$;

$$\frac{1}{2}ii'\,\mathrm{l}\frac{\text{tang.}^2\frac{1}{2}\beta_1''}{\text{tang.}^2\frac{1}{2}\beta_1'}=ii'\,\mathrm{l}\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_1''}{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_1'}=ii'\,\mathrm{l}\frac{a''}{a'}.$$

Cette valeur montre que la force cherchée ne dépend alors que du rapport des deux perpendiculaires a' et a', abaissées sur le conducteur rectiligne indéfini des deux extrémités de la portion de conducteur sur lequel il agit; qu'elle est encore indépendante de la forme de cette portion, et ne devient nulle, comme cela doit être, que quand les deux perpendiculaires sont égales entre elles.

Pour avoir la distance de cette force au conducteur rectiligne, dont la direction est parallèle à la sienne, il faut multiplier chacune des forces élémentaires dont elle se compose par sa distance au conducteur, et intégrer le résultat par rapport aux mêmes limites; on aura ainsi le moment qu'il faudra diviser par la force pour avoir la distance cherchée.

On trouve aisément, d'après les valeurs ci-dessus, que le moment élémentaire a pour valeur

$$\frac{1}{2}ii'\,\mathrm{d}s'r\,\text{sin.}\,\beta\,\mathrm{d}\frac{\text{cos.}^2\beta}{r}.$$

Cette valeur ne peut s'intégrer que quand on y a substitué à l'une des variables r ou β sa valeur en fonction de l'autre, tirée des équations qui déterminent la forme de la portion

mobile de conducteur; elle devient très-simple quand cette portion se trouve sur une droite élevée par un point quelconque du conducteur rectiligne que l'on considère comme fixe, perpendiculairement à sa direction, parce qu'en prenant ce point pour l'origine des s', on a

$$r = -\frac{s'}{\cos.\beta},$$

et que s' est une constante relativement à la différentielle

$$d\,\frac{\cos.^2\beta}{r}.$$

La valeur du moment élémentaire devient donc

$$\frac{1}{2}\,ii'\,ds'\,\frac{\sin.\beta}{\cos.\beta}\,d(\cos.^3\beta) = -\frac{3}{2}\,ii'\,ds'\sin.^2\beta\cos.\beta\,d\beta,$$

dont l'intégrale entre les limites β'' et β' est

$$-\frac{1}{2}\,ii'ds'(\sin.^3\beta'' - \sin.^3\beta').$$

En remplaçant ds' par les valeurs de cette différentielle trouvées plus haut, et en intégrant de nouveau, on a, entre les limites déterminées du conducteur rectiligne,

$$\frac{1}{2}\,ii'\,[a''(\cos.\beta_2'' - \cos.\beta_1'') - a'(\cos.\beta_2' - \cos.\beta_1')].$$

Si l'on suppose que le conducteur s'étende indéfiniment dans les deux sens, il faudra donner à $\beta_1', \beta_1'', \beta_2', \beta_2''$, les valeurs que nous leur avons déja assignées dans ce cas, et on aura

$$-ii'(a'' - a')$$

pour la valeur du moment cherché, qui sera, par consé-

31.

quent, proportionnel à la longueur $a''-a'$ du conducteur mobile, et ne changera point tant que cette longueur restera la même, quelles que soient d'ailleurs les distances des extrémités de ce dernier conducteur à celui qui est considéré comme fixe.

Calculons maintenant l'action exercée par un arc de courbe quelconque NM pour faire tourner un arc de cercle L_1L_2 autour de son centre.

Soit M′ (fig. 23) le milieu d'un élément quelconque ds' de l'arc L_1L_2, et a le rayon du cercle. Le moment d'un élément ds de NM pour faire tourner ds' autour du centre O s'obtient en multipliant la composante tangente en M′ par sa distance a au point fixe; ce qui donne

$$\frac{1}{2}aii'ds'\,d\frac{\cos.^2\beta}{r}.$$

Nommant β', β'' et r', r'' les valeurs de β et r relatives aux limites M et N, on a pour le moment de rotation de ds'

$$\frac{1}{2}aii'ds'\left(\frac{\cos.^2\beta''}{r''}-\frac{\cos.^2\beta'}{r'}\right),$$

résultat qui ne dépend que de la situation des extrémités M et N.

Nous achèverons le calcul en supposant que la ligne MN soit un diamètre L′L″ du même cercle.

Nommons 2θ l'angle M′OL′; M′T′ étant la tangente en M′, les angles L′M′T′, L″M′T′ seront respectivement β' et β'', et l'on aura évidemment

$$\cos.\beta'=-\cos.\theta,\cos.\beta''=\sin.\theta, r'=2a\sin.\theta, r''=2a\cos.\theta.$$

L'action du diamètre L′L″ pour faire tourner l'élément situé

en M′ sera donc

$$\frac{1}{4} ii' \mathrm{d}s' \left(\frac{\sin.^2\theta}{\cos.\theta} - \frac{\cos.^2\theta}{\sin.\theta}\right).$$

Lorsqu'on prend un point quelconque A de la circonférence pour origine des arcs, et qu'on fait AL′=C, on a

$$s' = \mathrm{C} + 2a\theta \text{ et } \mathrm{d}s' = 2a\mathrm{d}\theta,$$

ce qui change l'expression précédente en

$$\frac{1}{2} a ii' \left(\frac{\sin.^2\theta \mathrm{d}\theta}{\cos.\theta} - \frac{\cos.^2\theta \mathrm{d}\theta}{\sin.\theta}\right),$$

qu'il faut intégrer dans toute l'étendue de l'arc L_1L_2 pour avoir le moment de rotation de cet arc autour de son centre.

Or on a

$$\int \frac{\sin.^2\theta \mathrm{d}\theta}{\cos.\theta} = \mathrm{l\,tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\theta\right) - \sin.\theta + \mathrm{C}_1,$$
$$\int \frac{\cos.^2\theta \mathrm{d}\theta}{\sin.\theta} = \mathrm{l\,tang.}\,\frac{1}{2}\theta + \cos.\theta + \mathrm{C}':$$

si donc on appelle $2\theta_1$ et $2\theta_2$ les angles $L'OL_1$ et $L'OL_2$ le moment total de l'arc L_1L_2 sera

$$\frac{a}{2} ii' \left\{ \mathrm{l}\,\frac{\mathrm{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\theta_2\right) \mathrm{tang.}\,\frac{1}{2}\theta_1}{\mathrm{tang.}\,\frac{1}{2}\theta_2\,\mathrm{tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\theta_1\right)} - \sin.\theta_2 - \cos.\theta_2 + \sin.\theta_1 + \cos.\theta_1 \right\}$$

Cette expression, changée de signe, donne la valeur du moment de rotation du diamètre L′L″ dû à l'action de l'arc L_1L_2.

Dans un appareil que j'ai décrit précédemment, un conducteur qui a la forme d'un secteur circulaire, agit sur un autre conducteur composé d'un diamètre et d'une demi-circonférence qui est mobile autour d'un axe passant par le

centre de cette demi-circonférence et perpendiculaire à son plan. L'action qu'elle éprouve de la part du secteur est détruite par la résistance de l'axe, puisque le contour que forme le secteur est fermé; il ne reste donc que l'action sur le diamètre. Nous avons déja calculé celle de l'arc, il ne nous reste donc plus qu'à obtenir celles des rayons de ce secteur sur le même diamètre.

Pour les déterminer, nous allons chercher le moment de rotation qui résulte de l'action mutuelle de deux courants rectilignes situés dans le même plan, et qui tend à les faire tourner en sens contraire autour du point de rencontre de leurs directions.

La composante normale à l'élément ds' situé en M' (fig. 24), est, comme nous l'avons vu précédemment,

$$\frac{1}{2} ii' ds' \left(d \frac{\sin.\beta \cos.\beta}{r} - \frac{d\beta}{r}\right).$$

Le moment de ds pour faire tourner ds' autour de O, s'obtiendra en multipliant cette force par s'; on aura donc, en nommant M le moment total,

$$\frac{d^2 M}{ds\, ds'} ds\, ds' = \frac{1}{2} ii' s' ds' \left(d \frac{\sin.\beta \cos.\beta}{r} - \frac{d\beta}{r}\right),$$

d'où, en intégrant par rapport à s,

$$\frac{dM}{ds'} ds' = \frac{1}{2} ii' s' ds' \left(\frac{\sin.\beta \cos.\beta}{r} - \int \frac{d\beta}{r}\right).$$

Mais, d'après la manière dont les angles ont été pris dans le calcul de la formule qui représente l'action mutuelle de deux éléments de conducteurs voltaïques, l'angle $\text{MM'L}_2 = \beta$ est extérieur au triangle OMM'; et, en nommant ε l'angle MOM' compris entre les directions des deux courants, on trouve que le troisième angle OMM' est égal à $\beta - \varepsilon$, ce qui donne

$$r = \frac{s' \sin. \varepsilon}{\sin. (\beta - \varepsilon)},$$

on a donc

$$\frac{dM}{ds'} ds' = \frac{1}{2} ii' \frac{ds'}{\sin. \varepsilon} [\cos. \beta \sin. \beta \sin. (\beta - \varepsilon) + \cos. (\beta - \varepsilon) + C].$$

En remplaçant dans cette valeur cos. $(\beta - \varepsilon)$ par

$$\cos.^2 \beta \cos. (\beta - \varepsilon) + \sin.^2 \beta \cos. (\beta - \varepsilon),$$

on voit aisément qu'elle se réduit à

$$\frac{dM}{ds'} ds' = \frac{1}{2} ii' \frac{ds'}{\sin. \varepsilon} [\cos. \varepsilon \cos. \beta + \sin.^2 \beta \cos. (\beta - \varepsilon) + C]$$

qu'il faut prendre entre les limites β' et β''; on a ainsi la différence de deux fonctions de même forme, l'une de β'', l'autre de β', qu'il s'agit d'intégrer de nouveau pour avoir le moment de rotation cherché : il suffit de faire cette seconde intégration sur une seule de ces deux quantités : soit donc a'' la distance OL'' qui répond à β'', on a, dans le triangle OM'L'',

$$s' = \frac{a'' \sin. (\beta'' - \varepsilon)}{\sin. \beta''} = a'' \cos. \varepsilon - a'' \sin. \varepsilon \cot. \beta'', ds' = \frac{a'' \sin. r d\beta''}{\sin.^2 \beta''};$$

et la quantité que nous nous proposons d'abord d'intégrer, devient

$$\frac{1}{2} a'' ii' \left[\frac{\cos. \varepsilon \cos. \beta'' d\beta''}{\sin.^2 \beta''} + \cos. (\beta'' - \varepsilon) d\beta''\right],$$

dont l'intégrale prise entre les limites β_1'' et β_2'' est

$$\frac{1}{2} a'' ii' \left[\sin. (\beta_2'' - \varepsilon) - \sin. (\beta_1'' - \varepsilon) - \frac{\cos. \varepsilon}{\sin. \beta_2''} + \frac{\cos. \varepsilon}{\sin. \beta_1''}\right].$$

En désignant par p_2'' et p_2', les perpendiculaires abaissées

du point O sur les distances $L''L_2 = r_2''$, $L''L_1 = r_1''$, on a évidemment

$$a''\sin.(\beta_2''-\varepsilon)=p_2'', a''\sin.(\beta_1''-\varepsilon)=p_1'', \frac{a''}{\sin.\beta_2''}=\frac{r_2''}{\sin.\varepsilon}, \frac{a''}{\sin.\beta_1''}=\frac{r_1''}{\sin.\varepsilon},$$

et l'intégrale précédente devient

$$\frac{1}{2}ii'[p_2''-p_1''-(r_2''-r_1'')\cot.\varepsilon].$$

Si l'on fait attention qu'en désignant la distance OL' par a', on a aussi, dans le triangle OM'L',

$$s'=\frac{a'\sin.(\beta'-\varepsilon)}{\sin.\beta'}=a'\cos.\varepsilon-a'\sin.\varepsilon\cot.\beta', \mathrm{d}s'=\frac{a'\sin.\varepsilon\,\mathrm{d}\beta'}{\sin.^2\beta'},$$

on voit aisément que l'intégrale de l'autre quantité se forme de celle que nous venons d'obtenir, en y changeant p_2'', p_1'', r_2'', r_1'', en p_2', p_1', r_2', r_1'; ce qui donne pour la valeur du moment de rotation qui est la différence des deux intégrales,

$$\frac{1}{2}ii'[p_2''-p_1''-p_2'+p_1'-(r_2''-r_1''-r_2'+r_1')\cot.\varepsilon].$$

Cette valeur se réduit à celle que nous avons trouvée plus haut, dans le cas où l'angle ε est droit, parce qu'alors $\cot.\varepsilon=0$.

Quant on suppose que les deux courants partent du point O, et que leurs longueurs OL'', OL_2 (fig. 24) sont représentées respectivement par a et b, la perpendiculaire OP par p, et la distance $L''L_2$ par r, on a $p_2''=p$, $p_1''=p_2'=p_1'=0$, $r_2''=r$, $r_1''=a$, $r_2'=b$, $r_1'=0$, et

$$\frac{1}{2}ii'[p+(a+b-r)\cot.\varepsilon],$$

pour la valeur que prend alors le moment de rotation.

La quantité $a+b-r$, excès de la somme de deux côtés d'un triangle sur le troisième, est toujours positive : d'où il suit que le moment de rotation est plus grand que la valeur $\frac{1}{2}ii'p$ qu'il prend quand l'angle ε des deux conducteurs est droit, tant que cot. ε est positif, c'est-à-dire tant que cet angle est aigu; mais il devient plus petit quand le même angle est obtus, parce qu'alors cot. ε est négatif. Il est évident d'ailleurs que sa valeur est d'autant plus grande que l'angle ε est plus petit, et qu'elle croît à l'infini comme cot. ε à mesure que ε s'approche de zéro; mais il est bon de montrer qu'il reste toujours positif, quelque voisin que cet angle soit de deux droits.

Il suffit pour cela de faire attention qu'en nommant α l'angle du triangle $OL''L_1$ compris entre les côtés a et r, et β celui qui l'est entre les côtés b et r, on a

$$\cot.\varepsilon=-\cot.(\alpha+\beta), p=a\sin.\alpha=b\sin.\beta, r=a\cos.\alpha+b\cos.\beta,$$

et par conséquent

$$a+b-r=a(1-\cos.\alpha)+b(1-\cos.\beta),$$
$$=p\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\alpha+p\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\beta,$$

et

$$\tfrac{1}{2}ii'[p+(a+b-r)\cot.\varepsilon]=\tfrac{1}{2}ii'p\left(1-\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\alpha+\text{tang.}\frac{1}{2}\beta}{\text{tang.}(\alpha+\beta)}\right),$$

valeur qui reste toujours positive, quelque petits que soient les angles α et β, puisque tang. $(\alpha+\beta)$, pour des angles inférieurs à $\frac{\pi}{4}$, est toujours plus grand que tang. α + tang. β, et à plus forte raison plus que tang. $\frac{1}{2}\alpha$ + tang. $\frac{1}{2}\beta$. Cette valeur

tend évidemment vers la limite $\frac{1}{4}ii'p$ à mesure que les angles α et β s'approchent de zéro; elle s'évanouit avec p quand ces angles deviennent nuls.

Reprenons maintenant la valeur générale du moment de rotation en n'y faisant entrer que les distances $OL''=a''$, $OL'=a'$, et les différents angles, valeur qui est

$$\frac{1}{2}ii'\Big[a''\sin.(\beta_2''-\varepsilon)-a''\sin.(\beta_1''-\varepsilon)-a'\sin.(\beta_2'-\varepsilon)$$
$$+a'\sin.(\beta_1'-\varepsilon)-\frac{a''\cos.\varepsilon}{\sin.\beta_2''}+\frac{a''\cos.\varepsilon}{\sin.\beta_1''}+\frac{a'\cos.\varepsilon}{\sin.\beta_2'}-\frac{a'\cos.\varepsilon}{\sin.\beta_1'}\Big],$$

et appliquons-la au cas où un des conducteurs $L'L''$ (fig. 25) est rectiligne et mobile autour de son milieu L_1, et où l'autre part de ce milieu. En faisant $L'L''=2a$, on a

$$a''=a,\ a'=-a,\ \beta_1'=\pi+\varepsilon,\ \beta_1''=\varepsilon,\ \sin.\beta_1'=-\sin.\beta_1'',$$

et en désignant comme précédemment les perpendiculaires abaissées de L_1 sur $L'L_2$, $L''L_2$, l'expression du moment devient

$$\frac{1}{2}ii'\left(p_2''+p_2'-\frac{a\cos.\varepsilon}{\sin.\beta^{2\prime\prime}}-\frac{a\cos.\varepsilon}{\sin.\beta_2'}\right).$$

Or

$$\sin.\beta_2'':a::\sin.\varepsilon:r_2''\quad\text{et}\quad-\sin.\beta_2':a::\sin.\varepsilon:r_2',$$

et les valeurs de r_2'' et de r_2' tirées de ces proportions et substituées dans l'expression précédente la changent en

$$\frac{1}{2}ii'[p_2''+p_2'+\cot.\varepsilon(r_2'-r_2'')].$$

Lorsqu'on suppose L_1L_2 infini, on a $p_2''=p_2'=a\sin.\varepsilon$, $r_2'-r_2''=2a\cos.\varepsilon$, et cette valeur du moment se réduit à

$$\frac{1}{2}aii'\left(2\sin.\varepsilon+\frac{2\cos.^2\varepsilon}{\sin.\varepsilon}\right)=\frac{aii'}{\sin.\varepsilon};$$

il est donc en raison inverse du sinus de l'angle des deux courants, et proportionnel à la longueur du courant fini.

Quand $L_1L_2 = \frac{1}{2}L'L'' = a$ et qu'on représente l'angle $L'L_1L_2$ par 2θ, on a $p_2'' = a\sin.\theta$, $p_2' = a\cos.\theta$, $r_2' = 2a\sin.\theta$, $r_2'' = 2a\cos.\theta$, $\cot.\varepsilon = -\cot.2\theta$, et le moment devient

$$\frac{1}{2}aii'[\cos.\theta + \sin.\theta + 2\cot.2\theta(\cos.\theta - \sin.\theta)],$$

en remplaçant $2\cot.2\theta$ par sa valeur

$$\frac{1-\text{tang.}^2\theta}{\text{tang.}\theta} = \frac{\cos.^2\theta - \sin.^2\theta}{\sin.\theta\cos.\theta} = \frac{(\cos.\theta + \sin.\theta)(\cos.\theta - \sin.\theta)}{\sin.\theta\cos.\theta},$$

on trouve que celle de ce moment est égale à

$$\frac{1}{2}aii'(\cos.\theta + \sin.\theta)\left[1 + \frac{(\cos.\theta - \sin.\theta)^2}{\sin.\theta\cos.\theta}\right]$$
$$= \frac{1}{2}aii'(\cos.\theta + \sin.\theta)\left(\frac{1}{\sin.\theta\cos.\theta} - 1\right).$$

Pour avoir la somme des actions des deux rayons entre lesquels est compris un secteur infiniment petit dont l'arc est $d\varepsilon$, il faut faire attention que ces deux rayons étant parcourus en sens contraire, cette somme est égale à la différentielle de l'expression précédente; on trouve ainsi qu'elle est représentée par

$$\frac{1}{2}aii'\left[(\cos.\theta - \sin.\theta)\left(\frac{1}{\sin.\theta\cos.\theta} - 1\right) - \frac{(\cos.\theta + \sin.\theta)(\cos.^2\theta - \sin.^2\theta)}{\sin.^2\theta\cos.^2\theta}\right]d\theta$$
$$= \frac{1}{2}aii'(\cos.\theta - \sin.\theta)\left(\frac{1}{\sin.\theta\cos.\theta} - 1 - \frac{(\cos.\theta + \sin.\theta)^2}{\sin.^2\theta\cos.^2\theta}\right)d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}aii'(\cos.\theta - \sin.\theta)\left(\frac{1}{\sin.^2\theta\cos.^2\theta} + \frac{1}{\sin.\theta\cos.\theta} + 1\right)d\theta.$$

Mais l'action de l'arc L_2L_3 sur le diamètre $L'L''$ est égale et

opposée à celle que ce diamètre exerce sur l'arc pour le faire tourner autour de son centre; le moment de cette action, d'après ce que nous venons de voir, est donc égal à

$$\frac{1}{2} a i i' \left(\frac{\cos.^2 \theta}{\sin. \theta} - \frac{\sin.^2 \theta}{\cos. \theta}\right) d\theta = \frac{1}{2} a i i' (\cos. \theta - \sin. \theta) \left(\frac{1}{\sin. \theta \cos. \theta} + 1\right) d\theta;$$

en l'ajoutant au précédent, on a pour celui qui résulte de l'action du secteur infiniment petit sur le diamètre L' L''

$$-\frac{1}{2} a i i' (\cos. \theta - \sin. \theta) \frac{d\theta}{\sin. \theta \cos. \theta}.$$

Cette valeur ne diffère que par le signe de celle que nous avons déja trouvée pour le même moment, différence qui vient évidemment de ce que nous avons tiré cette dernière de la formule relative à l'action d'un très-petit circuit fermé sur un élément où nous avions changé le signe de C pour la rendre positive.

Examinons maintenant l'action que deux courants rectilignes, qui ne sont pas dans un même plan, exercent l'un sur l'autre, soit pour se mouvoir parallèlement à leur commune perpendiculaire, soit pour tourner autour de cette droite.

Soient les deux courants AU, A'U' (fig. 26); AA'$=a$, leur commune perpendiculaire; AV une parallèle à A'U' : l'action de deux éléments situés en M et M', lorsqu'on fait $n=2$ et $h=k-1=-\frac{3}{2}$ dans la formule générale

$$\frac{i i' ds ds'}{r^n} (\cos. \varepsilon + h \cos. \theta \cos. \theta'),$$

devient

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{i i' ds ds' \left(2 \cos. \varepsilon + 3 \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{ds'}\right)}{r^2},$$

à cause de

$$\cos. \theta = \frac{dr}{ds}, \ \cos. \theta' = -\frac{dr}{ds'};$$

mais en faisant $AM=s$, $A'M'=s'$, $VAU=\varepsilon$, on a

$$r^2=a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon,$$

d'où

$$r\frac{dr}{ds}=s-s'\cos.\varepsilon, r\frac{dr}{ds'}=s'-s\cos.\varepsilon, r\frac{d^2r}{ds\,ds'}+\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}=-\cos.\varepsilon;$$

et comme

$$\frac{d\frac{1}{r}}{ds}=-\frac{\frac{dr}{ds}}{r^2}, \frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'}=-\frac{r\frac{d^2r}{ds\,ds'}-2\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}}{r^3}=\frac{\cos.\varepsilon+3\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}}{r^3},$$

la valeur de l'action des deux éléments devient

$$\frac{1}{2}ii'ds\,ds'\left(\frac{\cos.\varepsilon}{r^2}+r\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'}\right).$$

Pour avoir la composante parallèle à AA', il faut multiplier cette expression par le cosinus de l'angle MM'P que fait MM' avec M'P parallèle à AA', c'est-à-dire par $\frac{M'P}{M'M}$, ou $\frac{a}{r}$, ce qui donne

$$\frac{1}{2}aii'ds\,ds'\left(\frac{\cos.\varepsilon}{r^3}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'}\right);$$

et en intégrant dans toute l'étendue des deux courants, on trouve pour l'action totale

$$\frac{1}{2}aii'\left(\frac{1}{r}+\cos.\varepsilon\iint\frac{ds\,ds'}{r^3}\right).$$

Si les deux courants font entre eux un angle droit, on a $\cos.\varepsilon=0$, et l'action parallèle à AA' se réduit, en prenant

l'intégrale entre les limites convenables, et en employant les mêmes notations que ci-dessus, à

$$\frac{1}{2}ii'\left(\frac{a}{r_2''}-\frac{a}{r_1''}-\frac{a}{r_2'}+\frac{a}{r_1'}\right).$$

Cette expression est proportionnelle à la plus courte distance des courants, et devient par conséquent nulle quand ils sont dans un même plan, comme cela doit être évidemment.

Si les courants sont parallèles, on a $\varepsilon=0$ et

$$r^2=a^2+(s-s')^2,$$

d'où

$$\iint\frac{ds\,ds'}{r^3}=\int ds'\int\frac{ds}{[a^2+(s-s')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\int ds'\frac{s-s'}{a^2\sqrt{a^2+(s-s')^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-(s-s')^2}}{a^2}=-\frac{r}{a^2},$$

c'est-à-dire entre les limites des intégrations,

$$\frac{r_2'+r_1''-r_1'-r_2''}{a^2};$$

et comme $\cos.\varepsilon=1$, l'action totale devient

$$\frac{1}{2}ii'\left(\frac{a}{r_2''}-\frac{a}{r_2'}-\frac{a}{r_1''}+\frac{a}{r_1'}+\frac{r_1''+r_2'-r_2''-r_1'}{a}\right).$$

Nous verrons plus tard comment se fait l'intégration dans le cas où l'angle ε est quelconque.

Cherchons maintenant le moment de rotation autour de la commune perpendiculaire : pour cela il faut connaître d'abord la composante suivant MP, et la multiplier par la perpendiculaire AQ abaissée de A sur MP, ce qui revient à

multiplier la force suivant MM′ par $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MM'}}$. AQ, ou par $\frac{ss'\sin.\varepsilon}{r}$;
on aura ainsi

$$\frac{1}{2}ii'\sin.\varepsilon\left(ss'\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'}ds\,ds' + ss'\frac{\cos.\varepsilon\,ds\,ds'}{r^3}\right);$$

posant $\frac{ss'}{r}=q$, on aura

$$\frac{dq}{ds}=\frac{s'}{r}+\frac{ss'd\frac{1}{r}}{ds},$$

et

$$\frac{d^2q}{ds\,ds'}=\frac{1}{r}-\frac{s'}{r^2}\cdot\frac{dr}{ds'}-\frac{s}{r^2}\cdot\frac{dr}{ds}+ss'\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'}$$

$$=\frac{1}{r}-\frac{s'(s'-s\cos.\varepsilon)+s(s-s'\cos.\varepsilon)}{r^3}+ss'\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'};$$

et en réduisant,

$$\frac{d^2q}{ds\,ds'}=\frac{a^2}{r^3}+\frac{ss'd^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'},$$

d'où l'on tirera

$$ss'\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'}=\frac{d^2q}{ds\,ds'}-\frac{a^2}{r^3}.$$

Or, nous avons trouvé précédemment

$$r\frac{d^2r}{ds\,ds'}+\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}=-\cos.\varepsilon,$$

ou

$$r\frac{d^2r}{ds\,ds'}+\frac{(s-s'\cos.\varepsilon)(s'-s\cos.\varepsilon)}{r^2}=-\cos.\varepsilon;$$

effectuant la multiplication et remplaçant $s^2+s'^2$ par sa valeur tirée de

$$r^2=a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon,$$

on obtient, en réduisant,

$$\frac{d^2 r}{ds\,ds'} + \frac{ss' \sin.^2 \varepsilon + a^2 \cos.\varepsilon}{r^3} = 0,$$

d'où

$$\frac{ss'}{r^3} = -\frac{1}{\sin.^2 \varepsilon}\left(\frac{d^2 r}{ds\,ds'} + \frac{a^2 \cos.\varepsilon}{r^3}\right).$$

Substituant cette valeur ainsi que celle de $ss'\frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'}$ dans l'expression du moment de rotation de l'élément, il devient

$$\frac{1}{2}ii' \sin.\varepsilon\, ds\,ds' \left[\frac{d^2 q}{ds\,ds'} - \frac{a^2}{r^3} - \frac{\cos.\varepsilon}{\sin.^2}\left(\frac{d^2 r}{ds\,ds'} + \frac{a^2\cos.\varepsilon}{r^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}ii' ds\,ds'\left(\sin.\varepsilon \frac{d^2 q}{ds\,ds'} - \frac{a^2 \sin.\varepsilon}{r^3} - \cot.\varepsilon \frac{d^2 r}{ds\,ds'} - \frac{\cos.\varepsilon^2}{\sin.\varepsilon}\cdot\frac{a^2}{r^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}ii' ds\,ds'\left(\sin.\varepsilon \frac{d^2 q}{ds\,ds'} - \cot.\varepsilon \frac{d^2 r}{ds\,ds'} - \frac{1}{\sin.\varepsilon}\cdot\frac{a^2}{r^3}\right);$$

et intégrant par rapport à s et s', on a pour le moment total

$$\frac{1}{2}ii'\left(q\sin.\varepsilon - r\cot.\varepsilon - \frac{a^2}{\sin.\varepsilon}\iint\frac{ds\,ds'}{r^3}\right);$$

le calcul se ramène donc, comme précédemment, à trouver la valeur de l'intégrale double $\iint\frac{ds\,ds'}{r^3}$.

Si les courants sont dans un même plan, on a $a = 0$, et le moment se réduit à

$$\frac{1}{2}ii'(q\sin.\varepsilon - r\cot.\varepsilon),$$

résultat qui coïncide avec celui que nous avons obtenu en traitant directement deux courants situés dans un même

plan. Car q n'étant autre chose que $\frac{ss'}{r}$, et r devenant MP, on a

$$q \sin. \varepsilon = \frac{ss' \sin. \varepsilon}{r} = \frac{\text{MP.AQ}}{\text{MP}} = \text{AQ};$$

et nous avions trouvé par l'autre procédé,

$$\frac{1}{2} ii' (p - r \cot. \varepsilon);$$

p désignant la perpendiculaire AQ : les deux résultats sont donc identiques. L'intégration faite entre les limites donne

$$\frac{1}{2} ii' [p_2'' - p_1'' - p_2' + p_1' + \cot. \varepsilon (r_1'' + r_2' - r_2'' - r_1')];$$

si l'angle ε est droit, ce moment se réduit à

$$\frac{1}{2} ii' (p_2'' - p_1'' - p_2' + p_1').$$

Lorsque $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, mais que a n'est pas nul, le moment ci-dessus devient

$$\frac{1}{2} ii' \left(q - a^2 \iint \frac{ds\, ds'}{r^3} \right).$$

L'intégrale qu'il s'agit de calculer dans ce cas est

$$\int ds' \int \frac{ds}{r^3} = \int ds' \int \frac{ds}{(a^2 + s^2 + s'^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{s}{(a^2 + s'^2)\sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}} ds',$$

qu'il faut intégrer de nouveau par rapport à s'; il vient

$$\int \frac{s\, ds'}{(a^2 + s'^2)\sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}} = \int \frac{(a^2 + s^2) s\, ds'}{(a^4 + a^2 s'^2 + a^2 s^2 + s^2 s'^2)\sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}} =$$

$$\int \frac{s(a^2 + s^2) \frac{ds'}{\sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}}}{a^2 (a^2 + s^2 + s'^2) + s^2 s'^2} = \int \frac{\frac{s(a^2 + s^2) ds'}{(a^2 + s^2 + s'^2)^{\frac{3}{2}}}}{a^2 + \frac{s^2 s'^2}{a^2 + s^2 + s'^2}} = \int \frac{\frac{dq}{ds'} ds'}{a^2 + q^2} = \frac{1}{a} \text{arc. tang.} \frac{q}{a} + \text{C}.$$

Soit M la valeur du moment de rotation lorsque les deux courants électriques, dont les longueurs sont s et s', partent des points où leurs directions rencontrent la droite qui en mesure la plus courte distance, on aura

$$M=\frac{1}{2}ii'\left(q-a\,\text{arc. tang.}\frac{q}{a}\right),$$

expression qui se réduit, quand $a=0$, à $M=\frac{1}{2}ii'q$, ce qui s'accorde avec la valeur $M=\frac{1}{2}ii'p$ que nous avons déja trouvée pour ce cas, parce qu'alors q devient la perpendiculaire que nous avions désignée par p. Si l'on suppose a infini, M devient nul, comme cela doit être, puisqu'il en résulte

$$a\,\text{arc. tang.}\frac{q}{a}=q.$$

Si l'on nomme z l'angle dont la tangente est

$$\frac{ss'}{a\sqrt{a^2+s^2+s'^2}},$$

il viendra

$$M=\frac{1}{2}ii'q\left(1-\frac{z}{\text{tang. }z}\right);$$

c'est la valeur du moment de rotation qui serait produit par une force égale à

$$\frac{1}{2}ii'\left(1-\frac{z}{\text{tang. }z}\right),$$

agissant suivant la droite qui joint les deux extrémités des conducteurs opposées à celles où ils sont rencontrés par la droite qui en mesure la plus courte distance.

Il suffit de quadrupler ces expressions pour avoir le mo-

ment de rotation produit par l'action mutuelle de deux conducteurs dont l'un serait mobile autour de la droite qui mesure leur plus courte distance, dans le cas où cette droite rencontre les deux conducteurs à leurs milieux, et où leurs longueurs sont respectivement représentées par $2s$ et $2s'$.

Il est, au reste, aisé de voir que si, au lieu de supposer que les deux courants partent du point où ils rencontrent la droite, on avait fait le calcul pour des limites quelconques, on aurait trouvé une valeur de M composée de quatre termes de la forme de celui que nous avons obtenu dans ce cas particulier, deux de ces termes étant positifs et les deux autres négatifs.

Considérons maintenant deux courants rectilignes A'S', L'L'' (fig. 27), non situés dans un même plan et dont les directions fassent un angle droit.

Soit A'A leur commune perpendiculaire, et cherchons l'action de L'L'' pour faire tourner A'S' autour d'une parallèle OV à L'L'' menée à la distance $A'O = b$ de A.

Soient M, M' deux éléments quelconques de ces courants; l'expression générale de la composante de leur action parallèle à la perpendiculaire commune AA', devient, en faisant $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{2} aii' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds\, ds'} ds' ds' ;$$

son moment par rapport au point O est donc, en prenant A' pour origine des s', égal à

$$\frac{1}{2} aii'(s' - b) \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds\, ds'} ds ds' ;$$

en intégrant par rapport à s, il vient

$$\frac{1}{2} aii'(s'-b) \frac{d\frac{1}{r}}{ds'} ds';$$

et en appelant r' et r'' les distances M'L', M'L'' de M' aux points L', L'', et intégrant entre ces limites l'action de L'L'', pour faire tourner l'élément M', est

$$\frac{1}{2} aii'(s'-b) ds' \left(\frac{d\frac{1}{r''}}{ds'} - \frac{d\frac{1}{r'}}{ds'}\right),$$

expression qu'il faut intégrer par rapport à s'. Or

$$\frac{1}{2} aii' \int (s'-b) d\frac{1}{r''} = \frac{1}{2} aii' \left(\frac{s'-b}{r''} - \int \frac{ds'}{r''}\right),$$

et il est d'ailleurs aisé de voir qu'en nommant c la valeur AL'' de s qui correspond à r'', et qui est une constante dans l'intégration actuelle, on a $A'L'' = \sqrt{a^2+c^2}$, d'où il suit que

$$r'' = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sin.\beta''}, s' = -\sqrt{a^2+c^2} \cot.\beta'', ds' = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sin.^2\beta''} d\beta'';$$

ainsi

$$\int \frac{ds'}{r''} = \int \frac{d\beta''}{\sin.\beta''} = 1 \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_2''}{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_1''};$$

le second terme s'intégrera de la même manière, et l'on aura enfin pour le moment de rotation cherché

$$\frac{1}{2} aii' \left(\frac{s_2'-b}{r_2''} - \frac{s_1'-b}{r_1''} - \frac{s_2'-b}{r_2'} + \frac{s_1'-b}{r_1'} - 1 \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_2''\,\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_1'}{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_1''\,\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_2'}\right).$$

Dans le cas où l'axe de rotation parallèle à la droite L'L'' ou s passe par le point d'intersection A' des droites a et s', on a $b = 0$; et si l'on suppose, en outre, que le courant qui

parcourt s' part de ce point d'intersection, on aura de plus

$$s_1'=0,\ \beta_1'=\frac{\pi}{2},\ \beta_1''=\frac{\pi}{2},$$

en sorte que la valeur du moment de rotation se réduira à

$$\frac{1}{2}aii'\left(\frac{s_2'}{r_2''}-\frac{s_2'}{r_2'}-\mathrm{l}\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_2''}{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_2'}\right).$$

Je vais maintenant chercher l'action d'un fil conducteur plié suivant le périmètre d'un rectangle K'K''L''L' pour faire tourner un conducteur rectiligne A'S'$=s'_2$, perpendiculaire sur le plan de ce rectangle, et mobile autour d'un de ses côtés K'K'' qu'il rencontre au point A' : le moment produit par l'action de ce côté K'K'' étant alors évident nul, il faudra à celui qui est dû à l'action de L'L'' et dont nous venons de calculer la valeur, ajouter le moment produit par K'L' dans le même sens que celui de L'L'', et en ôter celui qui l'est par K''L'' dont l'action tend à faire tourner A'S' en sens contraire; or, d'après les calculs précédents, en nommant g et h les plus courtes distances A'K', A'K'', de AS' aux droites K'L', K''L'' qui sont toutes deux égales à a, on a pour les valeurs absolues de ces moments

$$\frac{1}{2}ii'\left(q'-g\,\text{arc. tang.}\frac{q'}{g}\right),\ \frac{1}{2}ii\left(q''-h\,\text{arc. tang.}\frac{q''}{h}\right),$$

en faisant

$$q'=\frac{as'_2}{\sqrt{g^2+a^2+s'^2}}=\frac{as_2'}{r_2'},\ q''=\frac{as_2'}{\sqrt{h^2+a^2+s'^2}}=\frac{as_2'}{r_2''},$$

celle du moment total est donc

$$\frac{1}{2}ii'\left(h\,\text{arc. tang.}\frac{q''}{h}-g\,\text{arc. tang.}\frac{q'}{g}-a\,\mathrm{l}\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_2''}{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta_2'}\right).$$

Telle est la valeur du moment de rotation résultant de l'action d'un conducteur ayant pour forme le périmètre d'un rectangle, et agissant sur un conducteur mobile autour d'un des côtés du rectangle, lorsque la direction de ce conducteur est perpendiculaire au plan du rectangle, quelle que soit d'ailleurs sa distance aux autres côtés du rectangle et les dimensions de celui-ci. En déterminant par l'expérience l'instant où le conducteur mobile est en équilibre entre les actions opposées de deux rectangles situés dans le même plan, mais de grandeurs différentes et à des distances différentes du conducteur mobile, on a un moyen bien simple de se procurer des vérifications de ma formule susceptible d'une grande précision; c'est ce qu'on peut faire aisément à l'aide d'un instrument dont il est trop facile de concevoir la construction pour qu'il soit nécessaire de l'expliquer ici.

Intégrons maintenant l'expression $\iint \frac{ds\, ds'}{r^3}$ dans l'étendue de deux courants rectilignes non situés dans un même plan, et faisant entre eux un angle quelconque ε, dans le cas où ces courants commencent à la perpendiculaire commune; les autres cas s'en déduisant immédiatement.

Soient A (fig. 28) le point où la commune perpendiculaire rencontre la direction AM du courant s, AM' une parallèle menée par ce point au courant s', et mm' la projection sur le plan MAM' de la droite qui joint les deux éléments ds, ds'.

Menons par A une ligne An parallèle et égale à mm', et formons en n un petit parallèlogramme nn' ayant ses côtés parallèles aux droites MAN, AM', et égaux à ds, ds'.

Si l'on répète la même construction pour tous les éléments, les parallèlogrammes ainsi formés composeront le parallélogramme entier NAM'D, et, leur surface ayant pour mesure

$ds\,ds'\sin.\varepsilon$, on obtiendra l'intégrale proposée multipliée par $\sin.\varepsilon$, en cherchant le volume ayant pour base NAM'D, et terminé à la surface dont les ordonnées élevées aux différents points de cette base ont pour valeur $\frac{1}{r^3}$; r étant la distance des deux éléments des courants, qui correspondent, d'après notre construction, à tous ces points de la surface NAM D.

Or, pour calculer ce volume, nous pourrons partager la base en triangles ayant pour sommet commun le point A.

Soient Ap une droite menée à l'un quelconque des points de l'aire du triangle AND, et $pqq'p'$ l'aire comprise entre les deux droites infiniment voisines Ap, Aq' et les deux arcs de cercle décrits de A avec les rayons A$p = u$ et A$p' = u + du$: nous aurons, à cause que l'angle NAM' $= \pi - \varepsilon$ et en appelant φ l'angle NAp,

$$\sin.\varepsilon \iint \frac{ds\,ds'}{r^3} = \iint \frac{u\,du\,d\varphi}{r^3}.$$

Or, si a désigne la perpendiculaire commune aux directions des deux conducteurs, et s et s' les distances comptées de A sur les deux courants, on a

$$r = \sqrt{a^2 + u^2},\ u = \sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss'\cos.\varepsilon}:$$

donc, en intégrant d'abord depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \text{AR} = u_1$,

$$\sin.\varepsilon \iint \frac{ds\,ds'}{r^3} = \iint \frac{u\,du\,d\varphi}{(a^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int d\varphi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+u_1^2}}\right).$$

Il reste à intégrer cette dernière expression par rapport à φ: pour cela nous calcurerons u_1 en fonction de φ par la proportion AN : AR :: $\sin.(\varphi+\varepsilon) : \sin.\varepsilon$, ou $s : u_1 :: \sin.(\varphi+\varepsilon) : \sin.\varepsilon$;

et en substituant à $a^2+u_1^2$ la valeur tirée de cette proportion, nous aurons à calculer

$$\int d\varphi\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{s^2\sin.^2\varepsilon}{\sin.^2(\varphi+\varepsilon)}}}\right]=\frac{\varphi}{a}-\int\frac{d\varphi\sin.(\varphi+\varepsilon)}{\sqrt{s^2\sin.^2\varepsilon+a^2\sin.^2(\varphi+\varepsilon)}}$$

$$=\frac{\varphi}{a}+\frac{1}{a}\int\frac{d\cos.(\varphi+\varepsilon)}{\sqrt{\frac{a^2+s^2\sin.^2\varepsilon}{a^2}-\cos.^2(\varphi+\varepsilon)}}=\frac{1}{a}\left[\varphi+\text{arc.sin.}\frac{a\cos.(\varphi+\varepsilon)}{\sqrt{a^2+s^2\sin.^2\varepsilon}}+C\right].$$

Nommons μ et μ' les angles NAD, M'AD, et prenons l'intégrale précédente entre $\varphi=0$ et $\varphi=\mu$, elle devient alors

$$\frac{1}{a}\left[\mu+\text{arc.sin.}\frac{a\cos.(\mu+\varepsilon)}{\sqrt{a^2+s^2\sin.^2\varepsilon}}-\text{arc.sin.}\frac{a\cos.\varepsilon}{\sqrt{a^2+s^2\sin.^2\varepsilon}}\right],$$

et, à cause de $\mu+\varepsilon=\pi-\mu'$, elle se change en

$$\frac{1}{a}\left[\mu-\text{arc.sin.}\frac{a\cos.\mu'}{\sqrt{a^2+s^2\sin.^2\varepsilon}}-\text{arc.sin.}\frac{a\cos.\varepsilon}{\sqrt{a^2+s^2\sin.^2\varepsilon}}\right];$$

or

$$\cos.\mu'=\frac{AK}{AD}=\frac{s'-s\cos.\varepsilon}{\sqrt{(s'-s\cos.\varepsilon)^2+s^2\sin.^2\varepsilon}}=\frac{s'-s\cos.\varepsilon}{\sqrt{s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}},$$

d'où l'on tire pour l'intégrale l'expression suivante :

$$\frac{1}{a}\left[\mu-\text{arc.sin.}\frac{a(s'-s\cos.\varepsilon)}{\sqrt{a^2+s^2\sin.^2\varepsilon}\sqrt{s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}}-\text{arc.sin.}\frac{a\cos.\varepsilon}{\sqrt{a^2+s^2\sin.^2\varepsilon}}\right],$$

ou, en passant du sinus à la tangente pour les deux arcs,

$$\frac{1}{a}\left[\mu-\text{arc.tang.}\frac{a(s'-s\cos.\varepsilon)}{s\sin.\varepsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}}-\text{arc.tang.}\frac{a\cot.\varepsilon}{\sqrt{a^2+s^2}}\right];$$

et comme on trouve l'intégrale relative au triangle M'AD en

changeant dans cette expression μ en μ' et s en s', on a pour l'intégrale totale, à cause que $\mu+\mu'=\pi-\varepsilon$,

$$\frac{1}{a}\Big(\pi-\varepsilon-\text{arc. tang.}\frac{a(s'-s\cos.\varepsilon)}{s\sin.\varepsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}}-\text{arc. tang.}\frac{a\cot.\varepsilon}{\sqrt{a^2+s^2}}$$

$$-\text{arc. tang.}\frac{a(s-s'\cos.\varepsilon)}{s'\sin.\varepsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}}-\text{arc. tang.}\frac{a\cot.\varepsilon}{\sqrt{a^2+s'^2}}\Big).$$

En calculant la tangente de la somme des deux arcs dont les valeurs contiennent s et s', on change cette expression en

$$\frac{1}{a}\Big(\pi-\varepsilon-\text{arc. tang.}\frac{a\sin.\varepsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}}{ss'\sin.^2\varepsilon+a^2\cos.\varepsilon}$$

$$-\text{arc. tang.}\frac{a\cot.\varepsilon}{\sqrt{a^2+s^2}}-\text{arc. tang.}\frac{a\cot.\varepsilon}{\sqrt{a^2+s'^2}}\Big);$$

et comme

$$\frac{\pi}{2}-\text{arc. tang.}\frac{a\sin.\varepsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}}{ss'\sin.^2\varepsilon+a^2\cos.\varepsilon}$$

$$=\text{arc. tang.}\frac{ss'\sin.^2\varepsilon+a^2\cos.\varepsilon}{a\sin.\varepsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss\cot.\varepsilon}},$$

on a, en divisant par $\sin.\varepsilon$,

$$\iint\frac{ds\,ds'}{r^3}=\frac{1}{a\sin.\varepsilon}\Big(\text{arc. tang.}\frac{ss'\sin.^2\varepsilon+a^2\cos.\varepsilon}{a\sin.\varepsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}}$$

$$-\text{arc. tang.}\frac{a\cot.\varepsilon}{\sqrt{a^2+s^2}}-\text{arc. tang.}\frac{a\cot.\varepsilon}{\sqrt{a^2+s'^2}}+\frac{\pi}{2}-\varepsilon\Big);$$

expression qui, lorsqu'on suppose $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$, se réduit à

$$\frac{1}{a}\Big(\text{arc. tang.}\frac{ss'}{a\sqrt{a^2+s^2+s'^2}}\Big),$$

comme nous l'avons trouvé précédemment.

On peut remarquer que le premier terme de la valeur que nous venons de trouver dans le cas général est l'intégrale indéfinie de

$$\frac{ds\,ds'}{(a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon)^{\frac{3}{2}}},$$

comme on peut le vérifier par la différentiation, et que les trois autres s'obtiennent en faisant successivement dans cette intégrale indéfinie :

$$1^{\circ}\ s'=0;\ 2^{\circ}\ s=0;\ 3^{\circ}\ s'=0 \text{ et } s=0.$$

Si les courants ne partaient pas de la commune perpendiculaire, on aurait une intégrale composée encore de quatre termes qui seraient tous de même forme que l'intégrale indéfinie.

Nous avons considéré jusqu'ici l'action mutuelle de courants électriques situés dans un même plan, et de courants rectilignes situés d'une manière quelconque dans l'espace; il nous reste à examiner l'action mutuelle des courants curvilignes qui ne seraient pas dans un même plan. Nous supposerons d'abord que ces courants décrivent des courbes planes et fermées, dont toutes les dimensions soient infiniment petites. Nous avons vu que l'action d'un courant de cette espèce dépendait de trois intégrales A, B, C, dont les valeurs sont

$$A=\lambda\left(\frac{\cos.\xi}{l^3}-\frac{3qx}{l^5}\right),$$

$$B=\lambda\left(\frac{\cos.\eta}{l^3}-\frac{3qy}{l^5}\right),$$

$$C=\lambda\left(\frac{\cos.\zeta}{l^3}-\frac{3qz}{l^5}\right).$$

Concevons maintenant dans l'espace une ligne quelconque MmO (pl. 2, fig. 29), qu'entourent des courants électriques formant de très-petits circuits fermés autour de cette ligne, dans des plans infiniment rapprochés qui lui soient perpendiculaires, de manière que les aires comprises dans ces circuits soient toutes égales entre elles et représentées par λ, que leurs centres de gravité soient sur MmO, et qu'il y ait partout la même distance, mesurée sur cette ligne, entre deux plans consécutifs. En appelant g cette distance que nous regarderons comme infiniment petite, le nombre des courants qui se trouveront répondre à un élément ds de la ligne MmO, sera $\frac{\mathrm{d}s}{g}$; et il faudra multiplier par ce nombre les valeurs de A, B, C que nous venons de trouver pour un seul circuit, afin d'avoir celles qui se rapportent aux circuits de l'élément ds; en intégrant ensuite, depuis l'une des extrémités L′ de l'arc s, jusqu'à l'autre extrémité L″ de cet arc, on aura les valeurs de A, B, C relatives à l'assemblage de tous les circuits qui l'entourent, assemblage auquel j'ai donné le nom de *solénoïde électro-dynamique,* du mot grec σωληνοειδής, dont la signification exprime précisément ce qui a la forme d'un canal, c'est-à-dire la surface de cette forme sur laquelle se trouvent tous les circuits.

On a ainsi, pour tout le solénoïde,

$$A=\frac{\lambda}{g}\int\left(\frac{\cos.\xi\,\mathrm{d}s}{l^3}-\frac{3qx\,\mathrm{d}s}{l^5}\right),$$

$$B=\frac{\lambda}{g}\int\left(\frac{\cos.\eta\,\mathrm{d}s}{l^3}-\frac{3qy\,\mathrm{d}s}{l^5}\right),$$

$$C=\frac{\lambda}{g}\int\left(\frac{\cos.\zeta\,\mathrm{d}s}{l^3}-\frac{3qz\,\mathrm{d}s}{l^5}\right).$$

Or, la direction de la ligne g, perpendiculaire au plan de λ, étant parallèle à la tangente à la courbe s, on a

$$\cos.\xi=\frac{dx}{ds},\ \cos.\eta=\frac{dy}{ds},\ \cos.\zeta=\frac{dz}{ds}.$$

De plus, q est évidemment égale à la somme des projections des trois coordonnées x, y, z, sur sa direction; ainsi

$$q=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{ds}=\frac{l\,dl}{ds},$$

puisqu'on à $l^2=x^2+y^2+z^2$. Substituant ces valeurs dans celle que nous venons de trouver pour C, elle devient

$$C=\frac{\lambda}{g}\int\left(\frac{dz}{l^3}-\frac{3z\,dl}{l^4}\right)=\frac{\lambda}{g}\left(\frac{z}{l^3}+C\right).$$

Nommant x', y', z', l' et x'', y'', z'', l'', les valeurs de x, y, z, l, relatives aux deux extrémités L', L'' du solénoïde, on a

$$C=\frac{\lambda}{g}\left(\frac{z''}{l''^3}-\frac{z'}{l'^3}\right).$$

En opérant de la même manière, pour les deux autres intégrales A, B, on trouve des expressions semblables pour les représenter, et les valeurs des trois quantités que nous nous sommes proposé de calculer pour le solénoïde entier sont

$$A=\frac{\lambda}{g}\left(\frac{x''}{l''^3}-\frac{x'}{l'^3}\right),$$

$$B=\frac{\lambda}{g}\left(\frac{y''}{l''^3}-\frac{y'}{l'^3}\right),$$

$$C = \frac{\lambda}{g}\left(\frac{z''}{l''^3} - \frac{z'}{l'^3}\right).$$

Si le solénoïde avait pour directrice une courbe fermée, on aurait $x''=x', y''=y', z''=z', l''=l'$, et, par conséquent, $A=0, B=0, C=0$; s'il s'étendait à l'infini dans les deux sens, tous les termes des valeurs de A, B, C seraient nuls séparément, et il est évident que dans ces deux cas l'action exercée par le solénoïde se réduit à zéro. Si l'on suppose qu'il ne s'étende à l'infini que d'un seul côté, ce que j'exprimerai en lui donnant alors le nom de solénoïde indéfini dans un seul sens, on n'aura à considérer que l'extrémité dont les coordonnées x', y', z' ont des valeurs finies, car l'autre extrémité étant supposée à une distance infinie, les premiers termes de celles que nous venons de trouver pour A, B, C, sont nécessairement nuls; on a ainsi

$$A = -\frac{\lambda x'}{g l'^3},\ B = -\frac{\lambda y'}{g l'^3},\ C = -\frac{\lambda z'}{g l'^3},$$

donc $A : B : C :: x' : y' : z'$; d'où il suit que la normale au plan directeur, qui passe par l'origine et forme avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\frac{A}{D},\ \frac{B}{D},\ \frac{C}{D}$$

en faisant toujours $D = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$, passe aussi par l'extrémité du solénoïde dont les coordonnées sont x', y', z'.

Nous avons vu, dans le cas général, que la résultante totale est perpendiculaire sur cette normale ; ainsi l'action d'un solénoïde indéfini sur un élément est perpendiculaire à la droite qui joint le milieu de cet élément à l'extrémité du solénoïde;

et comme elle l'est aussi à l'élément, il s'ensuit qu'elle est perpendiculaire au plan mené par cet élément et par l'extrémité du solénoïde.

Sa direction étant déterminée, il ne reste plus qu'à en connaître la valeur : or, d'après le calcul fait dans le cas général, cette valeur est

$$-\frac{\mathrm{D}ii'\mathrm{d}s'\sin.\varepsilon'}{2},$$

ε' étant l'angle de l'élément $\mathrm{d}s'$ avec la normale au plan directeur : et comme $\mathrm{D}=\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}$, on trouve aisément

$$\mathrm{D}=-\frac{\lambda}{gl'^2},$$

ce qui donne pour la valeur de la résultante

$$\frac{\lambda ii'\mathrm{d}s'\sin.\varepsilon}{2gl'^2}.$$

On voit donc que l'action qu'un solénoïde indéfini dont l'extrémité est en L' (fig. 29) exerce sur l'élément ab, est normale en A au plan bAL', proportionnelle au sinus de l'angle bAL' et en raison inverse du carré de la distance AL', et qu'elle reste toujours la même, quelles que soient la forme et la direction de la courbe indéfinie L'L'' sur laquelle on suppose placés tous les centres de gravité des courants dont se compose le solénoïde indéfini.

Si l'on veut passer de là au cas d'un solénoïde défini dont les deux extrémités soient situées à deux points donnés L', L'', il suffira de supposer un second solénoïde indéfini commençant au point L'' du premier et coïncidant avec lui depuis ce point jusqu'à l'infini, ayant ses courants de même

intensité, mais dirigés en sens contraire, l'action de ce dernier sera de signe contraire à celle du premier solénoïde indéfini partant du point L', et la détruira dans toute la partie qui s'étend depuis L'' jusqu'à l'infini dans la direction L''O où ils seront superposés; l'action du solénoïde L'L'' sera donc la même qu'exercerait la réunion de ces deux solénoïdes indéfinis, et se composera, par conséquent, de la force que nous venons de calculer et d'une autre force agissant en sens contraire, passant de même par le point A, perpendiculaire au plan bAL'', et ayant pour valeur

$$\frac{\lambda i i' ds' \sin. \varepsilon''}{2 g l''^2},$$

ε'' étant l'angle bAL'', et l'' la distance AL''. L'action totale du solénoïde L'L'' est la résultante de ces deux forces, et passe, comme elles, par le point A.

Comme l'action d'un solénoïde défini se déduit immédiatement de celle du solénoïde indéfini, nous commencerons, dans tout ce qu'il nous reste à dire sur ce sujet, par considérer le solénoïde indéfini qui offre des calculs plus simples, et dont il est toujours facile de conclure ce qui a lieu relativement à un solénoïde défini.

Soient L' (fig. 30), l'extrémité d'un solénoïde indéfini; A le milieu d'un élément quelconque ba d'un courant électrique M_1AM_2, et L'K une droite fixe quelconque menée par le point L'; nommons θ l'angle variable KL'A, μ l'inclinaison des plans bAL', AL'K, et l' la distance L'A. L'action de l'élément ba sur le solénoïde étant égale et opposée à celle que ce dernier exerce sur l'élément, il faut, pour la déterminer, considérer un point situé en A, lié invariablement au solénoïde, et sollicité par une force dont l'expression soit, abstraction faite

du signe,

$$\frac{\lambda ii' \mathrm{d}s' \sin. b\mathrm{AL}'}{2gl'^2} \text{ ou } \frac{\lambda ii' \mathrm{d}v}{gl'^3},$$

en nommant $\mathrm{d}v$ l'aire $a\mathrm{L}'b$ qui est égale à

$$\frac{l' \mathrm{d}s' \sin. b\mathrm{AL}'}{2}.$$

Comme cette force est normale en A au plan $\mathrm{AL}'b$, il faut, pour avoir son moment par rapport à l'axe L'K, chercher sa composante perpendiculaire à AL'K, et la multiplier par la perpendiculaire à AP abaissée du point A sur la droite L'K. μ étant l'angle compris entre les plans $\mathrm{AL}'b$, AL'K, cette composante s'obtient en multipliant l'expression précédente par cos. μ; mais $\mathrm{d}v$ cos. μ est la projection de l'aire $\mathrm{d}v$ sur le plan AL'K, d'où il suit qu'en représentant cette projection par $\mathrm{d}u$, la valeur de la composante cherchée est,

$$\frac{\lambda ii' \mathrm{d}u}{gl'^3}.$$

Or, la projection de l'angle $a\mathrm{L}'b$ sur AL'K peut être considérée comme la différence infiniment petite des angles $\mathrm{KL}'a$ et $\mathrm{KL}'b$: ce sera donc $\mathrm{d}\theta$, et l'on aura

$$\mathrm{d}u = \frac{l'^2 \mathrm{d}\theta}{2};$$

ce qui réduit la dernière expression à

$$\frac{\lambda ii' \mathrm{d}\theta}{2gl'};$$

et comme $\mathrm{AP} = l' \sin. \theta$, on a pour le moment cherché

$$\frac{\lambda ii'}{2g} \sin. \theta \, \mathrm{d}\theta.$$

Cette expression, intégrée dans toute l'étendue de la courbe $M_1 A M_2$, donne le moment de ce courant pour faire tourner le solénoïde autour de L'K : or, si le courant est fermé, l'intégrale, qui est en général

$$C - \frac{\lambda i i' \cos.\theta}{2g},$$

s'évanouit entre les limites, et le moment est nul par rapport à une droite quelconque L'K passant par le point L'.

Il suit de là que dans l'action d'un circuit fermé, ou d'un système quelconque de circuits fermés sur un solénoïde indéfini, toutes les forces appliquées aux divers éléments du système donnent, autour d'un axe quelconque, les mêmes moments que si elles l'étaient à l'extrémité même du solénoïde; que leur résultante passe par cette extrémité, et que ces forces ne peuvent, dans aucun cas, tendre à imprimer au solénoïde un mouvement de rotation autour d'une droite menée par son extrémité, ce qui est conforme aux résultats des expériences. Si le courant représenté par la courbe $M_1 A M_2$ n'était pas fermé, son moment pour faire tourner le solénoïde autour de L'K, en appelant θ_1' et θ_2' les valeurs extrêmes de θ relatives au point L' et aux extrémités M_1, M_2 de la courbe $M_1 A M_2$, serait

$$\frac{\lambda i i'}{2g}(\cos.\theta_1' - \cos.\theta_2').$$

Considérons maintenant un solénoïde défini L'L'' (fig. 31) qui ne puisse que tourner autour d'un axe passant par ses deux extrémités. Nous pourrons lui substituer, comme précédemment, deux solénoïdes indéfinis; et la somme des actions du courant $M_1 A M_2$ sur chacun d'eux sera son action sur L'L''. Nous venons de trouver le moment de la première,

et en appelant θ_1'', θ_2'' les angles correspondants à θ_1', θ_2', mais relatifs à l'extrémité L'', on aura pour celui de la seconde

$$-\frac{\lambda i i'}{2g}(\cos.\theta_1''-\cos.\theta_2'');$$

le moment total produit par l'action de M_1AM_2, pour faire tourner le solénoïde autour de son axe L'L'', sera donc

$$\frac{\lambda i i'}{2g}(\cos.\theta_1'-\cos.\theta_1''-\cos.\theta_2'+\cos.\theta_2'').$$

Ce moment est indépendant de la forme du conducteur M_1AM_2, de sa grandeur et de sa distance au solénoïde L'L'', et reste le même quand elles varient de manière que les quatre angles θ_1', θ_1'', θ_2', θ_2'' ne changent pas de valeurs; il est nul non-seulement quand le courant M_1M_2 forme un circuit fermé, mais encore quand on suppose que ce courant s'étend à l'infini dans les deux sens, parce qu'alors ses deux extrémités étant à une distance infinie de celles du solénoïde, l'angle θ_1' devient égal à θ_1'', et l'angle θ_2' à θ_2''.

Tous les moments de rotation autour des droites menées par l'extrémité d'un solénoïde indéfini étant nuls, cette extrémité est le point d'application de la résultante des forces exercées sur le solénoïde par un circuit électrique fermé ou par un système de courants formant des circuits fermés; on peut donc supposer que toutes ces forces y sont transportées, et la prendre pour l'origine A (fig. 32) des coordonnées: soit alors BM une portion d'un des courants qui agissent sur le solénoïde; la force due à un élément quelconque Mm de BM est, d'après ce qui précède, normale au plan AMm et exprimée par

$$\frac{\lambda i i' \, dv}{g r^3},$$

dv étant l'aire AMm, et r la distance variable AM.

Pour avoir la composante de cette action suivant AX, on doit la multiplier par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec AX, lequel est le même quê l'angle des plans AMm, ZAY; mais dv multiplié par ce cosinus est la projection de AMm sur ZAY, qui est égale à

$$\frac{y\,dz - z\,dy}{2}:$$

si donc on veut avoir l'action suivant AX exercée par un nombre quelconque de courants formant des circuits fermés, il faudra prendre dans toute l'étendue de ces courants l'intégrale

$$\frac{\lambda ii'}{2g}\int\frac{y\,dz - r\,dy}{r^3} \text{ qui est } \frac{\lambda ii' \mathrm{A}}{2g},$$

A désignant toujours la même quantité que précédemment dans laquelle on a remplacé n par sa valeur 3; on trouvera semblablement que l'action suivant AY est exprimée par

$$\frac{\lambda ii' \mathrm{B}}{2g},$$

et celle qui a lieu suivant AZ, par

$$\frac{\lambda ii' \mathrm{C}}{2g}.$$

La résultante de ces trois forces, qui est l'action totale exercée par un nombre quelconque de circuits fermés sur le solénoïde indéfini, est donc égale à

$$\frac{\lambda ii' \mathrm{D}}{2g},$$

en désignant toujours $\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}$ par D; et les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes des x, des y et des z, ont pour valeurs

$$\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D},$$

qui sont précisément celles des cosinus des angles que fait avec les mêmes axes la normale au plan directeur que l'on obtiendrait en considérant l'action des mêmes circuits sur un élément situé en A. Or, cet élément serait porté par l'action du système dans une direction comprise dans le plan directeur; d'où l'on tire cette conséquence remarquable, que lorsqu'un système quelconque de circuits fermés agit alternativement sur un solénoïde indéfini et sur un élément situé à l'extrémité de ce solénoïde, les directions suivant lesquelles sont portés respectivement l'élément et l'extrémité du solénoïde, sont perpendiculaires entre elles. Si on suppose l'élément situé dans le plan directeur lui-même, l'action que le système exerce sur lui est à son maximum, et a pour valeur

$$\frac{ii'\mathrm{D}\,\mathrm{d}s'}{2}.$$

Celle que le même système exerce sur le solénoïde vient d'être trouvée égale à

$$\frac{\lambda ii'\mathrm{D}}{2g}:$$

ces deux forces sont donc toujours entre elles dans le rapport constant pour un même élément et un même solénoïde

$$\mathrm{d}s' : \frac{\lambda}{g};$$

c'est-à-dire, comme la longueur de l'élément est à l'aire de la courbe fermée que décrit un des courants du solénoïde divisée par la distance de deux courants consécutifs; ce rapport est indépendant de la forme et de la grandeur des courants du système qui agit sur l'élément et sur le solénoïde.

Lorsque le système de circuits fermés que nous venons de considérer est lui-même un solénoïde indéfini, la normale au plan directeur passant par le point A est, comme nous venons de le voir, la droite qui joint ce point A à l'extrémité du solénoïde; il suit de là que l'action mutuelle de deux solénoïdes indéfinis a lieu suivant la droite qui joint l'extrémité de l'un à l'extrémité de l'autre; pour en trouver la valeur, nous désignerons par λ' l'aire des circuits formés par les courants de ce nouveau solénoïde, g' la distance entre les plans de deux de ces circuits qui se suivent immédiatement, l la distance des extrémités des deux solénoïdes indéfinis, et nous aurons $D = -\frac{\lambda'}{g' l^2}$, ce qui donne pour leur action mutuelle

$$\frac{\lambda i i' D}{2g} = -\frac{\lambda \lambda' i i'}{2 g g' l^2},$$

qui est en raison inverse du carré de la distance l. Quand l'un des solénoïdes est défini, on peut le remplacer par deux solénoïdes indéfinis, et l'action se trouve composée de deux forces, l'une attractive et l'autre répulsive, dirigées suivant les droites qui joignent les deux extrémités du premier à l'extrémité du second. Enfin, dans le cas où deux solénoïdes définis $L'L''$, L_1L_2 (fig. 33) agissent l'un sur l'autre, il y a quatre forces dirigées respectivement suivant les droites $L'L_1$, $L'L_2$, $L''L_1$, $L''L_2$ qui joignent leurs extrémités deux à deux; et si, par exemple, il y a répulsion suivant $L'L_1$, il y aura attraction suivant $L'L_2$ et $L''L_1$, et répulsion suivant $L''L_2$.

Pour justifier la manière dont j'ai conçu les phénomènes que présentent les aimants, en les considérant comme des assemblages de courants électriques formant de très-petits circuits autour de leurs particules, il fallait démontrer, en partant de la formule par laquelle j'ai représenté l'action

mutuelle de deux éléments de courants électriques, qu'il résulte de certains assemblages de ces petits circuits des forces qui ne dépendent que de la situation de deux points déterminés de ce système, et qui jouissent, relativement à ces deux points, de toutes les propriétés des forces qu'on attribue à ce qu'on appelle des molécules de fluide austral et de fluide boréal, lorsqu'on explique, par ces deux fluides, les phénomènes que présentent les aimants, soit dans leur action mutuelle, soit dans celle qu'ils exercent sur un fil conducteur : or on sait que les physiciens qui préfèrent les explications où l'on suppose l'existence de ces molécules à celles que j'ai déduites des propriétés des courants électriques, admettent qu'à chaque molécule de fluide austral répond toujours, dans chaque particule du corps aimanté, une molécule de fluide boréal de même intensité, et qu'en nommant élément magnétique l'ensemble de ces deux molécules qu'on peut considérer comme les deux pôles de cet élément, il faut pour expliquer les phénomènes que présentent les deux genres d'action dont il est ici question : 1° que l'action mutuelle de deux éléments magnétiques se compose de quatre forces, deux attractives et deux répulsives, dirigées suivant les droites qui joignent les deux molécules d'un de ces éléments aux deux molécules de l'autre, et dont l'intensité soit en raison inverse des carrés de ces droites; 2° que quand un de ces éléments agit sur une portion infiniment petite de fil conducteur, il en résulte deux forces perpendiculaires aux plans passant par les deux molécules de l'élément et par la direction de la petite portion du fil, et qui soient proportionnelles aux sinus des angles que cette direction forme avec les droites qui en mesurent les distances aux deux molécules, et en raison inverse des carrés de ces distances Tant qu'on n'admet pas

la manière dont je conçois l'action des aimants, et tant qu'on attribue ces deux espèces de forces à des molécules d'un fluide austral et d'un fluide boréal, il est impossible de les ramener à un seul principe; mais dès qu'on adopte ma manière de voir sur la constitution des aimants, on voit, par les calculs précédents, que ces deux sortes d'actions et les valeurs des forces qui en résultent se déduisent immédiatement de ma formule, et qu'il suffit pour trouver ces valeurs de substituer à l'assemblage de deux molécules, l'une de fluide austral, l'autre de fluide boréal, un solénoïde dont les extrémités, qui sont les deux points déterminés dont dépendent les forces dont il s'agit, soient situées précisément aux mêmes points où l'on supposerait placées les molécules des deux fluides.

Dès-lors deux systèmes de très-petits solénoïdes agiront l'un sur l'autre, d'après ma formule, comme deux aimants composés d'autant d'éléments magnétiques que l'on supposerait de solénoïdes dans ces deux systèmes; un de ces mêmes systèmes agira aussi sur un élément de courant électrique, comme le fait un aimant; et par conséquent tous les calculs, toutes les explications, fondés tant sur la considération des forces attractives et répulsives de ces molécules en raison inverse des carrés des distances, que sur celle de forces révolutives entre une de ces molécules et un élément de courant électrique, dont je viens de rappeler la loi telle que l'admettent les physiciens qui n'adoptent pas ma théorie, sont nécessairement les mêmes, soit qu'on explique comme moi par des courants électriques les phénomènes que produisent les aimants dans ces deux cas, ou qu'on préfère l'hypothèse des deux fluides. Ce n'est donc point dans ces calculs ou

dans ces explications qu'on peut chercher ni les objections contre ma théorie, ni les preuves en sa faveur. Les preuves sur lesquelles je l'appuie, résultent surtout de ce qu'elle ramène à un principe unique trois sortes d'actions que l'ensemble des phénomènes prouve être dues à une cause commune, et qui ne peuvent y être ramenées autrement. En Suède, en Allemagne, en Angleterre, on a cru pouvoir les expliquer par le seul fait de l'action mutuelle de deux aimants, tel que Coulomb l'avait déterminé; les expériences qui nous offrent des mouvements de rotation continue sont en contradiction manifeste avec cette idée. En France, ceux qui n'ont pas adopté ma théorie, sont obligés de regarder les trois genres d'action que j'ai ramenés à une loi commune, comme trois sortes de phénomènes absolument indépendants les uns des autres. Il est à remarquer, cependant, qu'on pourrait déduire de la loi proposée par M. Biot pour l'action mutuelle d'un élément de fil conducteur et de ce qu'il appelle une molécule magnétique, celle qu'a établie Coulomb relativement à l'action de deux aimants, si l'on admettait qu'un de ces aimants est composé de petits courants électriques, tels que ceux que j'y conçois; mais alors comment pourrait-on ne pas admettre que l'autre est composé de même, et adopter, par conséquent, toute ma manière de voir?

D'ailleurs, quoique M. Biot ait nommé force élémentaire (1) celle dont il a déterminé la valeur et la direction dans le cas où un élément de fil conducteur agit sur chacune des particules d'un aimant, il est clair qu'on ne peut regarder

(1) Précis élémentaire de physique, tom. II, pag. 122 de la seconde édition.

comme vraiment élémentaire, ni une force qui se manifeste dans l'action de deux éléments qui ne sont pas de même nature, ni une force qui n'agit pas suivant la droite qui joint les deux points entre lesquels elle s'exerce. Cependant, dans le Mémoire que cet habile physicien a communiqué à l'Académie les 30 octobre et 18 décembre 1820 (1), il regarde

---

(1) Ce dernier Mémoire n'ayant pas été publié à part, je ne connais la formule qui y est donnée pour exprimer cette force que par le passage suivant de la seconde édition du Précis élémentaire de physique, t. II, p. 122 et 123. « En divisant par la pensée toute la longueur du fil conjonctif Z'C' (fig. 34) « en une infinité de tranches d'une très-petite hauteur, on voit que chaque « tranche doit agir sur l'aiguille avec une énergie différente, selon sa distance « et sa direction. Or, ces forces élémentaires sont précisément le résultat « simple qu'il importe surtout de connaître; car la force totale exercée par « le fil entier n'est que la somme de leurs actions. Mais le calcul suffit pour « remonter de cette résultante à l'action simple. C'est ce qu'a fait M. La- « place. Il a déduit de nos observations, que la loi individuelle des forces « élémentaires exercées par chaque tranche du fil conjonctif, était la raison « inverse du carré de la distance, c'est-à-dire précisément la même que l'on « sait exister dans les actions magnétiques ordinaires. Cette analyse mon- « trait que, pour compléter la connaissance de la force, il restait encore à « déterminer si l'action de chaque tranche du fil était la même dans toutes « les directions à distance égale, ou si elle était plus énergique dans cer- « tains sens que dans d'autres. Pour décider cette question, j'ai tendu dans « un plan vertical un long fil de cuivre ZMC (fig. 34), en le pliant en M, « de manière que les deux branches ZM, MC fissent avec l'horizontale MH « des angles égaux. Devant ce fil, j'en ai tendu un autre Z'M'C' de même « matière, de même diamètre, pris dans le même triage; mais j'ai disposé « celui-ci verticalement, de manière qu'il ne fût séparé du premier en « MM' que par une bande de papier très-mince. J'ai ensuite suspendu notre « aiguille aimantée AB devant ce système, à la hauteur des points M, M', « et j'ai observé ses oscillations pour diverses distances, en faisant succes- « sivement passer le courant voltaïque par le fil plié et par le fil droit. J'ai « trouvé ainsi que, pour l'un comme pour l'autre, l'action était réciproque

comme élémentaire la force qu'exerce un élément de fil conducteur sur une molécule de fluide austral ou de fluide boréal, c'est-à-dire sur le pôle d'un élément magnétique, et il y considère comme un phénomène composé l'action mutuelle de deux éléments de conducteurs voltaïques. Or, on conçoit aisément que s'il existe en effet des molécules magnétiques, leur

---

« à la distance aux points M, M′; mais l'intensité absolue était plus faible « pour le fil oblique que pour le fil droit, dans la proportion de l'angle « ZMH à l'unité. Ce résultat analysé par le calcul, m'a paru indiquer que « l'action de chaque élément μ du fil oblique sur chaque molécule m de magnétisme austral ou boréal est réciproque au carré de sa distance μm à « cette molécule, et proportionnelle au sinus de l'angle $m\mu$M formé par « la distance μm avec la longueur du fil. »

Il est assez remarquable que cette loi qui est une conséquence rigoureuse de la formule par laquelle j'ai exprimé l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs, quand on remplace, conformément à ma théorie, chaque élément magnétique par un très-petit solénoïde électro-dynamique, a d'abord été trouvée par une erreur de calcul; en effet, pour qu'elle soit vraie, il faut que l'*intensité absolue* de la force soit proportionnelle, non pas à l'angle ZMH, mais à la tangente de la moitié de cet angle, ainsi que l'a démontré M. Savary, dans le Mémoire qu'il a lu à l'Académie, le 3 février 1823, qui a été publié dans le temps et se trouve aussi dans le Journal de physique, tome XCVI, pages 1-25 et suiv. Il paraît, au reste, que M. Biot a reconnu cette erreur, car dans la troisième édition du même ouvrage qui vient de paraître, il donne, à la vérité sans citer le Mémoire où elle avait été corrigée, de nouvelles expériences où l'intensité de la force totale est, conformément au calcul de M. Savary, proportionnelle à la tangente de la moitié de l'angle ZMH, et il en conclut de nouveau, avec plus de raison qu'il ne l'avait fait de ses premières expériences, que la force qu'il appelle élémentaire est, à distances égales, proportionnelle au sinus de l'angle compris entre la direction de l'élément de fil conducteur et celle de la droite qui en joint le milieu à la molécule magnétique. (*Précis élémentaire de physique expérimentale*, troisième édition, tome II, pag. 740-745.)

action mutuelle peut être considérée comme la force élémentaire : c'était le point de vue des physiciens de la Suède et de l'Allemagne, qui n'a pu supporter l'épreuve de l'expérience, puisque cette force étant proportionnelle à une fonction de la distance, ne peut jamais donner lieu au mouvement toujours accéléré dans le même sens, du moins tant que, comme ils le supposaient, les molécules magnétiques sont considérées comme fixées à des points déterminés des fils conducteurs qu'ils regardaient comme des assemblages de petits aimants, et alors les deux autres genres d'action étaient des phénomènes composés, puisque l'élément voltaïque l'était. On conçoit également que ce soit l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs qui offre la force élémentaire : alors l'action mutuelle de deux éléments magnétiques, et celle qu'un de ces éléments exerce sur une portion infiniment petite de conducteur voltaïque, sont des actions composées, puisque l'élément magnétique doit, dans ce cas, être considéré comme composé. Mais comment concevoir que la force élémentaire soit celle qui se manifeste entre un élément magnétique et une portion infiniment petite de conducteur voltaïque, c'est-à-dire entre deux corps à la vérité d'un très-petit volume, mais dont l'un est nécessairement composé, quelle que soit celle des deux manières d'interpréter les phénomènes dont nous venons de parler ?

La circonstance que présente la force exercée par un élément de fil conducteur sur un pôle d'un élément magnétique, d'agir dans une direction perpendiculaire à la droite qui joint les deux points entre lesquels se développe cette force, tandis que l'action mutuelle de deux éléments de conducteur a lieu suivant la ligne qui les joint, n'est pas une preuve moins dé-

monstrative de ce que la première de ces deux forces est un phénomène composé. Toutes les fois que deux points matériels agissent l'un sur l'autre, soit en vertu d'une force qui leur soit inhérente, ou d'une force qui y naisse par une cause quelconque, telle qu'un phénomène chimique, une décomposition ou une recomposition du fluide neutre résultant de la réunion des deux électricités, on ne peut pas concevoir cette force autrement que comme une tendance de ces deux points à se rapprocher ou à s'éloigner l'un de l'autre suivant la droite qui les joint, avec des vitesses réciproquement proportionnelles à leurs masses, et cela lors même que cette force ne se transmettrait d'une des particules matérielles à l'autre que par un fluide interposé, comme la masse du boulet n'est portée en avant avec une certaine vitesse, par le ressort de l'air dégagé de la poudre, qu'autant que la masse du canon est portée en arrière suivant la même droite, passant par les centres d'inertie du boulet et du canon, avec une vitesse qui est à celle du boulet, comme la masse de celui-ci est à la masse du canon.

C'est là un résultat nécessaire de l'inertie de la matière, que Newton signalait comme un des principaux fondements de la théorie physique de l'univers, dans le dernier des trois axiomes qu'il a placés au commencement des *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, en disant que l'action est toujours égale et opposée à la réaction ; car deux forces qui donnent à deux masses des vitesses inverses de ces masses, sont des forces qui les feraient produire des pressions égales sur des obstacles qui s'opposeraient invinciblement à ce qu'elles se missent en mouvement, c'est-à-dire des forces égales. Pour que ce principe soit applicable dans le cas de l'action mu-

tuelle de deux particules matérielles traversées par le courant électrique, lorsqu'on suppose cette action transmise par le fluide éminemment élastique qui remplit l'espace, et dont les vibrations constituent la lumière (1), il faut admettre que ce fluide n'a aucune inertie appréciable, comme l'air à l'égard du boulet et du canon; mais c'est ce dont on ne peut douter, puisqu'il n'oppose aucune résistance au mouvement des planètes. Le phénomène de la rotation du moulinet électrique avait porté plusieurs physiciens à admettre une inertie appréciable dans les deux fluides électriques, et par conséquent dans celui qui résulte de leur combinaison; mais cette supposition est en opposition avec tout ce que nous savons d'ailleurs de ces fluides, et avec le fait que les mouvements planétaires n'éprouvent aucune résistance de la part de l'éther; il n'y a plus d'ailleurs aucun motif de l'admettre, depuis que j'ai montré que la rotation du moulinet électrique est due à une répulsion électro-dynamique produite entre la pointe du moulinet et les particules de l'air ambiant, par le courant électrique qui s'échappe de cette pointe (2).

Lorsque M. Œrsted eut découvert l'action que le fil conducteur exerce sur un aimant, on devait, à la vérité, être porté à soupçonner qu'il pouvait y avoir une action mutuelle entre deux fils conducteurs; mais ce n'était point une consé-

(1) Ce fluide ne peut être que celui qui résulte de la combinaison des deux électricités. Afin d'éviter de répéter toujours la même phrase pour le désigner, je crois qu'on doit employer, comme Euler, le nom d'éther, en entendant toujours par ce mot le fluide ainsi défini.

(2) Voyez la *note* que je lus à l'Académie, le 24 juin 1822, et qui est insérée dans les Annales de chimie, tom. xx, pag. 419—421, et dans mon Recueil d'observations électro-dynamiques, pag. 316—318.

quence nécessaire de la découverte de ce célèbre physicien, puisqu'un barreau de fer doux agit aussi sur une aiguille aimantée, et qu'il n'y a cependant aucune action mutuelle entre deux barreaux de fer doux. Tant qu'on ne connaissait que le fait de la déviation de l'aiguille aimantée par le fil conducteur, ne pouvait-on pas supposer que le courant électrique communiquait seulement à ce fil la propriété d'être influencé par l'aiguille d'une manière analogue à celle dont l'est le fer doux par cette même aiguille, ce qui suffisait pour qu'il agît sur elle, sans que pour cela il dût en résulter aucune action entre deux fils conducteurs lorsqu'ils se trouveraient hors de l'influence de tout corps aimanté? L'expérience pouvait seule décider la question : je la fis au mois de septembre 1820, et l'action mutuelle des conducteurs voltaïques fut démontrée.

A l'égard de l'action de notre globe sur un fil conducteur, l'analogie entre la terre et un aimant suffisait sans doute pour rendre cette action extrêmement probable, et je ne vois pas trop pourquoi plusieurs des plus habiles physiciens de l'Europe pensaient qu'elle n'existait pas; non-seulement comme M. Erman, avant que j'eusse fait l'expérience qui la constatait (1), mais après que cette expérience eut été communiquée à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 30 octobre 1820, et répétée plusieurs fois, dans le courant de novembre de la même année, en présence de plusieurs de

(1) Dans un Mémoire très-remarquable, imprimé en 1820, ce célèbre physicien dit que le fil conducteur aura cet avantage sur l'aiguille aimantée dont on se sert pour des expériences délicates, que le mouvement qu'il prendra dans ces expériences ne sera point influencé par l'action de la terre.

ses membres et d'un grand nombre d'autres physiciens, qui m'ont autorisé, dans le temps, à les citer comme ayant été témoins des mouvements produits par l'action de la terre sur les parties mobiles des appareils décrits et figurés dans les Annales de chimie et de physique, tome xv, pages 191-196, *pl.* 2, *fig.* 5, *et pl.* 3, *fig.* 71, ainsi que dans mon Recueil d'observations électro-dynamiques, pages 43-48, puisque près d'un an après, les physiciens anglais élevaient encore des doutes sur les résultats d'expériences si complètes et faites devant un si grand nombre de témoins (1). On ne peut nier l'importance de ces expériences, ni se refuser à convenir que la découverte de l'action de la terre sur les fils conducteurs m'appartient aussi complètement que celle de l'action mutuelle de deux conducteurs. Mais c'était peu d'avoir découvert ces deux genres d'actions et de les avoir constatés par l'expérience ; il fallait encore :

1° Trouver la formule qui exprime l'action mutuelle de deux éléments de courants électriques ;

2° Montrer que d'après la loi, exprimée par cette formule, de l'attraction entre les courants qui vont dans le même sens, et de la répulsion entre ceux qui vont en sens contraire, soit que ces courants soient parallèles ou forment un angle quelconque (2), l'action de la terre sur les fils conduc-

---

(1) Voyez le Mémoire de M. Faraday, publié le 11 septembre 1821. La traduction de ce Mémoire se trouve dans les Annales de chimie et de physique, tom. XVIII, pag. 337-370, et dans mon Recueil d'observations électro-dynamiques, pag. 125-158. C'est par une faute d'impression qu'elle porte la date du 4 septembre 1821, au lieu de celle du 11 septembre 1821.

(2) Les expériences qui mettent en évidence l'action mutuelle de deux courants rectilignes dans ces deux cas, furent communiquées à l'Académie

teurs est identique, dans toutes les circonstances qu'elle présente, à celle qu'exercerait sur ces mêmes fils un faisceau de courants électriques dirigés de l'est à l'ouest et situés au midi de l'Europe, où les expériences qui constatent cette action ont été faites ;

3° Calculer d'abord, en partant de ma formule et de la manière dont j'ai expliqué les phénomènes magnétiques par des courants électriques formant de très-petits circuits fermés autour des particules des corps aimantés, l'action que doivent exercer l'une sur l'autre deux particules d'aimants considérées comme deux petits solénoïdes équivalant chacun à deux molécules magnétiques, l'une de fluide austral, l'autre de fluide boréal, et celle qu'une de ces particules doit exercer sur un élément de fil conducteur; s'assurer ensuite que ces calculs donnent précisément pour ces deux sortes d'actions, dans le premier cas la loi établie par Coulomb pour l'action de deux aimants, et dans le second celle que M. Biot a proposée, relativement aux forces qui se développent entre un aimant et un fil conducteur. C'est ainsi que j'ai ramené à un principe unique ces deux sortes d'actions, et celle que j'ai découverte entre deux fils conducteurs. Il était sans doute facile, d'après l'en-

---

dans la séance du 9 octobre 1820. Les appareils que j'avais employés sont décrits et figurés dans le tome XV des Annales de chimie et de physique, savoir : 1° celui pour l'action mutuelle de deux courants parallèles, pag. 72, *pl.* 1, *fig.* 1, et avec plus de détail dans mon Recueil d'observations électro-dynamiques, pag. 16-18; 2° celui pour l'action mutuelle de deux courants formant un angle quelconque, pag. 171 du même tome XV des Annales de chimie et de physique, *pl.* 2, *fig.* 2, et dans mon Recueil, pag. 23. Les figures portent dans mon Recueil les mêmes numéros que dans les Annales.

semble des faits, de conjecturer que ces trois sortes d'actions dépendaient d'une cause unique. Mais c'est par le calcul seul qu'on pouvait justifier cette conjecture, et c'est ce que j'ai fait, sans rien préjuger sur la nature de la force que deux éléments de fils conducteurs exercent l'un sur l'autre : j'ai cherché, d'après les seules données de l'expérience, l'expression analytique de cette force; et en la prenant pour point de départ, j'ai démontré qu'on en déduisait par un calcul purement mathématique les valeurs des deux autres forces telles qu'elles sont données par l'expérience, l'une entre un élément de conducteur et ce qu'on appelle une molécule magnétique, l'autre entre deux de ces molécules, en remplaçant, dans l'un et l'autre cas, comme on doit le faire d'après ma manière de concevoir la constitution des aimants, chaque molécule magnétique par une des deux extrémités d'un solénoïde électro-dynamique. Dès-lors tout ce qu'on peut déduire des valeurs de ces dernières forces subsiste nécessairement dans ma manière de considérer les effets qu'elles produisent, et devient une suite nécessaire de ma formule, et cela seul suffirait pour démontrer que l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs est réellement le cas le plus simple et celui dont il faut partir pour expliquer tous les autres; les considérations suivantes me semblent propres à confirmer de la manière la plus complète ce résultat général de mon travail, elles se déduisent facilement des notions les plus simples sur la composition des forces, et sont relatives à l'action mutuelle de deux systèmes, composés tous deux de points infiniment rapprochés les uns des autres, dans les divers cas qui peuvent se présenter suivant que ces systèmes ne contiennent que des

points de même espèce, c'est-à-dire qui tous attirent ou repoussent les mêmes points de l'autre système, ou qu'il y ait, soit dans un de ces systèmes, soit dans tous les deux, des points de deux espèces opposées, dont les uns attirent ce que les autres repoussent et repoussent ce qu'ils attirent.

Supposons d'abord que chacun des deux systèmes soit composé de molécules de même espèce, c'est-à-dire que celles de l'un agissent toutes par attraction ou toutes par répulsion sur celles de l'autre, avec des forces proportionnelles à leurs masses; soient M, M', M'', etc. (fig. 35), les molécules qui composent le premier, et *m* une quelconque de celles du second : en composant successivement toutes les actions *ma*, *mb*, *md*, etc., exercées par M, M', M'', etc., on obtiendra les résultantes *mc*, *me*, etc. dont la dernière sera l'action du système MM'M'' sur le point *m*, et passera à peu près par le centre d'inertie de ce système. En raisonnant de même relativement aux autres molécules du second système, on trouvera que les résultantes correspondantes passeront aussi toutes très-près du centre d'inertie du premier système, et auront une résultante générale qui passera aussi à peu près par le centre d'inertie du second : nous nommerons *centres d'action* les deux points extrêmement voisins des centres respectifs d'inertie des deux systèmes par lesquels passe cette résultante générale; il est évident qu'elle ne tendra, à cause des petites distances où ils sont des centres d'inertie, à imprimer à chaque système qu'un mouvement de translation.

Supposons, en second lieu, que les molécules du second système restant toutes de même espèce, celles du premier soient les unes attractives et les autres répulsives à l'égard de ces molécules du second système, les premières donneront une résultante *of* (fig. 36), passant par leur centre d'ac-

tion N, et par le centre d'action o de l'autre système : de même, les particules répulsives donneront une résultante oe, passant par leur centre d'action P et par le même point o : la résultante générale sera donc la diagonale og; et comme elle passe à peu près par le centre d'inertie du second système, elle ne tendra encore à lui imprimer qu'un mouvement de translation. Cette résultante est d'ailleurs dans le plan mené par les trois centres d'action o, N, P; et quand les molécules attractives sont en même nombre que les répulsives, et agissent avec la même intensité, sa direction est, en outre, perpendiculaire à la droite oO qui divise l'angle PoN en deux parties égales.

Considérons enfin le cas où les deux systèmes seraient composés l'un et l'autre de molécules d'espèces différentes. Soient N et P (fig. 37) les centres d'action respectifs des molécules attractives et répulsives du premier, soient n et p les centres correspondants du second, de sorte qu'il y ait attraction entre N et p, ainsi qu'entre n et P, et qu'il y ait répulsion entre N et n, de même qu'entre P et p. Les actions combinées de N et P sur p donneront une résultante dirigée suivant la diagonale pe : semblablement, les actions de N et P sur n donneront une résultante nf. Pour avoir la résultante générale, on prolongera ces deux lignes jusqu'à leur rencontre en o, et prenant $on=pe$, et $ok=nf$, la diagonale ol sera la résultante cherchée qui donnera l'action exercée par le système PN sur le système pn. Mais comme le point o ne fait pas partie du système pn, il faudra concevoir qu'il est lié à ce système d'une manière invariable sans l'être au premier système PN; et la force ol tendra généralement, en vertu de cette liaison, à opérer sur pn un

37.

mouvement de translation et un mouvement de rotation autour de son centre d'inertie.

Examinons maintenant la réaction exercée par le second système sur le premier : d'après l'axiome fondamental de la mécanique, que l'action et la réaction de deux particules l'une sur l'autre sont égales et directement opposées, il faudra, pour l'obtenir, composer successivement des forces égales et directement opposées à celles que les particules du premier système exercent sur les particules du second, et il est évident que la réaction totale ainsi trouvée sera toujours égale et directement opposée à l'action totale.

Dans le premier cas, la réaction sera donc représentée par la ligne $m\varepsilon$ (fig. 35), égale et opposée à la résultante me, et que l'on pourra supposer appliquée au centre d'action du premier système qui se trouve sur sa direction ; d'où il suit qu'en négligeant toujours la petite différence de situation du centre d'action et du centre d'inertie, on n'aura encore ici qu'un mouvement de translation.

Dans le second cas, la réaction sera de même représentée par la ligne $o\gamma$ (fig. 36), égale et opposée à og. Mais comme le point o n'appartient pas au premier système, et que généralement celui-ci ne sera pas traversé par la direction $o\gamma$, il faudra concevoir que ce point o soit lié invariablement au premier système sans l'être au second ; et, par cette liaison, la force $o\gamma$ tendra généralement à opérer sur le système PN un double mouvement de translation et de rotation. Au reste, cette force $o\gamma$ est dans le plan PoN ; et lorsque les molécules attractives sont en même nombre que les répulsives et agissent avec la même intensité, sa direction est, comme celle de og, perpendiculaire à oO.

Enfin, dans le troisième cas, la réaction sera représentée

par la ligne $o\lambda$ (fig. 37), égale et opposée à la résultante ol, et appliquée comme elle au point o. Pour avoir l'action de ol sur pn, nous avons conçu tout à l'heure que ce point o était lié à ce second système pn sans l'être au premier PN. Pour avoir maintenant la réaction exercée sur celui-ci, nous concevrons la force $o\lambda$ appliquée en un point situé en o, et lié au premier système PN sans l'être au second. Cette force tendra encore généralement à opérer sur PN un double mouvement de translation et de rotation.

Si l'on compare ces résultats avec les indications de l'expérience, relativement aux directions des forces qui s'exercent dans les trois genres d'actions que nous avons distingués plus haut, on verra aisément que les trois cas que nous venons d'examiner leur correspondent exactement. Lorsque deux éléments de conducteurs voltaïques agissent l'un sur l'autre, l'action et la réaction sont, comme dans le premier cas, dirigées suivant la droite qui joint ces deux éléments; quand il s'agit de la force qui a lieu entre un élément de fil conducteur et une particule d'aimant contenant deux pôles d'espèces opposées, qui agissent en sens contraires avec des intensités égales, l'action et la réaction sont, comme dans le second, cas dirigées perpendiculairement à la droite qui joint la particule à l'élément; et deux particules d'un barreau aimanté, qui ne sont elles-mêmes que deux très-petits aimants, exercent l'une sur l'autre une action plus compliquée, semblable à celle que présente le troisième cas, et dont on ne peut de même rendre raison qu'en la considérant comme le résultat de quatre forces, deux attractives et deux répulsives : il est aisé d'en conclure qu'il n'y a que l'élément de fil conducteur dont on puisse supposer que tous les points exercent la même espèce d'action,

et de juger quelle est, des trois sortes de forces dont il est ici question, celle qu'on doit regarder comme la plus simple.

Mais de ce que la force qui a lieu entre deux éléments de fils conducteurs est la plus simple, et de ce que celles qui se développent, l'une entre un de ces éléments et une particule d'aimant où se trouvent toujours deux pôles de même intensité, l'autre entre deux de ces particules, en sont des résultats plus ou moins compliqués, en faut-il conclure que la première de ces forces doive être considérée comme vraiment élémentaire? C'est ce que j'ai toujours été si loin de penser que, dans les *Notes sur l'exposé sommaire des nouvelles expériences électro-magnétiques*, publiées en 1822 (1), je cherchais à en rendre raison par la réaction du fluide répandu dans l'espace, et dont les vibrations produisent les phénomènes de la lumière : j'ai seulement dit qu'on devait la considérer comme *élémentaire,* dans le sens où les chimistes rangent dans la classe des corps simples tous ceux qu'ils n'ont encore pu décomposer, quelles que soient d'ailleurs les présomptions fondées sur l'analogie qui pourraient porter à croire qu'ils sont réellement composés, et parce qu'après qu'on en a déduit la valeur des expériences et des calculs exposés dans ce Mémoire, c'était en partant de cette seule valeur qu'il fallait calculer celles de toutes les forces qui se manifestent dans les cas les plus compliqués.

Mais quand même elle serait due, soit à la réaction d'un fluide dont la rareté ne permet pas de supposer qu'il réagisse en vertu de sa masse, soit à une combinaison des forces propres aux deux fluides électriques, il ne s'ensuivrait pas

(1) Recueil d'observations électro-dynamiques, page 215.

moins que l'action serait toujours opposée à la réaction suivant une même droite; car, ainsi qu'on l'a vu dans les considérations qu'on vient de lire, cette circonstance se rencontre nécessairement dans toute action complexe, quand elle a lieu pour les forces vraiment élémentaires dont se compose l'action complexe. En appliquant le même principe à la force qui s'exerce entre ce qu'on appelle une molécule magnétique et un élément de fil conducteur, on voit que si cette force, considérée comme agissant sur l'élément, passe par son milieu, la réaction de l'élément sur la molécule doit aussi être dirigée de manière à passer par ce milieu et non par la molécule. Cette conséquence d'un principe qu'avaient jusqu'à présent admis tous les physiciens, ne paraît pas au reste facile à démontrer par l'expérience, lorsqu'il s'agit de la force dont nous parlons, parce que dans toutes les expériences où l'on fait agir sur un aimant une portion de fil conducteur formant un circuit fermé, le résultat qu'on obtient pour l'action totale est le même, soit qu'on suppose que cette force passe par l'élément de fil conducteur ou par la molécule magnétique, ainsi qu'on l'a vu dans ce Mémoire; c'est ce qui a porté plusieurs physiciens à supposer que l'action exercée par l'élément de fil conducteur passait seule par cet élément, et que la réaction lui étant opposée et parallèle n'était pas dirigée suivant la même droite, qu'elle passait par la molécule et formait avec la première force ce qu'ils ont appelé un couple primitif.

Les calculs qui vont suivre me fourniront bientôt l'occasion d'examiner en détail cette singulière hypothèse. On verra, par cet examen, qu'elle n'est pas seulement opposée à l'un des principes fondamentaux de la mécanique, mais qu'elle est en outre absolument inutile pour l'explication des faits ob-

servés, et qu'une fausse interprétation de ces faits a pu seule porter à l'adopter les physiciens qui n'admettent pas que les aimants doivent réellement leurs propriétés à l'action des courants électriques qui entourent leurs particules.

Les phénomènes produits par les deux fluides électriques en mouvement dans les conducteurs voltaïques paraissent si différents de ceux qui en manifestent la présence quand ils sont en repos dans des corps électrisés à la manière ordinaire, qu'on a aussi prétendu que les premiers ne devaient pas être attribués aux mêmes fluides que les seconds. C'est précisément comme si l'on concluait de ce que la suspension du mercure dans le baromètre est un phénomène entièrement différent de celui du son, qu'on ne doit pas les attribuer au même fluide atmosphérique, en repos dans le premier cas et en mouvement dans le second; mais qu'il faut admettre, pour deux faits aussi différents, deux fluides dont l'un agisse seulement pour presser la surface libre du mercure, et dont l'autre transmette les mouvements vibratoires qui produisent le son.

Rien ne prouve d'ailleurs que la force exprimée par ma formule ne puisse pas résulter des attractions et répulsions des molécules des deux fluides électriques, en raison inverse des carrés des distances de ces molécules. Le fait d'un mouvement de rotation s'accélérant continuellement jusqu'à ce que les frottements et la résistance du liquide dans lequel plonge l'aimant ou le conducteur voltaïque qui présente cette sorte de mouvement en rendent la vitesse constante, paraît d'abord absolument opposé à ce genre d'explication des phénomènes électro-dynamiques. En effet, du principe de la conservation des forces vives, qui est une conséquence nécessaire des lois mêmes du mouvement, il suit nécessairement que quand les

forces élémentaires, qui seraient ici des attractions et des répulsions en raison inverse des carrés des distances, sont exprimées par de simples fonctions des distances mutuelles des points entre lesquels elles s'exercent, et qu'une partie de ces points sont invariablement liés entre eux et ne se meuvent qu'en vertu de ces forces, les autres restant fixes, le premiers ne peuvent revenir à la même situation, par rapport aux seconds, avec des vitesses plus grandes que celles qu'ils avaient quand ils sont partis de cette même situation. Or, dans le mouvement de rotation continue imprimé à un conducteur mobile par l'action d'un conducteur fixe, tous les points du premier reviennent à la même situation avec des vitesses de plus en plus grandes à chaque révolution, jusqu'à ce que les frottements et la résistance de l'eau acidulée où plonge la couronne du conducteur mettent un terme à l'augmentation de la vitesse de rotation de ce conducteur : elle devient alors constante, malgré ces frottements et cette résistance.

Il est donc complètement démontré qu'on ne saurait rendre raison des phénomènes produits par l'action de deux conducteurs voltaïques, en supposant que des molécules électriques agissant en raison inverse du carré de la distance fussent distribuées sur les fils conducteurs, de manière à y demeurer fixées et à pouvoir, par conséquent, être regardées comme invariablement liées entre elles. On doit en conclure que ces phénomènes sont dus à ce que les deux fluides électriques parcourent (1) continuellement les fils conducteurs, d'un mou-

(1) Lors des premiers travaux des physiciens sur les phénomènes-électro-dynamiques, plusieurs savants crurent pouvoir les expliquer par des distributions de molécules, soit électriques, soit magnétiques, en repos

vement extrêmement rapide, en se réunissant et se séparant alternativement dans les intervalles des particules de ces fils. C'est parce que les phénomènes dont il est ici question ne peuvent être produits que par l'électricité en mouvement, que j'ai cru devoir les désigner sous la dénomination de *phénomènes électro-dynamiques*; celle de *phénomènes électro-magnétiques*, qu'on leur avait donnée jus-

---

dans les conducteurs voltaïques. Dès que la découverte du premier mouvement de rotation continue faite par M. Faraday eut été publiée, je vis aussitôt qu'elle renversait complètement cette hypothèse, et voici en quels termes j'énonçai cette observation, dont ce que je dis ici n'est que le développement, dans l'*Exposé sommaire des nouvelles expériences électro-magnétiques* faites par différents physiciens depuis le mois de mars 1821, que je lus dans la séance publique de l'Académie royale des Sciences le 8 avril 1822.

« Tels sont les nouveaux progrès que vient de faire une branche de la « physique, dont nous ne soupçonnions pas même l'existence il y a seulement deux années, et qui déja nous a fait connaître des faits plus étonnants peut-être que tout ce que la science nous avait jusqu'à présent « offert de phénomènes merveilleux. Un mouvement qui se continue toujours dans le même sens, malgré les frottements, malgré la résistance « des milieux, et ce mouvement produit par l'action mutuelle de deux « corps qui demeurent constamment dans le même état, est un fait sans « exemple dans tout ce que nous savions des propriétés que peut offrir « la matière inorganique; il prouve que l'action qui émane des conducteurs voltaïques, ne peut être due à une distribution particulière de certains fluides en repos dans ces conducteurs, comme le sont les attractions et les répulsions électriques ordinaires. On ne peut attribuer « cette action qu'à des fluides en mouvement dans le conducteur qu'ils « parcourent en se portant rapidement d'une des extrémités de la pile à « l'autre extrémité. » Voyez le Journal de physique où cet exposé a été inséré dans le temps, tome XCIV, page. 65, et mon Recueil d'observations électro-dynamiques, page 205.

qu'alors convenait bien tant qu'il ne s'agissait que de l'action découverte par M. Œrsted entre un *aimant* et un *courant électrique*, mais elle ne pouvait plus présenter qu'une idée fausse depuis que j'avais trouvé qu'on produisait des phénomènes du même genre sans *aimant*, et par la seule action mutuelle de deux *courants électriques*.

C'est seulement dans le cas où l'on suppose les molécules électriques en repos dans les corps où elles manifestent leur présence par les attractions ou répulsions produites par elles entre ces corps, qu'on démontre qu'un mouvement indéfiniment accéléré ne peut résulter de ce que les forces qu'exercent les molécules électriques dans cet état de repos ne dépendent que de leurs distances mutuelles. Quand l'on suppose au contraire que, mises en mouvement dans les fils conducteurs par l'action de la pile, elles y changent continuellement de lieu, s'y réunissent à chaque instant en fluide neutre, se séparent de nouveau, et vont aussitôt se réunir à d'autres molécules du fluide de nature opposée, il n'est plus contradictoire d'admettre que des actions en raison inverse des carrés des distances qu'exerce chaque molécule, il puisse résulter entre deux éléments de fils conducteurs une force qui dépende non-seulement de leur distance, mais encore des directions des deux éléments suivant lesquelles les molécules électriques se meuvent, se réunissent à des molécules de l'espèce opposée, et s'en séparent l'instant suivant pour aller s'unir à d'autres. Or, c'est précisément et uniquement de cette distance et de ces directions que dépend la force qui se développe alors, et dont les expériences et les calculs exposés dans ce Mémoire m'ont donné la valeur. Pour se faire une idée nette de ce qui se passe dans le fil

conducteur, il faut faire attention qu'entre les molécules métalliques dont il est composé est répandu un fluide composé de fluide positif et de fluide négatif, non pas dans les proportions qui constituent le fluide neutre, mais avec un excès de celui de ces deux fluides qui est de nature opposée à l'électricité propre des molécules du métal, et qui dissimule cette électricité, comme je l'ai expliqué dans la lettre que j'écrivis à M. Van-Beek au commencement de 1822 (1) : c'est dans ce fluide électrique intermoléculaire que se passent tous les mouvements, toutes les décompositions et recompositions qui constituent le courant électrique.

Comme le liquide interposé entre les plaques de la pile est, sans comparaison, moins bon conducteur que le fil métallique qui en joint les extrémités, il se passe un temps, très-court à la vérité, mais cependant appréciable, pendant lequel l'électricité intermoléculaire, supposée d'abord en équilibre, se décompose dans chacun des intervalles compris entre deux molécules de ce fil. Cette décomposition augmente graduellement jusqu'à ce que l'électricité positive d'un intervalle se réunisse à l'électricité négative de l'intervalle qui le suit immédiatement dans le sens du courant, et son électricité négative à l'électricité positive de l'intervalle précédent. Cette réunion ne peut être qu'instantanée comme la décharge d'une bouteille de Leyde; et l'action entre les fils conducteurs, qui se développe, pendant qu'elle a lieu, en sens contraire de celle qu'ils exerçaient lors de la décomposition, ne peut par conséquent diminuer l'effet de celle-ci, car l'effet produit par une force est en raison composée de son intensité

(1) Journal de physique, tome XCIII, pages 450-453, et Recueil d'observations électro-dynamiques, pages 174-177.

et du temps pendant lequel elle agit; or ici l'intensité doit être la même, soit que les deux fluides électriques se séparent ou se réunissent : mais le temps pendant lequel s'opère leur séparation est sans comparaison plus grand que celui qu'exige leur réunion.

L'action variant avec les distances entre les molécules des deux fluides électriques pendant que se fait cette séparation, il faudrait intégrer, par rapport au temps et pour toute la durée de la séparation, la valeur de la force qui aurait lieu à chaque instant, et diviser ensuite, par cette durée, l'intégrale ainsi obtenue. Sans faire ce calcul, pour lequel il faudrait avoir des données, qui nous manquent encore, sur la manière dont les distances des molécules électriques varient, avec le temps, dans chaque intervalle intermoléculaire du fil conducteur, il est aisé de voir que les forces produites de cette manière, entre deux éléments de ce fil, doivent dépendre des directions du courant électrique dans chacun de ces éléments.

S'il était possible, en partant de cette considération, de trouver que l'action mutuelle de deux éléments est en effet proportionnelle à la formule par laquelle je l'ai représentée, cette explication du fait fondamental de toute la théorie des phénomènes électro-dynamiques devrait évidemment être préférée à toute autre; mais elle exigerait des recherches dont je n'ai point eu le temps de m'occuper, non plus que des recherches plus difficiles encore auxquelles il faudrait se livrer pour voir si l'explication contraire, où l'on attribue les phénomènes électro-dynamiques aux mouvements imprimés à l'éther par les courants électriques, peut conduire à la même formule. Quoi qu'il en soit de ces hypothèses et des autres

suppositions qu'on peut faire pour expliquer ces phénomènes, ils seront toujours représentés par la formule que j'ai déduite des résultats de l'expérience, interprétés par le calcul; et il restera mathématiquement démontré, qu'en considérant les aimants comme des assemblages de courants électriques disposés autour de leurs particules ainsi que je l'ai dit, les valeurs des forces qui sont, dans chaque cas, données par l'expérience, et toutes les circonstances des trois sortes d'actions qui ont lieu, l'une entre deux aimants, une autre entre un fil conducteur et un aimant, et la troisième entre deux fils conducteurs, se déduisent d'une force unique, agissant entre deux éléments de courants électriques suivant la droite qui en joint les milieux.

Quant à l'expression même de cette force, elle est une des plus simples parmi celles qui ne dépendent pas seulement de la distance, mais encore des directions des deux éléments; car ces directions n'y entrent qu'en ce qu'elle contient la seconde différentielle de la racine carrée de la distance des deux éléments, prise en faisant varier alternativement les deux arcs de courants électriques dont cette distance est une fonction, différentielle qui dépend elle-même des directions des deux éléments, et qui entre d'ailleurs dans la valeur donnée par ma formule d'une manière très-simple, puisqu'on a pour cette valeur la seconde différentielle ainsi définie, multipliée par un coefficient constant et divisée par la racine carrée de la distance, en observant que la force est répulsive quand la seconde différentielle est positive, et attractive quand elle est négative. C'est ce qu'exprime le signe — qui se trouve au-devant de l'expression générale

$$-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \cdot \frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\,ds\,ds'$$

de cette force, d'après l'usage où l'on est de regarder les attractions comme des forces positives, et les répulsions comme des forces négatives.

Les époques où l'on a ramené à un principe unique des phénomènes considérés auparavant comme dus à des causes absolument différentes, ont été presque toujours accompagnées de la découverte d'un grand nombre de nouveaux faits, parce qu'une nouvelle manière de concevoir les causes suggère une multitude d'expériences à tenter, d'explications à vérifier; c'est ainsi que la démonstration donnée par Volta de l'identité du galvanisme et de l'électricité a été accompagnée de la construction de la pile, et suivie de toutes les découvertes qu'a enfantées cet admirable instrument. A en juger par les résultats si importants des travaux de M. Becquerel, sur l'influence de l'électricité dans les combinaisons chimiques, et de ceux de MM. Prévost et Dumas sur les causes des contractions musculaires, on peut espérer que tant de faits nouveaux découverts depuis quatre ans, et leur réduction à un principe unique, aux lois des forces attractives et répulsives observées entre les conducteurs des courants électriques, seront aussi suivis d'une foule d'autres résultats qui établiront entre la physique d'une part, la chimie et même la physiologie de l'autre, la liaison dont on sentait le besoin sans pouvoir se flatter de parvenir de long-temps à la réaliser.

Il nous reste maintenant à nous occuper des actions qu'un circuit fermé, quelles que soient sa forme, sa grandeur et sa position, exerce, soit sur un solénoïde, soit sur un autre circuit d'une forme, d'une grandeur et d'une position quelconques; le principal résultat de ces recherches consiste dans l'analogie qui existe entre les forces produites par ce circuit, soit qu'il agisse sur un autre circuit fermé ou sur

un solénoïde, et les forces qu'exerceraient des points dont l'action serait précisément celle qu'on attribue aux molécules de ce qu'on appelle fluide austral et fluide boréal ; ces points étant distribués de la manière que je vais expliquer sur des surfaces terminées par les circuits, et les extrémités du solénoïde étant remplacées par deux molécules magnétiques d'espèces opposées. Cette analogie paraît d'abord si complète, que tous les phénomènes électrodynamiques semblent être ainsi ramenés à la théorie où l'on admet ces deux fluides; mais on reconnaît bientôt qu'elle n'a lieu qu'à l'égard des conducteurs voltaïques qui forment des circuits solides et fermés, qu'il n'y a que ceux de ces phénomènes qui sont produits par des conducteurs formant de tels circuits dont on puisse rendre raison de cette manière, et qu'enfin les forces qu'exprime ma formule peuvent seules s'accorder avec l'ensemble des faits. C'est, d'ailleurs, de cette même analogie que je déduirai la démonstration d'un théorème important qu'on peut énoncer ainsi : l'action mutuelle de deux circuits solides et fermés, ou celle d'un circuit solide et fermé et d'un aimant, ne peut jamais produire de mouvement continu avec une vitesse qui s'accélère indéfiniment jusqu'à ce que les résistances et les frottements des appareils rendent cette vitesse constante.

Afin de ne rien laisser à désirer sur ce sujet, je commencerai par donner aux formules relatives à l'action mutuelle de deux fils conducteurs une forme plus générale et plus symétrique. Soient pour cela s et s' deux courbes quelconques qu'on suppose parcourues par des courants électriques dont nous continuerons à désigner les intensités par i et i'. Soit $ds = Mm$ (fig. 38) un élément de la première courbe, $ds' = M'm'$ un élément de la seconde; x, y, z et x', y', z' les

coordonnées de leurs milieux o, o', et r la droite oo' qui les joint, laquelle doit être considérée comme une fonction des deux variables indépendantes s et s' qui représentent les arcs des deux courbes comptés à partir de deux points fixes pris sur elles. L'action mutuelle des deux éléments ds, ds', est, comme nous l'avons vu plus haut, une force dirigée suivant la droite r, et ayant pour valeur

$$-ii'dsds'r^k \frac{d\left(r^k \frac{dr}{ds}\right)}{ds'}.$$

On peut l'écrire plus simplement de cette manière :

$$-ii'r^k d'(r^k dr),$$

en distinguant par les caractéristiques d et d' les différentielles relatives à la variation des seules coordonnées x, y, z de l'élément ds, de celles qu'on obtient en faisant varier seulement les coordonnées x', y', z' de l'élément ds'; distinction dont nous nous servirons toutes les fois que nous aurons à considérer des différentielles prises les unes d'une de ces deux manières, et les autres de l'autre.

Cette force étant attractive, il faut, pour avoir celle de ses composantes qui est parallèle à l'axe des x, en multiplier la valeur par $\frac{x-x'}{r}$ ou par $-\frac{x-x'}{r}$, suivant qu'on la considère comme agissant sur l'élément ds' ou sur l'élément ds; dans ce dernier cas, la composante est donc égale à

$$ii'r^{k-1}(x-x')d'(r^k dr).$$

On peut mettre cette expression sous une autre forme en faisant usage de la valeur qu'on obtient pour udv, u et v

représentant des quantités quelconques, lorsqu'on ajoute, membre à membre, les deux équations identiques

$$u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}(uv),$$
$$u\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}u = u^2\,\mathrm{d}\left(\frac{v}{u}\right),$$

cette valeur est

$$u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(uv) + \frac{1}{2}u^2\,\mathrm{d}\frac{v}{u},$$

et en faisant

$$u = r^{k-1}(x-x'), v = r^k\,\mathrm{d}r,$$

on en conclut

$$r^{k-1}(x-x')\,\mathrm{d}'(r^k\,\mathrm{d}r) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}'[r^{2k-1}(x-x')\,\mathrm{d}r] +$$

$$\frac{1}{2}r^{2k-2}(x-x')^2\,\mathrm{d}'\frac{r\,\mathrm{d}r}{x-x'} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}'\frac{(x-x')\,\mathrm{d}r}{r^n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-x')^2}{r^{n+1}}\,\mathrm{d}'\frac{r\,\mathrm{d}r}{x-x'},$$

puisque $2k+n=1$, ce qui donne

$$2k-1 = -n, 2k-2 = -n-1.$$

Mais

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

et par conséquent

$$\frac{r\,\mathrm{d}r}{x-x'} = \mathrm{d}x + \frac{y-y'}{x-x'}\,\mathrm{d}y + \frac{z-z'}{x-x'}\,\mathrm{d}z,$$

d'où

$$\mathrm{d}'\frac{r\,\mathrm{d}r}{x-x'} = \frac{(z-z')\,\mathrm{d}x' - (x-x')\,\mathrm{d}z'}{(x-x')^2}\,\mathrm{d}z - \frac{(x-x')\,\mathrm{d}y' - (y-y')\,\mathrm{d}x'}{(x-x')^2}\,\mathrm{d}y.$$

La composante parallèle à l'axe des x a donc pour valeur

$$\frac{1}{2} ii' \mathrm{d}' \frac{(x-x')\,\mathrm{d}r}{r^n} + \frac{1}{2} ii' \left[\frac{(z-z')\,\mathrm{d}x' - (x-x')\,\mathrm{d}z'}{r^{n+1}} \mathrm{d}z - \frac{(x-x')\,\mathrm{d}y' - (y-y')\,\mathrm{d}x'}{r^{n+1}} \mathrm{d}y \right].$$

Les deux termes de cette expression peuvent être considérés séparément comme deux forces dont la réunion équivaut à la force cherchée. Or, il est aisé de voir que quand la courbe s' forme un circuit fermé, toutes les forces telles que celle qui a pour expression la partie $\frac{1}{2} ii' \mathrm{d}' \frac{(x-x')\,\mathrm{d}r}{r^n}$, provenant de l'action de tous les éléments $\mathrm{d}s'$ du circuit s' sur le même élément $\mathrm{d}s$, se détruisent mutuellement. En effet, toutes ces forces sont appliquées au même point o, milieu de l'élément $\mathrm{d}s$, suivant une même droite parallèle à l'axe des x; il faut donc, pour avoir la force produite suivant cette droite par l'action d'une portion quelconque du conducteur s', intégrer $\frac{1}{2} ii' \mathrm{d}' \frac{(x-x')\,\mathrm{d}r}{r^n}$ d'une des extrémités de cette portion à l'autre, et l'on trouve

$$\frac{1}{2} ii' \left[\frac{(x-x'_2)\,\mathrm{d}r_2}{r_2^n} - \frac{x-x'_1\,\mathrm{d}r_1}{r_1^n} \right];$$

en nommant x'_1, r_1, $\mathrm{d}r_1$, les quantités qui se rapportent à une extrémité, et x'_2, r_2, $\mathrm{d}r_2$ celles qui sont relatives à l'autre, cette valeur devient évidemment nulle quand, le circuit étant fermé, ses deux extrémités sont au même point.

Quand le conducteur s' forme ainsi un circuit fermé, il faut donc, pour avoir plus simplement l'action qu'il exerce sur l'élément $\mathrm{d}s$ parallèlement à l'axe des x, supprimer,

dans l'expression de la composante parallèle à cet axe, la partie $\frac{1}{2}ii'\frac{d'(x-x')\,dx}{r^n}$, et n'avoir égard qu'à l'autre partie

$$\frac{1}{2}ii'\left[\frac{(z-z')\,dx'-(x-x')\,dz'}{r^{n+1}}dz-\frac{(x-x')\,dy'-(y-y')\,dx'}{r^{n+1}}dy\right]$$

que nous représenterons par X.

En appliquant les mêmes considérations aux deux autres composantes de la même force qui sont parallèles aux axes des y et des z, on leur substituera des forces Y, Z, ayant pour valeurs

$$Y=\frac{1}{2}ii'\left[\frac{(x-x')\,dy'-(y-y')\,dx'}{r^{n+1}}dx-\frac{(y-y')\,dz'-(z-z')\,dy'}{r^{n+1}}dz\right],$$

$$Z=\frac{1}{2}ii'\left[\frac{(y-y')\,dz'-(z-z')\,dy'}{r^{n+1}}dy-\frac{(z-z')\,dx'-(x-x')\,dz'}{r^{n+1}}dx\right].$$

Ainsi, lorsqu'il s'agit d'un circuit fermé, la résultante R des trois forces X, Y, Z, auxquelles sont réduites les composantes de la force $-ii'r^k d'(r^k dr)$, remplace cette force; et l'ensemble de toutes les forces R est équivalent à celui de toutes les forces exercées par chacun des éléments ds', du circuit fermé s', et représente l'action totale de ce circuit sur l'élément ds. Voyons maintenant quelle est la valeur et la direction de cette force R.

Soient u, v, w, les projections de la ligne r sur les plans des yz, des xz et des xy, faisant respectivement les angles φ, χ, ψ, avec les axes des y, des z et des x. Considérons le secteur $M'om'$ (fig. 38), qui a pour base l'élément ds', et pour sommet le point o milieu de ds, dont les coordonnées sont x, y, z. Appelons λ, μ, ν les angles que fait avec les axes la normale au plan de ce secteur, et θ' l'angle compris entre

les directions de ds' et de r. Le double de l'aire de ce secteur est $r ds' \sin.\theta'$, et ses projections sur les plans des coordonnées sont

$$u^2 d'\varphi = r ds' \sin.\theta' \cos.\lambda = (y'-y)dz' - (z'-z)dy',$$
$$v^2 d'\chi = r ds' \sin.\theta' \cos.\mu = (z'-z)dx' - (x'-x)dz',$$
$$w^2 d'\psi = r ds' \sin.\theta' \cos.\nu = (x'-x)dy' - (y'-y)dx'.$$

On peut donc donner cette nouvelle forme aux valeurs des forces X, Y, Z,

$$X = \frac{1}{2} ii' \left(\frac{v^2 d'\chi}{r^{n+1}} dz - \frac{w^2 d'\psi}{r^{n+1}} dy\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ii' ds ds' \sin.\theta'}{r^n} \left(\frac{dz}{ds}\cos.\mu - \frac{dy}{ds}\cos.\nu\right),$$
$$Y = \frac{1}{2} ii' \left(\frac{w^2 d'\psi}{r^{n+1}} dx - \frac{u^2 d'\varphi}{r^{n+1}} dz\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ii' ds ds' \sin.\theta'}{r^n} \left(\frac{dx}{ds}\cos\nu - \frac{dz}{ds}\cos.\lambda\right),$$
$$Z = \frac{1}{2} ii' \left(\frac{u^2 d'\varphi}{r^{n+1}} dy - \frac{v^2 d'\chi}{r^{n+1}} dx\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ii' ds ds' \sin.\theta'}{r^n} \left(\frac{dy}{ds}\cos.\lambda - \frac{dx}{ds}\cos.\mu\right).$$

Or ces valeurs donnent

$$X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = 0,$$
$$X\cos.\lambda + Y\cos.\mu + Z\cos.\nu = 0;$$

c'est-à-dire que la direction de la force R fait avec celle de l'élément $mM = ds$, et avec la normale op au plan du secteur $M'om'$, des angles dont les cosinus sont zéro, de sorte que cette force est à la fois dans le plan du secteur et perpendiculaire à l'élément ds. Quant à son intensité, on a par les formules connues

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ii' ds ds' \sin.\theta' \sin.pom}{r^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ii' ds ds' \sin.\theta' \cos.mok}{r^n};$$

ok étant la projection de om sur le plan du secteur $M'om'$. On peut décomposer cette force dans le plan du même secteur en deux autres, l'une S dirigée suivant la ligne $oo'=r$, l'autre T perpendiculaire à cette ligne. Celle-ci est

$$T = R\cos.\, ToR = R\cos.\, hok = \frac{1}{2} \cdot \frac{ii'\,ds\,ds'\sin.\theta'\cos.\,mok\cos.\,hok}{r^n};$$

et comme l'angle trièdre formé par les directions de om, ok et oh donne

$$\cos.\,mok\cos.\,hok = \cos.\,moh = \cos.\,\theta,$$

il vient

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{ii'\,ds\,ds'\sin.\theta'\cos.\theta}{r^n}.$$

La force S suivant oh est

$$S = R\sin.\,hok = T\,\text{tang}.\,hok.$$

Mais en désignant par ω l'inclinaison du plan moh sur le plan hok, qui est celui du secteur $M'om'$, on a

$$\text{tang}.\,hok = \text{tang}.\,\theta\cos.\,\omega;$$

ainsi

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{ii'\,ds\,ds'\sin.\theta\sin.\theta'\cos.\omega}{r^n}.$$

Si l'on intègre les expressions de X, Y, Z pour toute l'étendue du circuit fermé s', on aura les trois composantes de l'action exercée par tout ce circuit sur l'élément ds; en remplaçant n par sa valeur 2, celles des trois composantes deviennent

$$\frac{1}{2}ii'\left(dz\int\frac{v^2 d'\chi}{r^3}-dy\int\frac{w^2 d'\psi}{r^3}\right),$$
$$\frac{1}{2}ii'\left(dx\int\frac{w^2 d'\psi}{r^3}-dz\int\frac{u^2 d'\varphi}{r^3}\right),$$
$$\frac{1}{2}ii'\left(dy\int\frac{u^2 d'\varphi}{r^3}-dx\int\frac{v^2 d'\chi}{r^3}\right).$$

Des forces semblables appliquées à tous les éléments ds de la courbe s donneront l'action totale exercée par le circuit s' sur le circuit s. On les obtiendra en intégrant de nouveau les expressions précédentes dans toute l'étendue de ce dernier circuit.

Concevons maintenant deux surfaces prises à volonté σ, σ', terminées par les deux contours s, s', dont tous les points soient liés invariablement entre eux et avec tous ceux de la surface correspondante, et sur ces surfaces des couches infiniment minces d'un même fluide magnétique qui y soit retenu par une force coercitive suffisante pour qu'il ne puisse point s'y déplacer. En considérant sur ces deux surfaces deux portions infiniment petites du second ordre que nous représenterons par $d^2\sigma$ et $d^2\sigma'$, dont les positions soient déterminées par les coordonnées x, y, z pour la première, x', y', z' pour la seconde, et dont la distance soit r, leur action mutuelle sera une force répulsive dirigée suivant la ligne r et représentée par $\frac{\mu\varepsilon\varepsilon' d^2\sigma\, d^2\sigma'}{r^2}$; $\varepsilon, \varepsilon'$ désignent ici ce qu'on appelle l'épaisseur de la couche magnétique sur chaque surface ; μ est un coefficient constant, tel que $\mu\varepsilon\varepsilon'$ représente l'action répulsive qui aurait lieu, si l'on réunissait en deux points situés à une distance égale à l'unité, d'une part tout le fluide répandu sur une aire égale à l'unité de surface, où l'épaisseur serait

constante et égale à ε, de l'autre tout le fluide répandu sur une autre aire égale à l'unité de surface, où l'épaisseur serait aussi constante et égale à ε'.

En décomposant cette force parallèlement aux trois axes, on a les trois composantes

$$\frac{\mu\varepsilon\varepsilon' d^2\sigma d^2\sigma'(x-x')}{r^3}, \frac{\mu\varepsilon\varepsilon' d^2\sigma d^2\sigma'(y-y')}{r^3}, \frac{\mu\varepsilon\varepsilon' d^2\sigma d^2\sigma'(z-z')}{r^3}.$$

Concevons maintenant une nouvelle surface terminée par le même contour s qui limite la surface σ, et telle que toutes les portions de normales de la surface σ comprises entre elle et la nouvelle surface soient très-petites. Supposons que sur cette dernière surface soit distribué le fluide magnétique de l'espèce contraire à celui de la surface σ, de manière qu'il y en ait sur la portion de la nouvelle surface circonscrite par les normales menées par tous les points du contour de l'élément de surface $d^2\sigma$ une quantité égale à celle du fluide répandu sur $d^2\sigma$. En nommant h la longueur de la petite portion de la normale à la surface σ, menée par le point dont les coordonnées sont x, y, z, et comprise entre les deux surfaces, laquelle mesure dans toute l'étendue de l'aire infiniment petite $d^2\sigma$ la distance de ses points aux points correspondants de l'autre surface, et en désignant par ξ, η, ζ les angles que cette normale fait avec les axes, les trois composantes de l'action mutuelle entre l'élément $d^2\sigma'$ et la petite portion de la nouvelle surface circonscrite comme nous venons de le dire, qui est toujours égale à $d^2\sigma$ tant que h est très-petit et qu'on néglige dans les calculs, comme nous le faisons ici, les puissances de h supérieures à la première s'obtiendront en remplaçant dans l'expression que nous venons de trou-

ver, x, y, z par $x+h\cos.\xi$, $y+h\cos.\eta$, $z+h\cos.\zeta$. Et comme les deux fluides répandus sur les deux aires égales à $d^2\sigma$ sont de nature contraire, il faudra retrancher les nouvelles valeurs de ces composantes des valeurs trouvées précédemment; ce qui se réduira, puisqu'on néglige les puissances de h supérieures à la première, à différentier ces valeurs, à remplacer dans le résultat les différentielles de x, y, z par $h\cos.\xi, h\cos.\eta, h\cos.\zeta$, et à en changer le signe. Ces différentielles étant prises en passant de la première surface σ à l'autre, nous les désignerons par δ, suivant la notation du calcul des variations; nous aurons ainsi pour la composante parallèle aux x ce que devient $-\mu\varepsilon\varepsilon' \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\sigma' \delta\frac{x-x'}{r^3}$, quand on y remplace δx par $h\cos.\xi$, c'est-à-dire

$$\mu\varepsilon\varepsilon' \mathrm{d}^2\sigma \mathrm{d}^2\sigma'.h\cos.\xi\left(\frac{3(x-x')\frac{\delta r}{\delta x}}{r^4}-\frac{1}{r^3}\right).$$

Nous allons maintenant déterminer la forme et la position de l'élément $d^2\sigma$.

Désignons comme précédemment par u, v, w les projections de la ligne r sur les plans des yz, des zx et des xy, et par φ, χ, ψ, les angles que ces projections font avec les axes des y, des z et des x respectivement. Décomposons la première surface σ en une infinité de zones infiniment étroites, telles que $abcd$ (fig. 42), par une suite de plans perpendiculaires au plan des yz menés par la coordonnée $m'p'=x$ du point m'. Chaque zone se terminant aux deux bords du contour s de la surface σ, aura pour projection sur le plan des yz une aire décomposable elle-même en éléments quadrangulaires infiniment petits, auxquels répondront autant

d'éléments de la surface σ sur la zone dont il s'agit. Ce sont ces éléments qu'on doit considérer comme les valeurs de $d^2\sigma$. Celui dont la position, à l'égard de l'élément $d^2\sigma'$, est déterminée par les coordonnées polaires r, u, φ, est égal à sa projection $u\,du\,d\varphi$ sur le plan des yz divisée par le cosinus de l'angle ξ compris entre ce plan et le plan tangent à la surface σ avec lequel coïncide l'élément $d^2\sigma$. Il faudra donc remplacer $d^2\sigma$ par $\frac{u\,du\,d\varphi}{\cos.\,\xi}$ dans la formule précédente, et l'on aura

$$\mu h \varepsilon\varepsilon' d^2\sigma' u\,du\,d\varphi \left(\frac{3(x-x')\frac{\delta r}{\delta x}}{r^4} - \frac{1}{r^3} \right).$$

Pour calculer la valeur de $(x-x')\frac{\delta r}{\delta x}$, soient mx le prolongement de la coordonnée $mp=x$ du point m où est situé l'élément $d^2\sigma$, mu une parallèle au plan des yz menée dans le plan $pmm'p'$, et mt perpendiculaire à ce dernier plan au point m. Il est aisé de voir que la droite mn, suivant laquelle $pmm'p'$ coupe le plan tangent en m, à la surface σ, fait avec les trois lignes mx, mu, mt, qui sont perpendiculaires entre elles, des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2+du^2}},\ \frac{du}{\sqrt{dx^2+du^2}} \text{ et } 0,$$

et que la normale mh fait avec les mêmes directions des angles dont les cosinus sont

$$\frac{\delta x}{\sqrt{\delta x^2+\delta^2+\delta t^2}},\ \frac{\delta u}{\sqrt{\delta x^2+\delta u^2+\delta t^2}},\ \frac{\delta t}{\sqrt{\delta x^2+\delta u^2+\delta t^2}},$$

δt tenant lieu de la projection de mh sur mt. On a donc

$$\frac{dx\,\delta x + \delta u\,\delta u}{\sqrt{dx^2 + du^2}\sqrt{\delta x^2 + \delta u^2 + \delta t^2}}$$

pour le cosinus de l'angle compris entre la droite mn et la normale mh, et puisque cet angle est droit, $dx\,\delta x + du\,\delta u = 0$, d'où $\frac{dx}{du} = -\frac{\delta u}{\delta x}$. Mais l'équation

$$r^2 = (x - x')^2 + u^2,$$

donne

$$r\,\delta r = (x - x')\,\delta x + u\,\delta u,$$

et

$$r\,dr = u\,du + (x - x')\,dx,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\delta r}{\delta x} = \frac{x - x'}{r} + \frac{u}{r}\cdot\frac{\delta u}{\delta x},$$

et

$$\frac{dr}{du} = \frac{u}{r} + \frac{x - x'}{r}\cdot\frac{dx}{du} = \frac{u}{r} - \frac{x - x'}{r}\cdot\frac{\delta u}{\delta x};$$

en éliminant $\frac{\delta u}{\delta x}$ entre ces deux équations, il vient

$$(x - x')\frac{\delta r}{\delta x} + u\frac{dr}{du} = \frac{(x - x)^2}{r} + \frac{u^2}{r} = r.$$

Si nous tirons maintenant de cette équation la valeur de $(x - x')\frac{\delta r}{\delta x}$ pour la substituer dans celle de la force parallèle à l'axe des x, nous aurons

$$\mu h \varepsilon\varepsilon' u\,du\,d\varphi\left(\frac{3r - 3u\frac{dr}{du}}{r^4} - \frac{1}{r^3}\right) =$$

$$\mu h \varepsilon\varepsilon' d\varphi\left(\frac{2u\,du}{r^3} - \frac{3u^2\,dr}{r^4}\right) = \mu h \varepsilon\varepsilon' d\varphi\, d\frac{u^2}{r^3}.$$

La hauteur h et l'épaisseur ε de la couche de fluide infiniment mince répandue sur la surface σ, peuvent varier d'un point de cette surface à un autre ; et pour atteindre le but que nous nous proposons de représenter à l'aide des fluides magnétiques, les actions qu'exercent les conducteurs voltaïques, il faut supposer que ces deux quantités ε, h, varient en raison inverse l'une de l'autre, de manière que leur produit $h\varepsilon$ conserve la même valeur dans toute l'étendue de la surface σ. En appelant g la valeur constante de ce produit, l'expression précédente devient

$$\mu g \varepsilon' \mathrm{d}^2\sigma' \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\frac{u^2}{r^3}$$

et s'intègre immédiatement. Son intégrale $\mu g \varepsilon' d^2\sigma' \mathrm{d}\varphi \left(\frac{u^2}{r^3} - \mathrm{C}\right)$ exprime la somme des forces parallèles à l'axe des x qui agissent sur les éléments $d^2\sigma$ de la zone de la surface σ renfermée entre les deux plans menés par $m'p'$ qui comprennent l'angle $d\varphi$. La surface σ étant terminée par le contour fermé s, il faut prendre cette intégrale entre les limites déterminées par les deux éléments ab, cd de ce contour qui sont compris dans l'angle $d\varphi$ des deux plans dont nous venons de parler, en sorte qu'en nommant u_1, r_1, et u_2, r_2 les valeurs de u et de r relatives à ces deux éléments, on a

$$\mu g \varepsilon' \mathrm{d}^2\sigma' \,\mathrm{d}\varphi \left(\frac{u_2^2}{r_2^3} - \frac{u_1^2}{r_1^3}\right)$$

pour la somme de toutes les forces exercées par l'élément $d^2\sigma'$ sur la zone parallèlement à l'axe des x.

Si la surface σ, au lieu d'être terminée par un contour, renfermait de tous côtés un espace de figure quelconque, la zone de cette surface comprise dans l'angle dièdre φ serait

fermée, et l'on aurait $u_2 = u_1$, $r_2 = r_1$; en sorte que l'action exercée sur cette zone parallèlement à l'axe des x serait nulle, et par conséquent aussi celle que l'élément $d^2\sigma'$ exercerait sur toute la surface σ composée alors de semblables zones. Et comme la même chose aurait lieu relativement aux forces parallèles aux axes des y et des z, on voit que l'assemblage de deux surfaces très-rapprochées l'une de l'autre, renfermant de tous côtés un espace de forme quelconque, et couvertes, de la manière que nous venons de le dire, l'une de fluide austral, l'autre de fluide boréal, est sans action sur une molécule magnétique, en quelque endroit qu'elle soit placée, et par conséquent sur un corps aimanté de quelque manière que ce soit. Reprenons l'expression précédente

$$\mu g \varepsilon' \mathrm{d}^2\sigma' \left(\frac{u_2^2 \mathrm{d}\varphi}{r_2^3} - \frac{u_1^2 \mathrm{d}\varphi}{r_1^3}\right),$$

et il nous sera aisé de voir que, pour avoir la somme totale des forces parallèles à l'axe des x que l'élément $d^2\sigma'$ exerce sur la surface entière σ, il faut intégrer, par rapport à φ, les deux parties dont se compose cette expression, respectivement dans les deux portions $AabB$, $BabA$ du contour s, déterminées par les deux plans tangents $p'm'A$, $p'm'B$, menés par la ligne $m'p'$. Mais il revient au même d'intégrer $\mu g \varepsilon' \mathrm{d}^2\sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3}$ dans toute l'étendue du circuit s; car si l'on met pour u et φ leurs valeurs en fonctions de r déduites des équations de la courbe s, on voit qu'en passant de la partie $AabB$ à la partie $BcdA$, $\mathrm{d}\varphi$ change de signe, et que par conséquent les éléments de l'une de ces parties sont d'un signe contraire à ceux de l'autre.

D'après cela, si nous désignons par X la somme des forces

parallèles aux x qu'exerce l'élément $d^2\sigma'$ sur l'assemblage des deux surfaces terminées par le même contour s, nous aurons

$$X=\mu g\varepsilon' d^2\sigma'\int\frac{u^2\,d\varphi}{r^3},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$X=\mu g\varepsilon' d^2\sigma'\int\frac{(y-y')\,dz-(z-z')\,dy}{r^3},$$

les x, y, z n'étant relatifs qu'au contour s.

On aura de même, en désignant par Y et Z les sommes des forces parallèles aux y et aux z qui agissent sur le même assemblage de surfaces,

$$Y=\mu g\varepsilon' d^2\sigma'\int\frac{v^2\,d\chi}{r^3}=g\mu\varepsilon' d^2\sigma'\int\frac{(z-z')\,dx-(x-x')\,dz}{r^3},$$

$$Z=\mu g\varepsilon' d^2\sigma'\int\frac{w^2\,d\psi}{r^3}=g\mu\varepsilon' d^2\sigma'\int\frac{(x-x')\,dy-(y-y')\,dx}{r^3}, \text{ (1)}.$$

Comme toutes les forces élémentaires qu'exerce l'élément $d^2\sigma'$ sur ces surfaces passent par le point m' où il est situé, on voit que toutes ces forces ont une résultante unique dont la direction passe par le même point m', et dont les composantes parallèles aux axes sont X, Y, Z. Les moments de cette résultante par rapport aux mêmes axes sont donc

$$Yz'-Zy',\ Zx'-Xz',\ Xy'-Yx'.$$

Supposons maintenant qu'au lieu de ces forces on applique

---

(1) Il est inutile de remarquer que ces X, Y, Z expriment des forces toutes différentes de celles que nous avons déja désignées par les mêmes lettres, lorsqu'il s'agissait de l'action mutuelle de deux éléments de circuits voltaïques.

au milieu de chacun des éléments ds du contour s une force égale à $\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{ds \sin.\theta}{r^2}$, et perpendiculaire au plan du secteur qui a ds pour base, le point m' pour sommet, et dont l'aire est $\frac{1}{2} r ds \sin.\theta$. Les trois composantes de cette force étant respectivement égales à

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3}, \; \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{v^2 d\chi}{r^3}, \; \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{w^2 d\psi}{r^3},$$

parallèles à celles qui passent par l'élément $d^2\sigma$ et dirigées dans le même sens, on aura les mêmes valeurs pour les trois forces X, Y, Z qui tendent à mouvoir le circuit s; mais les sommes des moments de rotation qui en résulteront, au lieu d'être représentées par

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(z' \int \frac{v^2 d\chi}{r^3} - y' \int \frac{w^2 d\psi}{r^3} \right), \; \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(x' \int \frac{w^2 d\psi}{r^3} - z' \int \frac{u^2 d\varphi}{r^3} \right),$$
$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(y' \int \frac{u^2 d\varphi}{r^3} - x' \int \frac{v^2 d\chi}{r^3} \right),$$

le seront par

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(\int \frac{z v^2 d\chi}{r^3} - \int \frac{y w^2 d\psi}{r^3} \right), \; \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(\int \frac{x w^2 d\psi}{r^3} - \int \frac{z u^2 d\varphi}{r^3} \right),$$
$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(\int \frac{y u^2 d\varphi}{r^3} - \int \frac{x v^2 d\chi}{r^3} \right).$$

Il semble d'abord que ce changement en doit apporter un à l'action exercée sur le contour s, mais il n'en est pas ainsi pourvu que ce contour forme un circuit fermé, car si l'on retranche la première somme de moments, relative à l'axe des x par exemple, de la quatrième qui se rapporte au même axe, en faisant attention que x', y', z' doivent être considérées comme des constantes dans ces intégrations, on aura

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{(z - z') v^2 d\chi - (y - y') w^2 d\psi}{r^3} =$$

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{(z-z')^2 dx - (z-z')(x-x') dz - (y-y')(x-x') dy + (y-y')^2 dx}{r^3} =$$

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{[(z-z')^2 + (y-y')^2] dx - (x-x')[(z-z') dz + (y-y') dy]}{r^3} =$$

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{[r^2 - (x-x')^2] dx - (x-x')[r dr - (x-x') dx]}{r^3} =$$

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \left[\frac{r dx - (x-x') dr}{r^2}\right] = \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \left(\frac{x_2 - x'}{r_2} - \frac{x_1 - x'}{r_1}\right),$$

en nommant x_1, x_2, et r_1, r_2 les valeurs de x et de r aux deux extrémités de l'arc s pour lequel on calcule la valeur de la différence des deux moments. Quand cet arc forme un circuit fermé, il est évident que $x_2 = x_1$, $r_2 = r_1$, ce qui rend nulle l'intégrale ainsi obtenue; on a donc alors

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \int \frac{z v^2 d\chi - y w^2 d\psi}{r^3} = \mu g\varepsilon' d^2 s' \left(z' \int \frac{v^2 d\chi}{r^3} - y' \int \frac{w^2 d\psi}{r^3}\right).$$

On trouve par un calcul semblable que les moments relatifs aux deux autres axes sont les mêmes, pour un circuit fermé, soit qu'on suppose que les directions des forces

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3},\ \mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{v^2 d\chi}{r^3},\ \mu g\mu\varepsilon' d^2\sigma' \frac{w^2 d\psi}{r^3}$$

passent par l'élément $d^2\sigma'$ ou par le milieu de ds; d'où il suit que dans ces deux cas l'action qui a lieu sur le contour s est exactement la même, ce contour étant invariablement lié aux deux surfaces très-voisines qu'il termine: l'action exercée sur ces deux surfaces par l'élément $d^2\sigma'$ se réduira donc, pourvu que le contour s soit une courbe fermée, aux forces appliquées comme nous venons de le dire à chacun des éléments de ce contour, celle qui agit sur l'élément ds ayant pour valeur

$$\mu g\varepsilon' d^2\sigma' \frac{ds \sin. \theta}{r^2}.$$

La force appliquée au milieu o de l'élément $ab = ds$, qui est proportionnelle à $ds \sin.\theta$ divisé par le carré de la distance r de cet élément au point m', et dont la direction est perpendiculaire au plan qui passe par l'élément ab et par le point m', est précisément celle qu'exerce, comme nous l'avons vu, sur l'élément ds l'extrémité d'un solénoïde électro-dynamique indéfini lorsqu'on place cette extrémité au point m'; c'est aussi celle qui est produite, d'après les dernières expériences de M. Biot, par l'action mutuelle de l'élément ab, et d'une molécule magnétique située en m'.

Mais en donnant à cette force la même valeur et la même direction perpendiculaire au plan $m'ab$, qu'on doit lui donner lorsqu'on la détermine, comme je l'ai fait, en remplaçant la molécule magnétique par l'extrémité d'un solénoïde indéfini, M. Biot suppose que c'est en m' que se trouve son point d'application, ou plutôt celui de la force égale et opposée que l'élément ds exerce sur le point m', car c'est à cette dernière que se rapportent les expériences qu'il a faites; au lieu que la direction de la force exercée par cet élément sur l'extrémité située en m' d'un solénoïde indéfini doit passer par le point m, comme celle que le solénoïde exerce sur l'élément, quand on conclut cette force de ma formule. Ainsi, en conservant les notations que nous employons, et en représentant, pour abréger, par ρ le coëfficient constant $g\mu\varepsilon' d^2\sigma'$, les sommes des moments, d'après la manière dont M. Biot place les points d'application des forces, seraient pour les trois axes et en changeant les signes, puisqu'il s'agit des forces qui agissent sur le point m',

$$-\rho \int \frac{z'v^2\, d\chi - y'w^2\, d\psi}{r^3},$$

$$-\rho\int\frac{x'w^2\,d\psi - z'u^2\,d\varphi}{r^3},$$

$$-\rho\int\frac{y'u^2\,d\varphi - x'v^2\,d\chi}{r^3};$$

tandis qu'en prenant les points d'application comme je les trouve, on a pour ces sommes de moments

$$-\rho\int\frac{zv^2\,d\chi - yw^2\,d\psi}{r^3},$$

$$-\rho\int\frac{xw^2\,d\psi - zu^2\,d\varphi}{r^3},$$

$$-\rho\int\frac{yu^2\,d\varphi - xv^2\,d\chi}{r^3}.$$

Mais nous venons de voir que ces dernières valeurs sont respectivement égales aux trois précédentes, quand la portion de conducteur forme un circuit fermé; d'où il suit que dans ce cas, l'expérience ne peut décider si le point d'application des forces est réellement au point m' ou au milieu m de l'élément ds. Et comme, dans celles qu'a faites l'habile physicien à qui l'on doit les expériences dont il est ici question, c'était en effet un circuit complètement fermé, composé de deux portions rectilignes formant un angle auquel il donnait successivement différentes valeurs, du reste du fil conducteur et de la pile, qu'il faisait agir sur un petit aimant, pour déduire le rapport des forces correspondantes aux diverses valeurs de cet angle des nombres d'oscillations du petit aimant, pendant un temps donné, qui correspondaient à ces diverses valeurs; dès-lors, les résultats des expériences faites de cette manière devant être identiquement les mêmes, soit qu'on suppose le point d'application des

forces en o ou en m', ne peuvent servir à décider laquelle de ces deux suppositions doit être préférée, cette question sur la situation du point d'application ne peut être résolue que par d'autres considérations; c'est pourquoi je pense qu'il est nécessaire, avant d'aller plus loin, de l'examiner avec quelques détails.

C'est dans le Mémoire que je lus à la séance du 4 décembre 1820, que je communiquai à l'Académie la formule fondamentale de toute la théorie exposée dans ce Mémoire, formule qui donne la valeur de l'action mutuelle de deux fils conducteurs exprimée ainsi :

$$\frac{ii'\,ds\,ds'\,(\sin.\theta\sin.\theta'\cos.\omega + k\cos.\theta\cos.\theta')}{r^2} \quad (1),$$

k étant un nombre constant, dont j'ai depuis déterminé la valeur, en prouvant, par d'autres expériences, qu'il est égal à $-\frac{1}{2}$.

Quelque temps après, dans la séance du 18 du même mois, M. Biot lut un Mémoire où il décrivait les expériences qu'il avait faites sur les oscillations d'un petit aimant soumis à l'action d'un conducteur angulaire, et où il concluait de ces expériences, par l'erreur de calcul exposée plus haut, que l'action de chaque élément du conducteur sur ce qu'on appelle une molécule magnétique, est représentée par une force perpendiculaire au plan mené par la molécule et par l'élément, en raison inverse du carré de leur distance, et proportionnelle au sinus de l'angle que la droite qui mesure

(1) Journal de physique, tome XCI, page 226—230.

cette distance forme avec la direction de l'élément. On voit par les calculs précédents, que cette force est précisément celle que donne ma formule pour l'action mutuelle d'un élément de fil conducteur et de l'extrémité d'un solénoïde électro-dynamique, et qu'elle est aussi celle qui résulte de la loi de Coulomb, dans l'hypothèse des deux fluides magnétiques, lorsqu'on cherche l'action qui a lieu entre une molécule magnétique et les éléments du contour qui termine deux surfaces infiniment voisines, recouvertes l'une de fluide austral, l'autre de fluide boréal, en supposant les molécules de ces fluides distribués sur les deux surfaces comme je viens de l'expliquer.

Dans ces deux manières de concevoir les choses, on trouve les mêmes valeurs pour les trois composantes, parallèles à trois axes pris à volonté, de la résultante de toutes les forces exercées par les éléments du contour, et, pour chacune de ces forces, l'action est opposée à la réaction suivant les droites qui joignent deux à deux les points entre lesquels elles s'exercent; il en est de même de la résultante elle-même et de sa réaction. Mais dans le premier cas, le point O (fig. 36) représente l'extrémité du solénoïde auquel appartiennent les points P, N, et o étant celui où est situé l'élément, les deux forces égales et opposées og, $o\gamma$ passent par cet élément; dans le second cas, au contraire, c'est en O qu'il faut concevoir placé l'élément du contour des surfaces recouvertes de molécules magnétiques P, N, et en o la molécule sur laquelle agissent ces surfaces, en sorte que les deux forces égales et opposées passent par la molécule. Tant qu'on admet qu'il ne peut y avoir d'action d'un point matériel sur un autre, sans que celui-ci réagisse sur le premier avec une force

égale et dirigée en sens contraire suivant une même droite, ce qui entraîne la même condition relativement à l'action et à la réaction de deux systèmes de points invariablement liés, on n'a à choisir qu'entre ces deux hypothèses. Et comme l'expérience de M. Faraday, sur la rotation d'une portion de fil conducteur autour d'un aimant, est, ainsi que je l'expliquerai tout-à-l'heure, en contradiction manifeste avec la première, il ne devait plus y avoir de difficulté à regarder, avec moi, comme seule admissible celle où l'on fait passer, par le milieu de l'élément, la droite suivant laquelle sont dirigées les deux forces. Mais plusieurs physiciens imaginèrent alors de supposer que, dans l'action mutuelle d'un élément AB (fig. 39) de fil conducteur et d'une molécule magnétique M, l'action et la réaction, quoique égales et dirigées en sens contraire, ne l'étaient pas suivant une même droite, mais suivant deux droites parallèles, en sorte que, la molécule M, agissant sur l'élément AB, tendrait à le mouvoir suivant la droite OR menée par le milieu O de l'élément AB perpendiculairement au plan MAB, et que l'action qu'exercerait réciproquement cet élément sur la molécule M tendrait à la porter, avec une force égale, dans la direction MS parallèle à OR.

Il résulterait de cette singulière hypothèse, si elle était vraie, qu'il serait mathématiquement impossible de ramener jamais les phénomènes produits par l'action mutuelle d'un fil conducteur et d'un aimant à des forces agissant, comme toutes celles dont on a reconnu jusqu'à présent l'existence dans la nature, de manière que l'action et la réaction soient égales et opposées dans la direction des droites qui joignent deux à deux les points entre lesquels elles s'exercent; car,

toutes les fois que cette condition est remplie pour des forces élémentaires quelconques, elle l'est évidemment, d'après le principe même de la composition des forces, pour leurs résultantes. Aussi, les physiciens qui ont adopté cette opinion sont-ils forcés d'admettre une action réellement élémentaire, consistant en deux forces égales dirigées en sens contraires suivant deux droites parallèles, et formant ainsi un couple primitif, qui ne peut être ramené à des forces pour lesquelles l'action et la réaction seraient opposées suivant une même droite. J'ai toujours regardé cette hypothèse des couples primitifs comme absolument contraire aux premières lois de la mécanique, parmi lesquelles on doit compter, avec Newton, l'égalité de l'action et de la réaction agissant en sens contraires suivant la même droite; et j'ai ramené les phénomènes qu'on observe quand un fil conducteur et un aimant agissent l'un sur l'autre, comme tous les autres phénomènes électro-dynamiques, à une action entre deux éléments de courants électriques, d'où résultent deux forces égales et opposées, dirigées toutes deux suivant la droite qui joint les deux éléments. Ce premier caractère des autres forces observées dans la nature se trouve ainsi justifié; et quant à celui qui consiste en ce que les forces que l'on considère comme réellement élémentaires soient en outre simplement fonctions des distances des points entre lesquels elles s'exercent, rien ne s'oppose, ainsi que je l'ai déja remarqué, à ce que la force, dont j'ai déterminé la valeur par des expériences précises, ne se ramène un jour à des forces élémentaires qui satisfassent aussi à cette seconde condition, pourvu qu'on fasse entrer dans le calcul le mouvement continuel, dans les fils conducteurs, des molécules électriques auxquelles ces dernières forces seraient inhéren-

tes. La considération de ces mouvements introduisant nécessairement dans la valeur de la force qui en résulterait entre deux éléments, outre leur distance, les angles qui déterminent les directions suivant lesquelles se meuvent les molécules électriques, et qui dépendent des directions mêmes de ces éléments; ce sont précisément ces angles, ou, ce qui revient au même, les différentielles de la distance des deux éléments considérée comme une fonction des arcs formés par les fils conducteurs, qui entrent seuls avec cette distance dans ma formule. Il ne faut pas oublier que, dans la manière de concevoir les choses qui me paraît seule admissible, les deux forces égales et opposées OR et OT sont des résultantes d'une infinité de forces égales et opposées deux à deux; OR est celle des forces On', Op', etc., qui passent toutes par le point O, en sorte que leur résultante OR y passe aussi, mais que OT est la résultante des forces Nn, Pp, etc., exercées par l'élément AB sur des points tels que N, P, etc., invariablement liés à l'extrémité M du solénoïde électro-dynamique par laquelle je suppose remplacé ce qu'on nomme une molécule magnétique. Ces points sont très-près de M quand ce solénoïde est très-petit, mais ils en sont toujours distincts, et c'est pourquoi leur résultante OT ne passe pas par le point M, mais par le point O vers lequel toutes les forces Nn, Pp, etc., sont dirigées.

On voit, par tout ce que nous venons de dire, qu'en conservant aux deux forces égales qui résultent de l'action mutuelle d'un fil conducteur et d'un aimant, et qui agissent l'une sur le fil dont l'élément AB fait partie, et l'autre sur l'aimant auquel appartient le point M, la même valeur, et la même direction perpendiculaire au plan MAB, on peut faire

trois hypothèses sur le point d'application de ces forces : dans la première, on suppose que les deux forces passent par le point M ; dans la seconde, qui est celle qui résulte de ma formule, les deux forces passent par le milieu O de l'élément ; dans la troisième, où les forces sont OR et MS, celle qui agit sur l'élément est appliquée au point O, et l'autre au point M. Ces trois hypothèses sont entièrement d'accord, 1° à l'égard de la valeur de ces forces qui sont également, dans toutes les trois, en raison inverse du carré de la distance MO, et en raison directe du sinus de l'angle MOB que la droite OM qui mesure cette distance fait avec l'élément AB; 2° à l'égard de la direction des mêmes forces, toujours perpendiculaire au plan MAB qui passe par la molécule et par la direction de l'élément: mais à l'égard de leurs points d'application, ils sont placés différemment pour les deux forces, dans les deux premières hypothèses; et il y a identité entre la première et la troisième seulement pour les forces qui agissent sur l'aimant, et entre la seconde et la troisième seulement pour les forces qui agissent sur le conducteur.

En vertu de l'identité des valeurs et des directions des forces qui a lieu dans les trois hypothèses, les composantes de leurs résultantes, prises parallèlement à trois axes quelconques, seront les mêmes; mais les moments de rotation, qui dépendent en outre des points d'application de ces forces, ne seront, en général, les mêmes, à l'égard des forces qui tendent à mouvoir l'aimant, que pour la première et la troisième, et, à l'égard des forces qui agissent sur le fil conducteur, que pour la seconde et la troisième.

Nous venons de voir que dans le cas où il est question de l'action d'une portion de fil conducteur, formant un

circuit fermé, les valeurs des moments sont les mêmes, soit qu'on prenne, pour chaque élément, le point d'application des forces en O ou en M; dans ce cas, donc, il y aura, en outre, identité pour les valeurs des moments dans les trois hypothèses.

Le mouvement d'un corps, dont toutes les parties sont invariablement liées entre elles, ne peut dépendre que des trois composantes parallèles à trois axes pris à volonté, et des trois moments autour des mêmes axes; d'où il suit qu'il y a identité complète dans les trois hypothèses pour le mouvement produit, soit dans l'aimant, soit dans le conducteur, lorsque celui-ci forme un circuit solide et fermé. C'est pourquoi l'impossibilité d'un mouvement indéfiniment accéléré, étant en général une suite nécessaire de la première hypothèse, puisque les forces élémentaires y sont simplement fonctions des distances des points entre lesquels elles s'exercent, il s'ensuit évidemment que ce mouvement est également impossible, dans les deux autres hypothèses, seulement lorsque le conducteur forme un circuit solide et fermé.

Il est aisé de voir, au reste, que la démonstration ainsi obtenue de l'impossibilité de produire un mouvement indéfiniment accéléré par l'action mutuelle d'un circuit électrique solide et fermé, et d'un aimant, n'est pas seulement une suite nécessaire de ma théorie, mais qu'elle résulte aussi, dans l'hypothèse des couples primitifs, de la seule valeur donnée par M. Biot pour la force perpendiculaire au plan MAB, ainsi que je l'ai démontré directement, avec tous les détails qu'on peut désirer, dans une lettre que j'ai écrite sur ce sujet à M. le docteur Gherardi. Si donc on avait pu produire un mouvement accéléré en faisant agir sur un aimant

un conducteur formant un circuit solide et fermé, ce n'aurait pas été seulement ma formule qui aurait été en défaut, mais encore celle qu'a donnée M. Biot, que toutes les observations faites depuis ont complétement démontrée, et dont les physiciens qui admettent l'hypothèse des couples primitifs n'ont jamais contesté l'exactitude.

Lorsqu'on rend mobile une portion du circuit voltaïque, on doit distinguer trois cas : celui où elle forme un circuit presque fermé (1); celui où ne pouvant que tourner autour d'un axe, elle a ses deux extrémités dans cet axe; celui où la portion mobile ne forme pas un circuit fermé, et où une de ses extrémités au moins parcourt un certain espace à mesure qu'elle se meut : ce dernier cas comprenant celui où cette portion est formée par un liquide conducteur.

Nous venons de voir que, dans le premier de ces trois cas, le mouvement que prend la portion mobile par l'action d'un aimant, est identiquement le même dans les trois hypothèses, et ne peut jamais s'accélérer indéfiniment, mais tend seulement à amener la portion mobile dans une position déterminée où elle s'arrête en équilibre après avoir quelque temps oscillé autour de cette position en vertu de la vitesse acquise.

Il en est de même du second, qui ne diffère du premier qu'en apparence : car si l'on ajoutait dans l'axe, un courant,

(1) Le circuit formé par une portion mobile de fil conducteur n'est jamais rigoureusement fermé, puisqu'il faut bien que ses deux extrémités communiquent séparément avec celles de la pile ; mais il est aisé de rendre l'intervalle qui les sépare assez petit pour qu'on puisse le considérer comme s'il était exactement fermé.

qui rejoignît les deux extrémités de la portion mobile, on aurait un circuit fermé sans avoir rien changé au moment de rotation autour de cet axe, puisque les moments des forces exercées sur le courant ajouté seraient évidemment nuls; d'où il suit que le mouvement de la portion mobile serait identiquement le même que celui du circuit fermé ainsi obtenu.

Mais lorsque la portion mobile ne forme pas un circuit fermé, et que ses deux extrémités ne sont pas dans un axe autour duquel elle serait assujettie à tourner, les moments produits par l'action, soit d'une molécule magnétique, soit de l'extrémité d'un solénoïde indéfini, ne sont plus les mêmes que dans la seconde et la troisième hypothèse, et ont une valeur différente dans la première. En prenant pour l'axe des x la droite autour de laquelle on suppose la portion mobile liée de manière à ne pouvoir que tourner autour de cette droite, et en conservant les dénominations que nous avons employées dans les calculs précédents, nous en conclurons que la valeur du moment de rotation produit par les forces qui agissent sur la portion mobile, serait

$$\rho\int\frac{z'\,v^2\,d\chi - y'\,w^2\,d\psi}{r^3},$$

dans la première hypothèse, et

$$\rho\int\frac{z'\,v^2\,d\chi - y'\,w^2\,d\psi}{r^3} + \rho\left(\frac{x_2 - x'}{r_2} - \frac{x_1 - x'}{r_1}\right)$$

dans les deux autres.

C'est à cette différence dans les valeurs du moment de rotation, qu'on doit la possibilité de prouver par l'expérience que la première hypothèse est en contradiction avec les

faits. Car si l'on considère un aimant comme réduit à deux molécules magnétiques d'une force comme infinie placées à ses deux pôles, et qu'après avoir mis dans une situation verticale la droite qui les joint, on assujettisse une portion de fil conducteur à tourner autour de cette droite prise pour l'axe des x, alors les deux moments de rotation relatifs aux deux pôles seront exprimés par la formule précédente en y remplaçant x', y', z', par x_1', y_1', z_1' pour un des pôles, et par x_2', y_2', z_2' pour l'autre, en ayant soin de changer de signe l'un de ces moments, le premier, par exemple, puisque les deux pôles sont nécessairement de natures opposées, l'un austral et l'autre boréal.

Quand les deux pôles sont, comme nous le supposons ici, situés sur l'axe des x, on a $y_1' = 0, y_2' = 0, z_1' = 0, z_2' = 0$, et les deux moments de rotation autour de l'axe des x deviennent nuls dans la première hypothèse : ce qu'il était facile de prévoir, puisque dans cette hypothèse les directions de toutes les forces appliquées au conducteur mobile passent par un des deux pôles et y rencontrent l'axe fixe, ce qui rend nécessairement nuls les moments de ces forces.

Dans les deux autres hypothèses, au contraire, où les directions des forces passent par les milieux des éléments, les parties des moments égales à ceux de la première hypothèse sont les seules qui s'évanouissent ; et lorsque après les avoir supprimées, on réunit ce qui reste de chaque moment, on a

$$\rho\left(\frac{x_2 - x'_2}{r_{2,2}} \qquad \frac{x_1 - x'_2}{r_{1,2}} - \frac{x_2 - x'_1}{r_{2,1}} + \frac{x_1 - x'_1}{r_{1,1}}\right),$$

en désignant par $r_{2,2}; r_{1,2}; r_{2,1}; r_{1,1}$ les distances des points dont les abscisses sont respectivement $x_2, x_2'; x_1, x_2'; x_2, x_1';$

x_1, x'_1. Il est aisé de voir que les quatre termes de la quantité qui est comprise entre les parenthèses dans cette expression, sont précisément les cosinus des angles que forment avec l'axe des x les droites qui mesurent les distances $r_{2,2}$; $r_{1,2}$; $r_{2,1}$; $r_{1,1}$: ce qui rend la valeur que nous venons de trouver pour le moment produit par l'action des deux pôles sur le conducteur mobile, identique à celle que nous avons déja obtenue pour celui qui résulte de l'action sur le même conducteur d'un solénoïde dont les extrémités seraient situées à ces pôles, et dont les courants électriques auraient une intensité i et des distances respectives telles qu'on eût

$$\frac{\lambda i i'}{2g} = \rho,$$

i' étant l'intensité du courant du conducteur.

Le moment de rotation étant toujours nul dans la première hypothèse, la portion mobile du circuit voltaïque ne tournerait jamais par l'action d'un aimant situé, comme nous venons de le dire, autour de l'axe de cet aimant; dans les deux autres hypothèses, elle doit au contraire tourner en vertu du moment de rotation dont nous venons de calculer la valeur, toujours la même, dans ces deux hypothèses. M. Faraday, qui a le premier produit ce mouvement, conséquence nécessaire des lois que j'avais établies sur l'action mutuelle des conducteurs voltaïques, et de la manière dont j'avais considéré les aimants comme des assemblages de courants électriques, a démontré par-là que la direction de l'action exercée par le pôle d'un aimant sur un élément de fil conducteur passe en effet par le milieu de l'élément, conformément à l'explication que j'ai donnée de cette action, et non par le pôle de l'aimant. Dès-lors l'ensemble des phé-

nomènes électro-dynamiques ne peut plus être expliqué par la substitution de l'action des molécules magnétiques australes et boréales, répandues de la manière que je viens de l'expliquer sur deux surfaces très-voisines et terminées par les fils conducteurs du circuit voltaïque, à la place de l'action, exprimée par ma formule, qu'exercent les courants de ces fils. Cette substitution ne peut avoir lieu que quand il s'agit de l'action des circuits solides et fermés, et sa principale utilité est de démontrer l'impossibilité d'un mouvement indéfiniment accéléré, soit par l'action mutuelle de deux conducteurs solides et fermés, soit par celle d'un conducteur de ce genre et d'un aimant.

Lorsque l'aimant est mobile, il faut aussi distinguer trois cas : celui où toutes les parties du circuit voltaïque qui agit sur cet aimant sont immobiles ; celui où quelques parties de ce circuit sont mobiles, mais sans liaison avec l'aimant, ces portions pouvant d'ailleurs être formées par un fil métallique, ou par un liquide conducteur ; enfin celui où une partie du courant passe par l'aimant, ou par une portion de conducteur liée à l'aimant.

Dans le premier cas, le circuit total composé des conducteurs et de la pile, est nécessairement fermé ; et puisque toutes ses parties sont immobiles, les trois sommes des moments des forces exercées sur les points de l'aimant considérés, soit comme des molécules de fluide austral ou boréal, soit comme des extrémités de solénoïdes électro-dynamiques, sont identiques dans les trois hypothèses, ainsi que le sont les résultantes mêmes de ces forces ; en sorte que les mouvements imprimés à l'aimant, et toutes les circonstances de ces mouvements, sont précisément les mêmes, quelle que soit

celle de ces hypothèses qu'on adopte. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour la durée des oscillations faites par l'aimant, sous l'influence de ce circuit fermé et immobile; et c'est pour cela que les dernières expériences de M. Biot, d'où il résulte que la force qui produit ces oscillations est proportionnelle à la tangente du quart de l'angle que forment les deux branches du conducteur qu'il emploie, s'accordent aussi bien avec cette conséquence de ma théorie que les directions des forces qui agissent sur l'aimant passent par les milieux des éléments du fil conducteur, qu'avec l'hypothèse qu'il a adoptée et dans laquelle il admet que ces directions passent par les points de l'aimant où il place les molécules magnétiques.

L'identité qui a lieu dans ce cas entre les trois hypothèses, montre en même temps l'impossibilité que le mouvement de l'aimant s'accélère indéfiniment, et prouve que l'action du circuit voltaïque ne peut que tendre à l'amener dans une position déterminée d'équilibre.

Il semble, au premier coup d'œil, que la même impossibilité devrait avoir lieu dans le second cas, ce qui est contraire à l'expérience, du moins quand une partie du circuit est formée d'un liquide. Il est évident, en effet, que la mobilité d'une portion du conducteur n'empêche pas que cette portion n'agisse à chaque instant comme si elle était fixe dans la position qu'elle occupe à cet instant; et l'on ne voit pas d'abord comment cette mobilité peut changer tellement les conditions du mouvement de l'aimant, qu'il devienne susceptible d'une accélération indéfinie dont l'impossibilité est démontrée quand toutes les parties du circuit voltaïque sont immobiles.

Mais dès qu'on examine avec quelque attention ce qui

doit arriver, d'après les lois de l'action mutuelle d'un corps conducteur et d'un aimant, quand le conducteur est liquide, qu'un cylindre aimanté vertical flotte dans ce liquide, et que la surface du cylindre est recouverte d'un vernis isolant afin que le courant ne puisse pas le traverser, ce qui donnerait lieu au troisième cas, on reconnaît bientôt comment il résulte de la mobilité de la portion liquide du circuit voltaïque que l'aimant flottant acquière un mouvement qui s'accélère indéfiniment : il ne faut pour cela qu'appliquer à ce cas l'explication que j'ai donnée, dans les Annales de Chimie et de Physique (tome XX, pag. 68 — 70), du même mouvement, quand on suppose que l'aimant n'étant pas verni, les courants du liquide où il flotte le traversent librement.

En effet, cette explication étant fondée sur ce que les portions de courants qui se trouvent dans l'aimant ne peuvent avoir sur lui aucune action, et que celles qui sont dans le liquide hors de l'aimant agissent toutes pour accélérer son mouvement toujours dans le même sens, il s'ensuit évidemment que tout ce qui arrive dans ce cas doit encore arriver quand la substance isolante, dont on revet l'aimant, supprime seulement précisément ces portions de courants qui n'avaient aucune action, et qu'elle laisse subsister et agir, toujours de la même manière, celles qui, étant hors de l'aimant, tendaient toutes à accélérer son mouvement constamment dans le même sens. Pour qu'on puisse mieux juger qu'il n'y a, en effet, rien à changer à l'explication dont je viens de parler, je crois devoir la rappeler ici, en l'appliquant au cas où l'aimant est recouvert d'une substance isolante. Je supposerai, pour plus de simplicité dans cette explication, que l'on subs-

titue à l'aimant un solénoïde électro-dynamique, dont les extrémités soient aux pôles de cet aimant, quoique, d'après ma théorie, il dût être considéré comme un faisceau de solénoïdes. Cette supposition ne change pas les effets produits, parce que les courants du mercure agissant de la même manière et dans le même sens sur tous les solénoïdes du faisceau, ils lui impriment un mouvement semblable à celui qu'ils donneraient à un seul de ces solénoïdes, et l'on peut toujours supposer que les courants électriques de celui-ci aient assez d'intensité pour que son mouvement soit sensiblement le même que celui du faisceau.

Soit donc ETFT′ (fig. 40) la section horizontale d'un vase de verre plein de mercure en contact avec un cercle de cuivre qui en garnit le bord intérieur et qui communique avec un des rhéophores, le rhéophore négatif par exemple, tandis que l'on y fait plonger en P le rhéophore positif; alors il se forme dans le mercure des courants qui vont du centre P du cercle ETFT′ à sa circonférence.

Représentons la section horizontale du solénoïde par le petit cercle $etft'$, dont le centre est en A et dont la circonférence $etft'$ est un des courants électriques dont il est composé: en supposant que ce courant se meuve dans le sens $etft'$, il sera attiré par les courants du mercure tels que PUT, qui se trouvent, dans la figure, à droite de $etft'$, parce que la demi-circonférence etf, où le courant va dans le même sens, en est plus rapprochée que $ft'e$ où il va en sens contraire. Soit AS cette attraction égale à la différence des forces exercées par les courants PUT sur les deux demi-circonférences, et qui passe nécessairement par leur centre A, puisqu'elle résulte des forces que ces courants exercent sur tous

les éléments de la circonférence $etft'$ qui leur sont perpendiculaires, et sont, par conséquent, dirigées suivant les rayons de cette circonférence. Le même courant $etft'$ du solénoïde est, au contraire, repoussé par les courants qui, comme PU′T′, sont, dans la figure, à gauche de ce courant $etft'$, parce qu'ils sont en sens contraire dans la demi-circonférence $ft'e$ la plus voisine de PU′T′. Soit AS′ la répulsion qui résulte de la différence des actions exercées par les courants PU′T′ sur les deux demi-circonférences $ft'e$, etf, elle sera égale à AS, et fera, avec le rayon PAF, l'angle FAS′ = PAS, puisque tout est égal des deux côtés de ce rayon : la résultante AR de ces deux forces lui sera donc perpendiculaire; et comme elle passera par le centre A, ainsi que ses deux composantes AS, AS′, le solénoïde n'aura aucune tendance à tourner autour de son axe, comme on l'observe en effet à l'égard de l'aimant flottant que représente ce solénoïde; mais il tendra, à chaque instant, à se mouvoir suivant la perpendiculaire AR au rayon PAF, et comme, lorsqu'on fait cette expérience avec un aimant flottant, la résistance du mercure détruit à chaque instant la vitesse acquise, on voit cet aimant décrire la courbe perpendiculaire à toutes les droites qui passent comme PAF par le point P, c'est-à-dire la circonférence ABC dont ce point est le centre.

Cette belle expérience, due à M. Faraday, a été expliquée par les physiciens qui n'admettent pas ma théorie, en attribuant le mouvement de l'aimant au rhéophore plongé en P dans le mercure, auquel on donne ordinairement une direction perpendiculaire à la surface du mercure. Il est vrai que, dans ce cas, le courant de ce rhéophore tend à porter l'aimant dans le sens où il se meut réellement; mais il est aisé de s'assurer,

par des expériences comparatives, que c'est avec une force beaucoup trop faible pour vaincre la résistance du mercure, et produire, malgré cette résistance, le mouvement qu'on observe. J'étais d'abord surpris de voir que ces physiciens ne tenaient pas compte de l'action que les courants du mercure doivent exercer dans leur propre théorie, ma surprise a augmenté quand j'en ai reconnu la cause dans une erreur manifeste qui se trouve énoncée en ces termes dans l'ouvrage déja cité (1) : « L'action transversale de ce fil fictif (le cou-« rant électrique qui est dans le mercure) sur le magnétisme « austral de A (fig. 43), tendra donc aussi constamment « à pousser A de la droite vers la gauche d'un observateur « qui aurait la tête en C′, et les pieds en Z. Mais une ten-« dance contraire s'exercera sur le pôle B, et même avec « une énergie égale, si la ligne horizontale C′FF′Z se trouve « à la hauteur précise du centre du barreau ; de sorte qu'en « somme, il n'en résultera aucun mouvement de translation. « Ce sera donc alors la seule force exercée par CF qui dé-« terminera la rotation du barreau AB. » Comment l'auteur n'a-t-il pas vu que les actions que *le fil fictif*, placé comme il le dit, exerce sur les deux pôles du barreau AB, tendent à le porter dans le même sens, et qu'elles s'ajoutent au lieu de se détruire, puisque étant d'espèces contraires, ces pôles se trouvent des deux côtés opposés du fil ?

Il est important de remarquer à ce sujet, que si des portions de courants, faisant partie de ceux du mercure, pouvaient se trouver dans l'intérieur du petit cercle *etft′* et agir

(1) Précis élémentaire de physique expérimentale, troisième édition, tome II, page 753.

sur lui, elles tendraient à le faire tourner autour du point P en sens contraire, et avec une force qui, au lieu d'être la différence des actions exercées sur les deux demi-circonférences *etf*, *ft'e*, en est la somme, parce que si *uv* représente une de ces portions, il est évident qu'elle attirera l'arc *utv* et repoussera l'arc *vt'u*, d'où résultent deux forces qui conspirent à mouvoir *etft'* dans la direction AZ opposée à AR. Cette circonstance ne peut évidemment avoir lieu avec l'aimant flottant qui occupe tout l'intérieur du petit cercle *etft'*, parce qu'il en exclut les courants quand il est revêtu de matière isolante, et parce que, dans le cas contraire, les portions de courants comprises dans ce cercle, ayant lieu dans des particules de l'aimant invariablement liées à celles sur lesquelles elles agissent, l'action qu'elles produisent est détruite par une réaction égale et opposée; en sorte qu'il ne reste, dans les deux cas, que les forces exercées par les courants du mercure, qui tendent toutes à mouvoir l'aimant suivant AR. C'est uniquement pour cela qu'il tourne autour du point P dans ce sens, comme on s'en assure en remplaçant l'aimant par un conducteur mobile *xzetft'sy* (fig. 41), formé d'un fil de cuivre assez fin, revêtu de soie, dont la partie intermédiaire *etft'* est pliée en cercle, et dont les deux portions extrêmes, tordues ensemble de *e* en *z*, vont, l'une *ezx* se rendre en *x* dans une coupe à mercure communiquant à un des rhéophores, et l'autre *t'sy* plonger en P (fig. 40) dans le mercure qui communique, comme nous l'avons dit, avec l'autre rhéophore : on suspend ce conducteur mobile de manière que le cercle *etft'* (fig. 41) soit très-près de la surface du mercure, et l'on voit qu'il reste immobile, en vertu de l'équilibre qui s'établit entre les forces exercées par

les portions de courants comprises dans le cercle $etft'$, et celles qui le sont par les courants et portions de courants extérieurs à ce cercle. Mais dès qu'on supprime les portions de courants comprises dans l'espace $etft'$ (fig. 40), en enfonçant dans le mercure au-dessous du cercle $etft'$ (fig. 41) un cylindre de matière isolante dont la base lui soit égale pour imiter ce qui arrive à l'aimant flottant, on le voit se mouvoir, comme cet aimant, dans le sens AR. Lorsqu'on laisse le cylindre de matière isolante où était d'abord le cercle $etft'$, celui-ci ne tourne pas indéfiniment comme l'aimant, mais va s'arrêter, après quelques oscillations, dans une position d'équilibre; différence qui vient de ce que l'aimant flottant laisse, derrière lui, se remplir de mercure la place qu'il occupait d'abord, et chasse le mercure successivement des diverses places où il se trouve transporté. C'est ce changement dans la situation d'une partie du mercure qui en entraîne un dans les courants électriques, et fait que, quoique le circuit voltaïque total soit fermé, le mouvement continu de l'aimant, qui est impossible par l'action d'un circuit solide et fermé, ne laisse pas d'avoir lieu dans ce cas où le circuit fermé change de forme par le mouvement même de l'aimant. Pour produire ce mouvement en employant, au lieu de l'aimant, le conducteur mobile que nous venons de décrire, il faut, lorsqu'on a constaté qu'il ne se meut que quand on supprime, par le cylindre de matière isolante, les portions de courants intérieures au petit cercle $etft'$, et qu'en laissant ce cylindre à la même place, il s'arrête dans une position déterminée d'équilibre après avoir oscillé autour d'elle, imiter ce qui a lieu lorsqu'il s'agit d'un aimant flottant, en faisant glisser le cylindre de matière isolante sur le fond du

vase, de manière qu'il soit toujours sous le cercle *etft'* (fig. 41), et que son centre corresponde toujours verticalement à celui de ce cercle, le conducteur mobile se met alors à tourner indéfiniment autour du point P (fig. 40) comme l'aimant.

C'est, en général, en substituant aux aimants des conducteurs mobiles pliés en cercle, qu'on peut se faire une idée juste des causes des divers mouvements des aimants, lorsqu'on veut analyser ces mouvements par l'expérience sans recourir au calcul, parce que cette substitution donne le moyen d'en faire varier les circonstances de différentes manières, qu'il serait le plus souvent impossible d'obtenir avec des aimants, et qui peuvent seules éclaircir les difficultés que présentent des phénomènes souvent si compliqués. C'est ainsi, par exemple, que dans ce que nous venons de dire, il est impossible, avec un aimant, de vérifier ce résultat de la théorie, que si des portions des courants du mercure pouvaient traverser l'aimant, et agir malgré cela sur lui en conservant l'intensité et la direction qu'ils ont dans le mercure lorsqu'on enlève l'aimant, celui-ci ne tournerait pas autour du point P, et que la vérification en devient facile quand on lui substitue, comme nous venons de le dire, le conducteur mobile représenté ici (fig. 41).

L'identité d'action qu'on observe constamment entre les mouvements d'un conducteur mobile et ceux d'un aimant, toutes les fois qu'ils se trouvent dans les mêmes circonstances, ne permet pas de douter, quand on a fait l'expérience précédente, que l'aimant ne restât aussi immobile, lorsqu'il est traversé par les portions de courants intérieures au cercle *etft'*, si ces portions pouvaient agir sur lui; et, comme on voit, au contraire, que quand il n'est pas revêtu

d'une substance isolante, et que les courants le traversent librement, il se meut précisément comme quand il l'est et qu'aucunes portions de courants ne peuvent plus pénétrer dans l'intérieur de cet aimant, on a une preuve directe du principe sur lequel repose une partie des explications que j'ai données, savoir : que les portions de courants qui traversent l'aimant n'agissent en aucune manière sur lui, parce que les forces qui résulteraient de leur action sur les courants propres à l'aimant, ou sur ce qu'on appelle des molécules magnétiques, ayant lieu entre les particules d'un même corps solide, sont nécessairement détruites par une réaction égale et opposée.

J'avoue que cette preuve expérimentale d'un principe qui n'est qu'une suite nécessaire des premières lois de la mécanique, me paraît complètement inutile, comme elle l'aurait paru à tous les physiciens qui ont considéré ce principe comme un des fondements de la science. Je n'en aurais même pas fait la remarque, si l'on n'avait pas supposé que l'action mutuelle d'un élément de fil conducteur et d'une molécule magnétique, consistait en un couple primitif composé de deux forces égales et parallèles sans être directement opposées, en vertu duquel une portion de courant qui a lieu dans un aimant pourrait le mouvoir; supposition contraire au principe dont il est ici question, et qui se trouve démentie par l'expérience précédente d'après laquelle il n'y a pas d'action exercée sur l'aimant par les portions de courants qui le traversent quand il n'est pas revêtu d'une enveloppe isolante, puisque le mouvement qui a lieu dans ce cas reste le même lorsque on empêche les courants de traverser l'aimant, en le renfermant dans cette enveloppe.

C'est de ce principe qu'il faut partir pour voir quels sont les phénomènes que doit présenter un aimant mobile sous l'influence du courant voltaïque, dans le troisième cas qui nous reste à considérer, celui où une portion du courant passe par l'aimant, ou par une portion de fil conducteur invariablement liée avec lui. Nous venons de voir que lorsqu'il s'agit du mouvement de révolution d'un aimant autour d'un fil conducteur, le mouvement doit être le même, et l'est en effet, soit que le courant traverse ou ne traverse pas l'aimant. Mais il n'en est pas ainsi quand il est question du mouvement de rotation continue d'un aimant autour de la droite qui en joint les deux pôles.

J'ai démontré et par la théorie et par les expériences variées de diverses manières dont les résultats ont toujours confirmé ceux de la théorie, que la possibilité ou l'impossibilité de ce mouvement tient uniquement à ce qu'une portion du circuit voltaïque total soit dans tous ses points séparé de l'aimant, ou à ce qu'il passe, soit dans cet aimant, soit dans une portion de conducteur liée invariablement avec lui. En effet, dans le premier cas, l'ensemble de la pile et des fils conducteurs forme un circuit toujours fermé, et dont toutes les parties agissent de même sur l'aimant, soit qu'elles soient fixes ou mobiles; dans ce dernier cas, elles exercent, à chaque instant, précisément les mêmes forces que si elles étaient fixes dans la position où elles se trouvent à cet instant. Or nous avons démontré, d'abord synthétiquement à l'aide des considérations que nous ont fournies les fig. 30 et 31, ensuite en calculant directement les moments de rotation, qu'un circuit fermé ne peut imprimer à un aimant un mouvement continu autour de la droite qui joint ses deux

pôles, soit qu'on les considère, conformément à ma théorie, comme les deux extrémités d'un solénoïde équivalant à l'aimant, ou comme deux molécules magnétiques dont l'intensité soit assez grande pour que les actions exercées restent les mêmes quand on les substitue à toutes celles dont on regarde l'aimant comme composé dans l'hypothèse des deux fluides. L'impossibilité du mouvement de rotation de l'aimant autour de son axe, tant que le circuit total fermé en est partout séparé, se trouve ainsi complètement démontrée, non-seulement en appliquant ma formule aux courants du solénoïde substitué à l'aimant, mais aussi en partant de la considération d'une force qui aurait lieu entre un élément de fil conducteur et une molécule magnétique perpendiculairement au plan qui passe par cette molécule et par la direction de l'élément, en raison inverse du carré de la distance, et qui serait proportionnelle au sinus de l'angle compris entre la droite qui mesure cette distance et la direction de l'élément. Mais lorsqu'on suppose, dans ce dernier cas, que la force passe par le milieu de l'élément, soit qu'elle agisse sur lui ou réagisse sur la molécule magnétique, ainsi que cela a lieu, d'après ma théorie, à l'égard du solénoïde, le même mouvement devient possible dès qu'une portion du courant passe par l'aimant, ou par une portion de conducteur invariablement liée avec lui; parce que toutes les actions exercées par cette portion sur les particules étant détruites par les réactions égales et opposées qu'exercent sur elles ces mêmes particules, il ne reste que les actions exercées par le reste du circuit total qui n'est plus fermé, et peut par conséquent faire tourner l'aimant.

Pour bien concevoir tout ce qui se rapporte à cette sorte

de mouvement, concevons que la tige TVUS (pl. 1, fig. 13), qui supporte la petite coupe S dans laquelle plonge la pointe *o* du conducteur mobile *oab*, soit pliée en V et U comme on le voit dans la figure, de manière à laisser libre la portion VU de la droite TS prise pour axe de rotation, afin qu'on puisse suspendre l'aimant cylindrique GH, par un fil très-fin ZK, au crochet K attaché en U à cette tige, et que le conducteur mobile *oab* maintenu dans la situation où on le voit dans la figure par le contre-poids *c*, soit terminé en *b* par une lame de cuivre *bef*, qui plonge dans l'eau acidulée dont on remplit le vase MN, afin que ce conducteur communique avec le rhéophore *p*P plongé dans le mercure de la coupe P, tandis que l'autre rhéophore *r*R est en communication avec la tige TVUS par le mercure qu'on met dans la coupe R, et que la pile *pr* ferme le circuit total.

A l'instant où l'on établit le courant dans cet appareil, on voit le conducteur mobile tourner autour de la droite TS; mais l'aimant est seulement amené à une position déterminée autour de laquelle il oscille quelque temps, et où il reste ensuite immobile. En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, qui a lieu à l'égard des moments de rotation autour d'un même axe comme à l'égard des forces, si l'on représente par M le moment de rotation imprimé, par l'action de l'aimant, au conducteur môbile *oab*, la réaction de celui-ci tendra nécessairement à faire tourner l'aimant autour de son axe avec le moment —M, égal à M, mais agissant en sens contraire.

L'immobilité de l'aimant vient évidemment de ce que si le conducteur mobile *oab* agit sur lui, le reste *b*MP*pr*RTS du circuit total ne peut manquer de le faire également; le mo-

ment de l'action qu'il exerce sur l'aimant, réuni à celui de *oab*, donne le moment du circuit fermé *oab*MP*pr*RTS qui est nul ; d'où il suit que le moment de *b*MP*pr*RTS est M, égal et opposé à —M.

Mais si l'on vient à lier l'aimant GH au conducteur mobile *oab*, il en résulte un système de forme invariable, dans lequel l'action et la réaction qu'ils exercent l'un sur l'autre se détruisent mutuellement; et ce système resterait évidemment immobile, si la partie *b*MP*pr*RTS n'agissait pas comme auparavant sur l'aimant pour le faire tourner en lui imprimant le moment de rotation M. C'est en vertu de ce moment que l'aimant et le conducteur mobile, réunis en un système de forme invariable, tournent autour de la droite TS; et comme ce moment est, comme on vient de le voir, et de même valeur et de même signe que celui qu'imprimait l'aimant au conducteur *oab* quand ce conducteur en était séparé et tournait seul, on voit que ces deux mouvements auront nécessairement lieu dans le même sens, mais avec des vitesses réciproquement proportionnelles au moment d'inertie du conducteur et à la somme de ce moment d'inertie et de celui de l'aimant.

J'ai fait abstraction, dans les considérations précédentes, de l'action exercée par la portion *b*MP*pr*RTS du circuit total sur le conducteur mobile *oab*, soit dans le cas où ce conducteur est séparé de l'aimant, soit dans le cas où il lui est uni, non-seulement parce qu'elle est très-petite relativement à celle qu'exerce l'aimant, mais parce qu'elle tend uniquement à porter le conducteur mobile dans la situation déterminée par la répulsion mutuelle des éléments de ces deux portions du circuit total, et ne contribue, par consé-

quent, dans les deux cas, aux mouvements de rotation de *oab*, que pour en faire un peu varier la vitesse, qui sans cela serait constante.

Pour pouvoir facilement unir et séparer alternativement l'aimant et le conducteur mobile, sans interrompre les expériences, il convient de fixer au crochet Z par lequel l'aimant est suspendu au fil ZK, un morceau de fil de cuivre ZX terminé en X par une fourchette dont les deux branches X*x*, X*y* embrassent le conducteur mobile *oab*, qui se trouve serré entre elles, quand on plie convenablement la tige ZX; en la pliant en sens contraire, on lui donne la position où elle est représentée dans la figure, et le conducteur redevient libre.

J'ai expliqué en détail cette expérience, parce qu'elle semble, plus qu'aucune autre, appuyer l'hypothèse du couple primitif, quand on ne l'analyse pas comme je viens de le faire. En effet, on admet comme moi, dans cette hypothèse, que les forces exercées par l'aimant GH, sur les éléments du conducteur mobile *oab*, passent par ces éléments, et qu'en les supposant tous dans le plan vertical TS*ab*, mené par la droite TS, les forces sont normales à ce plan, elles tendent donc à faire tourner *oab* toujours dans le même sens autour de TS : ces forces sont, d'après la loi proposée par M. Biot, précisément les mêmes, en grandeur, en direction et relativement à leurs points d'application, que les forces données par ma formule; elles produisent donc le même moment de rotation M en vertu duquel s'exécute le mouvement du conducteur *oab* lorsqu'il est libre. Mais, suivant les physiciens qui admettent l'hypothèse dont il est ici question, les forces dues à la réaction des éléments du con-

ducteur sur l'aimant ne sont plus les mêmes qu'en grandeur et en ce qu'elles sont perpendiculaires au plan TS*ab*; ils pensent que ces forces sont appliquées aux molécules magnétiques, ou, ce qui revient au même, aux deux pôles de l'aimant GH qui sont sur la droite TS; dès-lors leurs moments de rotation sont nuls relativement à cette droite. C'est à cette cause qu'ils attribuent l'immobilité de l'aimant quand il n'est lié à aucune portion du circuit voltaïque; mais pour expliquer le mouvement de rotation de l'aimant dans le cas où on l'unit au conducteur mobile *oab*, à l'aide de la tige ZX, ils supposent que la réunion de ces deux corps en un système de forme invariable, n'empêche pas l'aimant d'agir toujours pour imprimer au conducteur mobile le même moment de rotation M, sans que ce conducteur réagisse sur l'aimant de manière à mettre obstacle au mouvement du système, qui doit tourner par conséquent dans le même sens que tournait le conducteur mobile avant d'être lié invariablement à l'aimant, mais avec une vitesse moindre dans la raison réciproque des moments d'inertie du conducteur seul et du conducteur réuni à l'aimant.

C'est ainsi qu'on trouve dans cette hypothèse les mêmes résultats que quand on suppose l'action opposée à la réaction suivant la même droite, et qu'on tient compte de l'action exercée sur l'aimant par le reste *b*MP*pr*RTS du circuit voltaïque. Il résulte de tout ce qui a été démontré dans ce mémoire, que cette identité des effets produits et des valeurs des forces que nous venons de trouver, dans le cas que nous avons examiné, entre la manière dont j'ai expliqué les phénomènes et l'hypothèse du couple primitif, est une suite nécessaire de ce que le circuit voltaïque qu'on fait agir sur

l'aimant est toujours fermé, et que dès qu'il s'agit d'un circuit fermé, non-seulement les trois forces parallèles à trois axes qui résultent de l'action qu'un tel circuit exerce sur un aimant, mais encore les trois moments de rotation autour de ces trois axes, sont les mêmes dans les deux manières de concevoir les choses, ainsi que le mouvement de l'aimant, qui ne peut dépendre que de ces six quantités.

La même identité se retrouvera, par conséquent, dans toutes les expériences du même genre, et ce n'est, ni par ces expériences, ni par la mesure des forces qui se développent entre les fils conducteurs et les aimants, qu'une telle question peut être décidée; elle doit l'être :

1° Par la nécessité du principe, que l'action mutuelle des diverses parties d'un système de forme invariable ne peut, dans aucun cas, imprimer à ce système un mouvement quelconque ; principe qui n'est qu'une conséquence de l'idée même que nous avons des forces et de l'inertie de la matière.

2° Par cette circonstance, que l'hypothèse du couple primitif n'a été imaginée, par ceux qui l'ont proposée, que parce qu'ils ont cru que les phénomènes dont ils sont partis ne pouvaient être expliqués autrement, faute d'avoir tenu compte de l'action qu'exerce sur l'aimant la totalité du circuit voltaïque; parce qu'ils n'ont pas fait attention que ce circuit est toujours fermé, et qu'ils n'ont pas déduit, comme je l'ai fait, de la loi proposée par M. Biot, cette conséquence rigoureuse que, pour un circuit fermé, les forces et les moments sont identiquement les mêmes, soit qu'on suppose que les directions des forces exercées sur l'aimant passent par les molécules magnétiques ou par les milieux des éléments des fils conducteurs.

3° Sur ce, quand on admet que les phénomènes dont nous

nous occupons peuvent être produits, en dernière analyse, par les forces exprimées en fonctions des distances qu'exercent les molécules des deux fluides électriques, et qu'on attribue aussi aux deux fluides magnétiques quand on les regarde comme la cause des phénomènes, purement électriques selon moi, que présentent les aimants, on peut bien concevoir que si ces molécules sont en mouvement dans les fils conducteurs, il en résulte entre leurs éléments des forces qui ne dépendent pas seulement des distances de ces éléments, mais encore des directions suivant lesquelles a lieu le mouvement des molécules électriques qui les parcourent, telles précisément que les forces que donne ma formule, pouvu que ces forces satisfassent à la condition que l'action et la réaction soient dirigées suivant la même droite, tandis qu'il est contradictoire de supposer que des forces, quelles que soient d'ailleurs leurs valeurs en fonctions des distances, dirigées suivant les droites qui joignent les molécules entre lesquelles elles s'exercent, puissent produire, par quelque combinaison que ce soit, lors même que ces molécules sont en mouvement, des forces pour lesquelles l'action et la réaction ne soient pas dirigées suivant la même droite, mais suivant deux droites parallèles, comme dans l'hypothèse du couple primitif.

On sait, en effet, que quand même des molécules électriques ou magnétiques sont en mouvement, elles agissent à chaque instant comme si elles étaient en repos dans la situation où elles se trouvent à cet instant. Si donc on considère deux systèmes de molécules, telles que chaque molécule de l'un exerce sur chaque molécule de l'autre une force égale et opposée, suivant la droite qui les joint, à la force exercée par la seconde molécule sur la première, et qu'arrêtant

toutes ces molécules dans la situation où elles se trouvent à un instant donné, on suppose qu'elles soient toutes liées invariablement ensemble dans cette situation, il y aura nécessairement équilibre dans le système de forme invariable, composé des deux autres, qui résultera de cette supposition, puisqu'il y aura équilibre entre les forces élémentaires prises deux à deux. La résultante de toutes les forces exercées par le premier système sur le second sera donc égale et opposée, suivant la même droite, à celle de toutes les forces exercées par le second sur le premier; et ces deux résultantes ne pourront jamais produire un couple capable de faire tourner le système total, quand toutes ses parties sont invariablement liées entre elles, comme le supposent ceux qui, tout en adoptant l'hypothèse d'un couple dans l'action mutuelle d'une molécule magnétique et d'un élément de fil conducteur, prétendent cependant que cette action résulte de ce que l'élément n'agit sur la molécule que parce qu'il est lui-même un assemblage de molécules magnétiques, dont les actions sur celle que l'on considère sont telles que Coulomb les a établies, c'est-à-dire dirigées suivant les droites qui les joignent à cette dernière, et en raison inverse des carrés des distances.

Il suffit de lire avec quelque attention ce qu'a écrit M. Biot sur les phénomènes dont nous nous occupons, dans le livre neuvième de la troisième édition de son *Traité élémentaire de physique expérimentale*, pour voir qu'après avoir considéré constamment les forces que les éléments des fils conducteurs exercent sur les aimants, comme appliquées aux molécules magnétiques perpendiculairement aux plans passant par chaque élément et chaque molécule, il suppose ensuite quand il parle du mouvement des fils conducteurs autour des

aimants, que les forces exercées par les molécules magnétiques sur les éléments des fils, passent par ces éléments dans des directions parallèles à celles des forces exercées sur l'aimant, et forment, par conséquent, des couples avec les premières, au lieu de leur être opposées suivant les mêmes droites; qu'il explique en particulier, à la page 754, tome II de cet ouvrage, le mouvement de rotation d'un aimant autour de son axe, quand une portion de courant le traverse, en supposant que l'aimant tourne par l'action que cette portion même exerce sur le reste de l'aimant, qui forme cependant avec elle un système de forme invariable dont toutes les parties sont invariablement liées entre elles (1) : ce

(1) Je ne sais s'il est nécessaire de rappeler à ce sujet ce que j'ai déja fait remarquer ailleurs, savoir que les fluides électriques, d'après l'ensemble des faits, surtout d'après la nullité d'action sur les corps les plus légers de l'électricité qui se meut dans le vide, doivent être considérés comme incapables d'agir en vertu de leur masse qu'on peut dire infiniment petite à l'égard de celle des corps pondérables, et qu'ainsi toute attraction ou répulsion exercée entre ces corps et les fluides électriques peut bien mettre ceux-ci en mouvement, mais non les corps pondérables. Pour que ces derniers se meuvent, il faut, lorsqu'il s'agit des attractions et répulsions électriques ordinaires, que l'électricité soit retenue sur leur surface, afin que la force qui surmonte l'inertie de l'un, s'appuie, si l'on peut s'exprimer ainsi, sur l'inertie de l'autre. Il faut de même, pour que l'action mutuelle de deux fils conducteurs mette ces fils en mouvement, que les décompositions et recompositions du fluide neutre qui ont lieu à chaque instant dans tous les éléments des longueurs des deux fils, déterminent entre leurs particules pondérables les forces capables de vaincre l'inertie de ces particules en imprimant aux deux fils des vitesses réciproquement proportionnelles à leurs masses. Quand on parle de l'action mutuelle de deux courants électriques, on n'a jamais entendu, et il est évident qu'on ne peut entendre, que celle des conducteurs qu'ils parcourent : les physiciens qui admettent des molécules magnétiques agissant sur les éléments d'un fil conducteur, con-

qui suppose évidemment que l'action et la réaction de cette portion de courant et du reste de l'aimant forment un couple. Comment dès-lors concevoir que le physicien qui admet une pareille supposition, puisse s'exprimer en ces termes à la page 769 du même livre : « Si l'on calcule l'action qu'exer-« cerait à distance une aiguille aimantée d'une longueur in-« finiment petite et presque moléculaire, on verra aisément « que l'on peut former des assemblages de telles aiguilles, qui « exerceraient des forces transversales. La difficulté unique, « mais très-grande sans doute, c'est de combiner de tels « systèmes, de manière qu'il en résulte, pour les tranches d'un « fil conjonctif de dimension sensible, les lois précises d'ac-« tions transversales que l'expérience fait reconnaître, et que « nous avons exposées plus haut. » Sans doute que de l'action de deux systèmes de petits aimants, dont les molécules australes et boréales s'attirent ou se repoussent en raison inverse des carrés de leurs distances, suivant les droites qui les joignent deux à deux, il peut résulter des *actions transversales*, mais non pas des *actions qui ne soient pas égales et opposées à des réactions dirigées suivant les mêmes droites*, comme celles que suppose M. Biot.

En un mot, la valeur de l'action de deux éléments de fils

---

formément à la loi proposée par M. Biot, admettent sans doute aussi que cette action ne meut le fil que parce que la molécule magnétique est retenue par les particules pondérables de l'aimant qui constituent l'élément magnétique dont elle fait partie ; et il est dès-lors évident qu'en supposant que l'aimant se meut par l'action de la portion de courant électrique qui le traverse, on suppose nécessairement que son mouvement résulte de l'action mutuelle qui a lieu entre chacune de celles de ses particules que traverse le courant et toutes les autres particules du même corps.

conducteurs, que j'ai déduite uniquement de l'expérience, dépend des angles qui déterminent la direction respective des deux éléments : d'après la loi proposée par M. Biot, la force qui se développe entre un élément de fil conducteur et une molécule magnétique, dépend aussi de l'angle qui détermine la direction de l'élément. Si j'ai appelé *élémentaire* la force dont j'ai déterminé la valeur, parce qu'elle s'exerce entre deux éléments de fils conducteurs et parce qu'elle n'a pas encore été ramenée à des forces plus simples : il a aussi appelé *élémentaire* la force qu'il admet entre une molécule magnétique et un élément de fil conducteur. Jusque-là tout est semblable à l'égard de ces deux sortes de forces ; mais pour celle que j'ai admise, l'action et la réaction sont opposées suivant la même droite, et rien n'empêche de concevoir qu'elle résulte des attractions et des répulsions inhérentes aux molécules des deux fluides électriques, pourvu qu'on suppose ces molécules en mouvement dans les fils conducteurs, pour rendre raison de l'influence de la direction des éléments de ces fils sur la valeur de la force ; tandis que M. Biot, en admettant une force pour laquelle l'action et la réaction ne sont pas dirigées en sens contraire sur une même droite, mais sur des droites parallèles et formant un couple, se met dans l'impossibilité absolue de ramener cette force à des attractions et répulsions dirigées suivant les droites qui joignent deux à deux les molécules magnétiques, telles que les admettent tous les physiciens qui s'en sont servis pour expliquer l'action mutuelle de deux aimants. N'est-il pas évident que c'est de cette hypothèse de M. Biot, sur des forces révolutives pour lesquelles l'action et la réaction ne sont pas opposées suivant une même droite, qu'on devrait dire ce qu'il dit (page 771) au sujet de l'action

mutuelle de deux éléments de fils conducteurs, telle que je l'ai déterminée par mes expériences et les calculs que j'en ai déduits, savoir : qu'une pareille supposition *est d'abord en elle-même complètement hors des analogies que nous présentent toutes les autres lois d'attraction?* Y a-t-il une hypothèse plus contraire à ces analogies, que d'imaginer des forces telles que l'action mutuelle des diverses parties d'un système de forme invariable puisse mettre ce système en mouvement?

Ce n'est point en m'éloignant ainsi d'une des lois que Newton a regardées comme les fondements de la théorie physique de l'univers, qu'après avoir découvert un grand nombre de faits que nul n'avait observés avant moi, j'ai déterminé, par la seule expérience et en suivant la marche tracée par ce grand homme, d'abord les lois de l'action électro-dynamique, ensuite l'expression analytique de la force qui se développe entre deux éléments de fils conducteurs, et qu'enfin j'ai déduit de cette expression toutes les conséquences exposées dans ce Mémoire. M. Biot, en citant les noms d'une partie des physiciens qui ont observé de nouveaux faits ou inventé des instruments qui ont été utiles à la science, n'a parlé ni du moyen par lequel je suis parvenu à rendre mobiles des portions de fils conducteurs, en les suspendant sur des pointes d'acier dans des coupes pleines de mercure, moyen sans lequel on ne saurait rien des actions exercées sur ces fils, soit par d'autres conducteurs, soit par le globe terrestre ou par des aimants; ni des appareils que j'ai construits pour mettre en évidence toutes les circonstances que présentent ces actions, et déterminer avec précision les cas d'équilibre d'où j'ai conclu les lois auxquelles elles sont assujetties; ni de ces lois elles-mêmes déterminées par mes expé-

riences; ni de la formule que j'en ai conclue; ni des applications que j'ai faites de cette formule. Et à l'égard des faits que j'ai observés le premier, il n'en cite qu'un seul, celui de l'attraction mutuelle de deux fils conducteurs; et s'il le cite, c'est pour en donner l'explication qui avait été d'abord proposée par quelques physiciens étrangers, à une époque où l'on n'avait pas fait les expériences qui ont démontré depuis long-temps qu'elle était complètement inadmissible. Cette explication consiste, comme on sait, à supposer que deux fils conducteurs agissent l'un sur l'autre, comme ils le feraient en vertu de l'action mutuelle d'aiguilles aimantées infiniment petites, tangentes aux sections circulaires qu'on peut faire dans toute la longueur des fils supposés cylindriques; l'ensemble des petites aiguilles d'une même section formant ainsi un anneau aimanté, semblable à celui dont MM. Gay-Lussac et Velter se sont servis pour faire, en 1820, une expérience décisive au sujet de l'explication dont il est ici question. Cette expérience a prouvé, comme on sait, qu'un pareil anneau n'exerce absolument aucune action, tant qu'il forme ainsi une circonférence entière, quoiqu'il soit tellement aimanté qu'en le formant d'un acier propre à conserver, quand on le rompt, tout son magnétisme, on trouve, en le brisant, que toutes ses portions sont très-fortement aimantées.

Sir H. Davy et M. Erman ont obtenu le même résultat à l'égard d'un anneau d'acier d'une forme quelconque. Il est, au reste, une suite nécessaire de la théorie des deux fluides magnétiques comme de la mienne, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer par un calcul tout semblable à celui par lequel j'ai démontré, dans ce Mémoire, la nullité d'action d'un solénoïde formant une courbe fermée, conformément à ce que

M. Savary a trouvé, le premier, par un calcul qui ne diffère pas essentiellement du mien, et qu'on peut voir, soit dans l'addition qui se trouve à la suite du Mémoire sur l'application du calcul aux phénomènes électro-dynamiques, qu'il a publié en 1823, soit dans le Journal de Physique, tome XCVI, pages 295 et suiv. En donnant de nouveau cette explication, M. Biot montre qu'il ne connaissait ni l'expérience de MM. Gay-Lussac et Velter, ni le calcul de M. Savary.

Il y a plus, les petites aiguilles tangentes aux circonférences des sections des fils conducteurs, sont considérées par M. Biot comme les particules mêmes de la surface du fil conducteur aimantées par le courant électrique qui séparerait dans ces particules le fluide austral du fluide boréal, en les portant en sens contraire, sans que les molécules de ces fluides puissent sortir des particules du fil où elles se trouvaient d'abord réunies en fluide neutre. Dès-lors, quand le courant est établi depuis quelque temps dans le fluide et se continue indéfiniment, la distribution des molécules magnétiques dans les fils conducteurs ne peut plus changer; c'est donc comme s'il y avait dans ces fils une multitude de points déterminés qui ne changeraient pas de situation tant que le courant continuerait avec la même intensité, et dont il émanerait des forces attractives et répulsives dues aux molécules magnétiques, et par conséquent réciproquement proportionnelles aux carrés des distances.

Ainsi deux fils conducteurs n'agiraient l'un sur l'autre qu'en vertu de forces exprimées par une fonction des distances entre des points fixes dans l'un des fils et d'autres points également fixes dans l'autre fil; mais alors un de ces fils, supposé immobile, ne pourrait qu'amener l'autre

dans la situation d'équilibre où l'intégrale des forces vives, qui s'obtient toujours en fonctions des coordonnées des points du fil mobile quand les forces sont fonctions des distances, atteindrait sa valeur maximum. Jamais de telles forces ne pourraient produire un mouvement de rotation dont la vitesse allât toujours en augmentant dans le même sens, jusqu'à ce que cette vitesse devînt constante, à cause des frottements, ou de la résistance du liquide dans lequel il faut que plongent les conducteurs mobiles pour maintenir les communications. Or, j'ai obtenu ce mouvement de rotation en faisant agir un conducteur spiral, formant à peu près un cercle, sur un fil conducteur rectiligne, tournant autour d'une de ses extrémités située au centre du cercle, tandis que son autre extrémité se trouvait assez près du conducteur spiral.

Cette expérience, où le mouvement est très-rapide et peut durer plusieurs heures, quand on emploie une pile assez forte, est en contradiction manifeste avec la manière de voir de M. Biot; et si elle ne l'est pas avec l'opinion que l'action de deux fils conducteurs résulte des forces attractives et répulsives inhérentes aux molécules des deux fluides électriques, c'est que ces molécules ne restent pas circonscrites, comme celles dont on suppose composés les deux fluides magnétiques, dans des espaces très-petits où leur distribution est déterminée par une cause permanente, mais qu'au contraire elles parcourent toute la longueur de chaque fil par une suite de compositions et de décompositions, qui se succèdent à de très-courts intervalles : d'où il peut résulter, comme je l'ai déja observé, des mouvements toujours continus dans le même sens, incompatibles avec la supposition que les points

d'où émanent les forces attractives et répulsives ne changent point de lieu dans les fils.

Enfin, M. Biot répète dans la troisième édition de son Traité élémentaire de physique (tome II, page 773), ce qu'il avait déja dit dans la note qu'il publia, dans les Annales de Chimie et de Physique, sur les premières expériences relatives au sujet dont nous nous occupons, qu'il a faites avec M. Savart, savoir : que quand un élément de fil conjonctif très-fin et indéfini agit sur une molécule magnétique, « la « nature de son action est la même que celle d'une aiguille « aimantée qui serait placée sur le contour du fil dans un sens « déterminé et toujours constant par rapport à la direction « du courant voltaïque. » Cependant l'action de cette aiguille sur une molécule magnétique est dirigée suivant la même droite que la réaction de la molécule sur l'aiguille, et il est d'ailleurs aisé de voir que la force qui en résulte est en raison inverse du cube, et non pas du carré de la distance, comme M. Biot a trouvé lui-même qu'est celle de l'élément du fil.

Il me reste maintenant à étendre à l'action mutuelle de deux circuits fermés, de grandeurs et de formes quelconques, les considérations relatives aux surfaces terminées par ces circuits et dont les points agissent comme ce qu'on appelle des molécules de fluide austral et de fluide boréal, que j'ai précédemment appliquées à l'action mutuelle d'un circuit fermé quelconque et d'un élément de fil conducteur. J'ai trouvé que l'action de l'élément $d^2\sigma'$ sur les deux surfaces terminées par le contour s, était exprimée par les trois forces

$$\mu g \varepsilon' \mathrm{d}^2\sigma' \frac{u^2\,\mathrm{d}\varphi}{r^3},\quad \mu g \varepsilon' \mathrm{d}^2\sigma' \frac{v^2\,\mathrm{d}\chi}{r^3},\quad \mu g \varepsilon' \mathrm{d}^2\sigma' \frac{w^2\,\mathrm{d}\psi}{r^3},$$

appliquées à chacun des éléments ds de ce contour, je vais

maintenant faire à l'égard du circuit s', ce que j'ai fait alors à l'égard du circuit s. Concevons pour cela une nouvelle surface terminée de tous côtés, comme la surface σ', par la courbe fermée s', et qui soit telle que les portions des normales de la surface σ' comprises entre elle et cette nouvelle surface, soient partout très-petites. Supposons, sur la nouvelle surface, du fluide de l'espèce contraire à celui de la surface σ', de manière qu'il y ait les mêmes quantités des deux fluides dans les parties correspondantes des deux surfaces. En désignant par ξ', η', ζ', les angles que la normale au point m', dont les coordonnées sont x', y', z', forme avec les trois axes, et par h' la petite portion de cette normale qui est comprise entre les deux surfaces, nous pourrons, comme nous l'avons fait pour l'élément $d^2\sigma'$, ramener l'action de l'élément de la nouvelle surface qui est représenté par $d^2\sigma'$, sur l'ensemble des deux surfaces terminées par le contour s, à des forces appliquées, comme on l'a vu, page 319, aux divers éléments de ce contour; celle qui est relative à l'élément ds et parallèle aux x s'obtiendra en substituant dans l'expression que nous avons trouvée pour cette force

$$\mu g \varepsilon' d^2\sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3},$$

ou

$$-\mu g \varepsilon' d^2\sigma' \frac{(y'-y)dz-(z'-z)dy}{r^3},$$

les nouvelles coordonnées $x'+h'\cos.\xi'$, $y'+h'\cos.\eta'$, $z'+h'\cos.\zeta'$ à la place de x', y', z'. Comme les forces ainsi obtenues agissent en sens contraire des premières, il faut les en retrancher, ce qui se réduit, lorsqu'on néglige dans le calcul les puissances de h supérieures à la première, à différentier

$$-\mu g \varepsilon' d^2\sigma' \frac{(y'-y)dz-(z'-z)dy}{r^3},$$

en faisant varier x', y', z', remplaçant $\delta x', \delta y', \delta z'$ par $h' \cos. \xi'$, $h' \cos. \eta'$, $h' \cos. \zeta'$, changeant le signe du résultat, tandis que x, y, z, et dx, dy, dz, doivent être considérées comme des constantes puisqu'elles appartiennent à l'élément ds.

La formule dans laquelle on doit substituer $h' \cos. \xi'$, $h' \cos. \eta'$, $\cos. \zeta'$ à $\delta x', \delta y', \delta z'$, est donc

$$\mu g \varepsilon' \left(dz d^2 \sigma' \delta' \frac{y'-y}{r^3} - dy d^2 \sigma' \delta' \frac{z'-z}{r^3} \right),$$

qu'il faut intégrer après cette substitution dans toute l'étendue de la surface σ' pour avoir l'action totale de cette surface et de celle qui lui est jointe sur l'assemblage des deux surfaces terminées par le contour s. On peut faire cette double intégration séparément sur chacun des deux termes dont cette expression se compose. Exécutons d'abord celle qui est relative au premier terme

$$\mu g \varepsilon' dz d^2 \sigma' \delta' \frac{y'-y}{r^3}.$$

Pour cela, décomposons la surface σ' en une infinité de zones infiniment étroites par une suite de plans perpendiculaires au plan des xz menés par la coordonnée y du milieu o de l'élément ds. Nous prendrons, sur une de ces zones, pour $d^2 \sigma'$ l'élément de la surface σ' qui a pour expression

$$\frac{v d' v d' \chi}{\cos. \eta'},$$

et nous aurons alors à intégrer la quantité

$$\mu g \varepsilon' dz \frac{v d' v d' \chi}{\cos. \eta'} \delta' \frac{y'-y}{r^3},$$

qui se changera, par une transformation toute semblable à

celle que nous avons employée plus haut relativement à

$$d^2\sigma = \frac{u\,du\,d\varphi}{\cos.\xi},$$

en celle-ci

$$-\mu g\,dz h'\varepsilon' d'\chi d'\frac{v^2}{r^3}.$$

En supposant, comme nous l'avons fait pour la surface σ, que les quantités h', ε' varient ensemble de manière que leur produit conserve une valeur constante g', on intégrera cette dernière expression, en supposant l'angle χ constant, dans toute la longueur de la zone renfermée sur la surface σ' entre les deux plans qui comprennent l'angle $d'\chi$ depuis l'un des bords du contour s' jusqu'à l'autre. Cette première intégration s'effectue immédiatement et donne

$$-\mu g g' dz\,d'\chi\left(\frac{v_2^2}{r_2^3} - \frac{v_1^2}{r_1^3}\right),$$

r_1, v_1 et r_2, v_2 représentant les valeurs de r et de v pour les deux bords du contour s'. Les deux parties de cette expression doivent maintenant être intégrées par rapport à χ respectivement dans les deux portions du contour s' déterminées par les deux plans tangents à ce contour menés par l'ordonnée y de l'élément ds; et d'après la remarque que nous avons faite, page 317, à l'égard de la valeur de la force parallèle aux x dans le calcul relatif aux deux surfaces terminées par le contour s, il est aisé de voir qu'on a ici

$$-\mu g g' dz \int \frac{v^2\,d'\chi}{r^3},$$

en prenant cette intégrale dans toute l'étendue du contour fermé s'; les variables r, v et χ n'étant plus relatives qu'à ce contour.

On exécutera de la même manière la double intégration de l'autre terme qui est égal à

$$-\mu g \varepsilon' \mathrm{d}y \mathrm{d}^2\sigma' \delta' \frac{z'-z}{r^3}$$

dans toute l'étendue de la surface σ'. Il faudra, pour cela, diviser cette surface en une infinité de zones, par des plans menés par la coordonnée z du milieu de l'élément ds, et prendre, sur l'une de ces zones, pour $\mathrm{d}^2\sigma'$ l'aire infiniment petite qui a pour expression $\frac{w d' w d' \psi}{\cos.\zeta'}$. La formule, après avoir été transformée comme la précédente, s'intégrera d'abord dans toute la longueur de la zone; l'intégrale ne renfermera alors que des quantités relatives au contour s'. Ensuite la seconde intégration faite par rapport à ψ dans l'étendue du contour fermé s', donnera

$$\mu g g' \mathrm{d}y \int \frac{w^2 d' \psi}{r^3}.$$

Rassemblant enfin les deux résultats obtenus par ces doubles intégrations, on aura

$$\mu g g' \left(\mathrm{d}y \int \frac{w^2 \mathrm{d}' \psi}{r^3} - \mathrm{d}z \int \frac{v^2 \mathrm{d}' \chi}{r^3}\right)$$

pour la valeur de la force parallèle aux x, dont la direction passe par le milieu de l'élément ds, et qui provient de l'action des deux surfaces terminées par le contour s' sur les deux surfaces terminées par le contour s.

On aura de même, parallèlement aux deux autres axes, les forces

$$\mu g g' \left(\mathrm{d}z \int \frac{u^2 \mathrm{d}' \varphi}{r^3} - \mathrm{d}x \int \frac{w^2 \mathrm{d}' \psi}{r^3}\right),$$

$$\mu g g' \left(dx \int \frac{v^2 \, d'\chi}{r^3} - dy \int \frac{u^2 \, d'\varphi}{r^3} \right).$$

Ainsi, en supposant appliquées à chaque élément ds du contour s les forces que nous venons de déterminer, on aura l'action qui résulte des attractions et répulsions des deux fluides magnétiques, répandus et fixés sur les deux assemblages de surfaces terminées par les deux contours s, s'.

Mais ces forces appliquées aux éléments ds ne diffèrent que par le signe de celles que nous avons obtenues page 311, pour l'action des deux circuits s, s', en les supposant parcourus par des courants électriques, pourvu qu'on ait $\mu g g' = \frac{1}{2} i i'$. Cette différence vient de ce que dans le calcul qui nous les a données, les différentielles $d'\varphi, d'\chi, d'\psi$ ont été supposées de même signe que les différentielles $d\varphi, d\chi, d\psi$, tandis qu'elles doivent être prises avec des signes contraires quand les deux courants se meuvent dans le même sens; alors les forces produites par l'action mutuelle de ces courants sont précisément les mêmes que celles qui résultent de l'action des deux surfaces σ' sur les deux surfaces σ, et il est ainsi complètement démontré que l'action mutuelle de deux circuits solides et fermés, parcourus par des courants électriques, peut être remplacée par celle de deux assemblages composés chacun de surfaces ayant pour contours ces deux circuits, et sur lesquelles seraient fixées des molécules de fluide austral et de fluide boréal, s'attirant et se repoussant suivant les droites qui les joignent, en raison inverse des carrés des distances. En combinant ce résultat avec cette conséquence rigoureuse du principe général de la conservation des forces vives, déja rappelée plusieurs fois dans ce Mémoire, que

toute action réductible à des forces, fonctions des distances, agissant entre des points matériels formant deux systèmes solides, l'un fixe, l'autre mobile, ne peut jamais donner lieu à un mouvement qui soit indéfiniment continu, malgré les résistances et les frottements qu'éprouve le système mobile, nous en conclurons, comme nous l'avons fait quand il s'agissait d'un aimant et d'un circuit voltaïque solide et fermé, que cette sorte de mouvement ne peut jamais résulter de l'*action mutuelle de deux circuits solides et fermés.*

Au lieu de substituer à chaque circuit deux surfaces très-voisines recouvertes l'une de fluide austral et l'autre de fluide boréal, ces fluides étant distribués comme il a été dit plus haut, on pourrait remplacer chaque circuit par une seule surface sur laquelle seraient uniformément distribués des éléments magnétiques tels que les a définis M. Poisson, dans le Mémoire lu à l'Académie des Sciences le 2 février 1824.

L'auteur de ce Mémoire, en calculant les formules par lesquelles il a fait rentrer dans le domaine de l'analyse toutes les questions relatives à l'aimantation des corps, quelle que soit la cause qu'on lui assigne, a donné (1) les valeurs des trois forces exercées par un élément magnétique sur une molécule de fluide austral ou boréal; ces valeurs sont identiques à celles que j'ai déduites de ma formule, pour les trois quantités A, B, C, dans le cas d'un très-petit circuit fermé et plan, lorsqu'on suppose que les coefficients constants sont les mêmes, et il est aisé d'en conclure un théorème d'après lequel on voit immédiatement :

1° Que l'action d'un solénoïde électro-dynamique, calcu-

(1) Mémoire sur la théorie du magnétisme, par M. Poisson, page 22.

lée d'après ma formule, est, dans tous les cas, la même que celle d'une série d'éléments magnétiques de même intensité, distribués uniformément le long de la ligne droite ou courbe qu'entourent tous les petits circuits du solénoïde, en donnant, à chacun de ses points, aux axes des éléments, la direction même de cette ligne;

2° Que l'action d'un circuit voltaïque solide et fermé, calculée de même d'après ma formule, est précisément celle qu'exerceraient des éléments magnétiques de même intensité, distribués uniformément sur une surface quelconque terminée par ce circuit, lorsque les axes des éléments magnétiques sont partout normaux à cette surface.

Le même théorème conduit encore à cette conséquence, que si l'on conçoit une surface renfermant de tous côtés un très-petit espace; qu'on suppose, d'une part, des molécules de fluide austral et de fluide boréal en quantités égales distribuées sur cette petite surface, comme elles doivent l'être pour qu'elles constituent l'élément magnétique tel que l'a considéré M. Poisson, et, d'autre part, la même surface recouverte de courants électriques, formant sur cette surface de petits circuits fermés dans des plans parallèles et équidistants, et qu'on calcule l'action de ces courants d'après ma formule, les forces exercées, dans les deux cas, soit sur un élément de fil conducteur, soit sur une molécule magnétique, sont précisément les mêmes, indépendantes de la forme de la petite surface, et proportionnelles au volume qu'elle renferme, les axes des éléments magnétiques étant représentés par la droite perpendiculaire aux plans des circuits.

L'identité de ces forces une fois démontrée, on pourrait considérer comme n'en étant que de simples corollaires, tous les

résultats que j'ai donnés dans ce Mémoire, sur la possibilité de substituer aux aimants, sans changer les effets produits, des assemblages de courants électriques formant des circuits fermés autour de leurs particules. Je pense qu'il sera facile au lecteur de déduire cette conséquence, et le théorème sur lequel elle repose, des calculs précédents ; je l'ai d'ailleurs développée dans un autre Mémoire où j'ai discuté en même temps, sous ce nouveau point de vue, tout ce qui est relatif à l'action mutuelle d'un aimant et d'un conducteur voltaïque.

Pendant que je rédigeais celui-ci, M. Arago a découvert un nouveau genre d'action exercée sur les aimants. Cette découverte, aussi importante qu'inattendue, consiste dans l'action mutuelle qui se développe entre un aimant et un disque ou anneau d'une substance quelconque, dont la situation relative change continuellement. M. Arago ayant eu l'idée qu'on devait pouvoir, dans cette expérience, substituer un conducteur plié en hélice au barreau aimanté, m'engagea à vérifier cette conjecture par une expérience dont le succès ne pouvait guère être douteux. Les défauts de l'appareil avec lequel j'essayai de constater l'existence de cette action dans les expériences que je fis avec M. Arago, nous empêchèrent d'obtenir un résultat décisif ; mais M. Colladon ayant bien voulu se charger de disposer plus convenablement l'appareil dont nous nous étions servis, j'ai vérifié avec lui de la manière la plus complète, aujourd'hui 30 août 1826, l'idée de M. Arago, en faisant usage d'une double hélice très-courte, dont les spires avaient environ deux pouces de diamètre.

Cette expérience complète l'identité des effets produits, soit par des aimants, soit par des assemblages de circuits

voltaïques solides et fermés (1); elle achève de démontrer que la série de décompositions et de recompositions du fluide

---

(1) Il semble d'abord que cette identité ne devrait avoir lieu qu'à l'égard des circuits voltaïques fermés d'un très-petit diamètre; mais il est aisé de voir qu'elle a lieu aussi pour les circuits d'une grandeur quelconque, puisque nous avons vu que ceux-ci peuvent être remplacés par des éléments magnétiques distribués uniformément sur des surfaces terminées par ces circuits, et qu'on peut multiplier à volonté le nombre des surfaces que circonscrit un même circuit. L'ensemble de ces surfaces peut être considéré comme un faisceau d'aimants équivalents au circuit. La même considération prouve que sans rien changer aux forces qui en résultent, il est toujours possible de remplacer les très-petits courants électriques qui entourent les particules d'un barreau aimanté, par des courants électriques d'une grandeur finie, ces courants formant des circuits fermés autour de l'axe du barreau quand ceux des particules sont distribués symétriquement autour de cet axe. Il suffit pour cela de concevoir dans ce barreau des surfaces, terminées à celle de l'aimant, qui coupent partout à angles droits les lignes d'aimantation, et qui passent par les éléments magnétiques qu'on peut toujours supposer situés aux points où ces lignes sont rencontrées par les surfaces. Alors, si tous les éléments d'une même surface se trouvaient égaux en intensité sur des aires égales, ils devraient être remplacés par un seul courant électrique parcourant la courbe formée par l'intersection de cette surface et de celle de l'aimant; s'ils variaient en augmentant d'intensité de la surface à l'axe de l'aimant, il faudrait leur substituer d'abord un courant dans cette intersection tel qu'il devrait être d'après l'intensité *minimum* des courants particulaires de la surface normale aux lignes d'aimantation que l'on considère, puis, à chaque ligne circonscrivant les portions de cette surface où les petits courants deviendraient plus intenses, on concevrait un nouveau courant concentrique au précédent, et tel que l'exigerait la différence d'intensité des courants adjacents, les uns en dehors, les autres en dedans de cette ligne; si l'intensité des courants particulaires allait en diminuant de la surface à l'axe du barreau, il faudrait concevoir, sur la ligne de séparation, un courant concentrique au précédent, mais allant en sens contraire; enfin, une augmentation d'intensité qui succéderait à cette diminution, exigerait un nouveau courant concentrique dirigé comme le premier.

neutre, qui constitue le courant électrique, suffit pour produire, dans ce cas comme dans tous les autres, les effets qu'on explique ordinairement par l'action de deux fluides différents de l'électricité, et qu'on désigne sous les noms de *fluide austral* et de *fluide boréal*.

Après avoir long-temps réfléchi sur tous ces phénomènes et sur l'ingénieuse explication que M. Poisson a donnée dernièrement du nouveau genre d'action découvert par M. Arago, il me semble que ce qu'on peut admettre de plus probable dans l'état actuel de la science, se compose des propositions suivantes.

1° Sans qu'on soit autorisé à rejeter les explications fondées sur la réaction de l'éther mis en mouvement par les courants électriques, rien n'oblige jusqu'à présent d'y avoir recours.

2° Les molécules des deux fluides électriques, distribuées

Je ne fais, au reste, ici cette remarque que pour ne pas omettre une conséquence remarquable des résultats obtenus dans ce Mémoire, et non pour en déduire quelques probabilités en faveur de la supposition que les courants électriques des aimants forment des circuits fermés autour de leurs axes. Après avoir d'abord hésité entre cette supposition et l'autre manière de concevoir ces courants, en les considérant comme entourant les particules des aimants; j'ai reconnu, depuis long-temps, que cette dernière était la plus conforme à l'ensemble des faits, et je n'ai point changé d'opinion à cet égard.

Cette conséquence est d'ailleurs utile en ce qu'elle rend la similitude des actions produites, d'une part par une hélice électro-dynamique, de l'autre par un aimant, aussi complète, sous le point de vue de la théorie, qu'on la trouve quand on consulte l'expérience, et en ce qu'elle justifie les explications où l'on substitue, comme je l'ai fait dans celle que j'ai donnée plus haut du mouvement de révolution d'un aimant flottant, un seul circuit fermé à l'aimant que l'on considère.

sur la surface des corps conducteurs, sur la surface ou dans l'intérieur des corps qui ne le sont pas, et restant aux points de ces corps où elles se trouvent, soit en équilibre dans le premier cas, soit parce qu'elles y sont retenues dans le second par la force coercitive des corps non conducteurs, produisent, par leurs attractions et répulsions réciproquement proportionnelles aux carrés des distances, tous les phénomènes de l'électricité ordinaire.

3° Quand les mêmes molécules sont en mouvement dans les fils conducteurs, qu'elles s'y réunissent en fluide neutre et s'y séparent à chaque instant, il résulte de leur action mutuelle des forces qui dépendent d'abord de la durée des périodes extrêmement courtes comprises entre deux réunions ou deux séparations consécutives, ensuite des directions suivant lesquelles s'opèrent ces compositions et décompositions alternatives du fluide neutre. Les forces ainsi produites sont constantes dès que cet état dynamique des fluides électriques dans les fils conducteurs est devenu permanent; ce sont elles qui produisent tous les phénomènes d'attraction et de répulsion que j'ai découverts entre deux de ces fils.

4° L'action, dont j'ai reconnu l'existence, entre la terre et les conducteurs voltaïques, ne permet guère de douter qu'il existe des courants, semblables à ceux des fils conducteurs, dans l'intérieur de notre globe. On peut présumer que ces courants sont la cause de la chaleur qui lui est propre; qu'ils ont lieu principalement là où la couche oxidée qui l'entoure de toute part repose sur un noyau métallique, conformément à l'explication que sir H. Davy a donnée des volcans, et que ce sont eux qui aimantent les minerais magnétiques et les corps exposés dans des circonstances convenables à l'action

électro-dynamique de la terre. Il n'existe cependant, et ne peut exister, d'après l'identité d'effets expliquée dans la note précédente, aucune preuve sans réplique que les courants terrestres ne sont pas seulement établis autour des particules du globe.

5° Le même état électro-dynamique permanent consistant dans une série de décompositions et de recompositions du fluide neutre qui a lieu dans les fils conducteurs, existe autour des particules des corps aimantés, et y produit des actions semblables à celles qu'exercent ces fils.

6° En calculant ces actions d'après la formule qui représente celle de deux éléments de courants voltaïques, on trouve précisément, pour les forces qui en résultent, soit quand un aimant agit sur un fil conducteur, soit lorsque deux aimants agissent l'un sur l'autre, les valeurs que donnent les dernières expériences de M. Biot dans le premier cas, et celles de Coulomb dans le second.

7° Cette identité, purement mathématique, confirme de la manière la plus complète l'opinion, fondée d'ailleurs sur l'ensemble de tous les faits, que les propriétés des aimants sont réellement dues au mouvement continuel des deux fluides électriques autour de leurs particules.

8° Quand l'action d'un aimant, ou celle d'un fil conducteur, établit ce mouvement autour des particules d'un corps, les molécules d'électricité positive et d'électricité négative, qui doivent se constituer dans l'état électro-dynamique permanent d'où résultent les actions qu'il exerce alors, soit sur un fil conducteur, soit sur un corps aimanté, ne peuvent arriver à cet état qu'après un temps toujours très-court, mais qui n'est jamais nul, et dont la durée dépend en général de

la résistance que le corps oppose au déplacement des fluides électriques qu'il renferme. Pendant ce déplacement, soit avant d'arriver à un état de mouvement permanent, soit quand cet état cesse, elles doivent exercer des forces qui produisent probablement les singuliers effets que M. Arago a découverts. Cette explication n'est, au reste, que celle de M. Poisson, appliquée à ma théorie, car un courant électrique formant un très-petit circuit fermé agissant précisément comme deux molécules, l'une de fluide austral, l'autre de fluide boréal, situées sur son axe, de part et d'autre du plan du petit courant, à des distances de ces plans égales entre elles, et d'autant plus grandes que le courant électrique a plus d'intensité, on doit nécessairement trouver les mêmes valeurs pour les forces qui se développent, soit lorsqu'on suppose que le courant s'établit ou cesse d'exister graduellement, soit quand on conçoit que les molécules magnétiques, d'abord réunies en fluide neutre, se séparent, en s'éloignant successivement à des distances de plus en plus grandes, et se rapprochent ensuite pour se réunir de nouveau.

Je crois devoir observer en finissant ce Mémoire, que je n'ai pas encore eu le temps de faire construire les instruments représentés dans la figure 4 de la planche première et dans la figure 20 de la seconde planche. Les expériences auxquelles ils sont destinés n'ont donc pas encore été faites; mais, comme ces expériences ont seulement pour objet de vérifier des résultats obtenus autrement, et qu'il serait d'ailleurs utile de les faire comme une contre-épreuve de celles qui ont fourni ces résultats, je n'ai pas cru devoir en supprimer la description.

NOTES

CONTENANT QUELQUES NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS SUR DES OBJETS TRAITÉS DANS LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

I. *Sur la manière de démontrer par les quatre cas d'équilibre exposés au commencement de ce Mémoire, que la valeur de l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs est*

$$-\frac{2ii'}{\sqrt{r}}\cdot\frac{ds\,ds'}{d^2 r}\,ds\,ds'.$$

En suivant l'ordre des transformations que j'ai successivement fait subir à cette valeur, on trouve d'abord, en vertu des deux premiers cas d'équilibre, qu'elle est

$$\frac{ii'(\sin.\theta\sin.\theta'\cos.\omega+k\cos.\theta\cos.\theta')\,ds\,ds'}{r^n};$$

on déduit du troisième, entre n et k, la relation $n+2k=1$, et du quatrième $n=2$, d'où $k=-\frac{1}{2}$; ce quatrième cas d'équilibre est alors celui qu'on emploie en dernier lieu à la détermination de la valeur de la force qui se développe entre deux éléments de fils conducteurs : mais on peut suivre une autre marche en partant d'une considération dont s'est servi M. de Laplace, quand il a conclu des premières expériences de M. Biot, sur l'action mutuelle d'un aimant et d'un conducteur rectiligne indéfini, que celle qu'un élément de ce fil exerce sur un des pôles de l'aimant est en raison inverse du carré de leur distance, lorsque cette distance change seule de valeur et que l'angle compris entre la droite qui la mesure et la direction de l'élément reste le même.

En appliquant cette considération à l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs, il est aisé de voir, indépendamment de toute recherche préliminaire sur la valeur de la force qui en résulte, que cette force est aussi réciproquement proportionnelle au carré de la distance quand elle varie seule et que les angles qui déterminent la situation respective des deux éléments n'éprouvent aucun changement. En effet, d'après les considérations développées au commencement de ce Mémoire, la force dont il est ici question est nécessairement dirigée suivant la droite r, et a pour valeur

$$ii'f(r,\theta,\theta',\omega)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s';$$

d'où il suit qu'en nommant α, β, γ, les angles que cette droite forme avec les trois axes, ses trois composantes seront exprimées par

$$ii'f(r,\theta,\theta',\omega)\cos.\alpha\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s',\quad ii'f(r,\theta,\theta',\omega)\cos.\beta\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s',$$
$$ii'f(r,\theta,\theta',\omega)\cos.\gamma\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s',$$

et les trois forces parallèles aux trois axes qui en résultent entre deux circuits par les doubles intégrales de ces expressions, i et i' étant des constantes.

Or il suit du quatrième cas d'équilibre, en remplaçant les trois cercles par des courbes semblables quelconques dont les dimensions homologues soient en progression géométrique continue, que ces trois forces ont des valeurs égales dans deux systèmes semblables; il faut donc que les intégrales qui les expriment soient de dimension nulle relativement à toutes les lignes qui y entrent, d'après la remarque de M. de Laplace que je viens de rappeler, et qu'il en soit par conséquent de même des différentielles dont elles se composent, en comprenant $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}s'$ parmi les lignes qui y entrent, parce que le nombre de ces différentielles, quoi-

que infini du second ordre, doit être considéré comme le même dans les deux systèmes.

Or le produit $ds\,ds'$ est de deux dimensions : il faut donc que $f(r,\theta,\theta',\omega)\cos.\alpha$, $f(r,\theta,\theta',\omega)\cos.\beta$, $f(r,\theta,\theta',\omega)\cos.\alpha$ soient de la dimension -2 ; et comme les angles $\theta,\theta',\omega,\alpha,\beta,\gamma$ sont exprimés par des nombres qui n'entrent pour rien dans les dimensions des valeurs des différentielles, et que $f(r,\theta,\theta',\omega)$ ne contient que la seule ligne r, il faut nécessairement que cette fonction soit proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$, en sorte que la force qu'exercent l'un sur l'autre deux éléments de fils conducteurs est exprimée par

$$\frac{ii'\varphi(\theta,\theta',\omega)}{r^2}\,ds\,ds'.$$

Les deux premiers cas d'équilibre déterminent ensuite la fonction φ, où k seul reste inconnu, et l'on a

$$\frac{ii'(\sin.\theta\sin.\theta'\cos.\omega+k\cos.\theta\cos.\theta')}{r^2}\,ds\,ds',$$

pour la valeur de la force cherchée : c'est, comme on sait, sous cette forme que je l'ai donnée dans le Mémoire que j'ai lu à l'Académie le 4 décembre 1820. En remplaçant alors $\sin.\theta\sin.\theta'\cos.\varphi$, et $\cos.\theta\cos.\theta'$ par leurs valeurs

$$-\frac{r\,d^2 r}{ds\,ds'}ds\,ds',\; -\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'},$$

il vient

$$-\frac{ii'}{r^2}\left(\frac{d^2 r}{ds\,ds'}+k\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}\right)ds\,ds' =$$

$$-\frac{ii'(r\,dd'r+k\,dr\,d'r)}{r^2} = -\frac{ii'r^k\,dd'r+kr^{k-1}\,dr\,d'r}{r^{k+1}} =$$

$$-\frac{ii'd(r^k d'r)}{r^{k+1}} = -\frac{ii'dd'(r^{k+1})}{(k+1)r^{k+1}},$$

et en faisant pour abréger $k+1=m$, on a pour la valeur de la force cherchée cette expression très-simple

$$-\frac{ii'\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}'(r^m)}{mr^m}.$$

Il ne reste plus alors qu'à déterminer m d'après le cas d'équilibre qui démontre que la somme des composantes des forces qu'exerce un fil conducteur sur un élément, prises dans la direction de cet élément, est toujours nulle quand le fil conducteur forme un circuit fermé. Ce cas d'équilibre, que j'ai considéré dans ce Mémoire comme le troisième, doit l'être alors comme le quatrième, puisqu'il est le dernier qu'on emploie dans la détermination complète de la force cherchée. En remplaçant $\mathrm{d}'r$ par $-\cos.\theta'\,\mathrm{d}s'$ dans la valeur

$$-\frac{ii'\,\mathrm{d}(r^{m-1}\,\mathrm{d}'r)}{r^m}$$

de la force que les deux éléments exercent l'un sur l'autre, on a, pour sa composante, dans la direction de l'élément $\mathrm{d}s'$,

$$\frac{ii'\,\mathrm{d}s'\cos.\theta'\,\mathrm{d}(r^{m-1}\cos.\theta')}{r^m}=\frac{1}{2}\cdot\frac{ii'\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{d}(r^{2m-2}\cos.^2\theta')}{r^{2m-1}},$$

dont il faut que l'intégrale relative aux différentielles qui dépendent de $\mathrm{d}s$ soit nulle toutes les fois que la courbe s est fermée; mais il est aisé de voir, en intégrant par parties, qu'elle est égale à

$$\frac{1}{2}ii'\,\mathrm{d}s'\left[\frac{\cos.^2\theta'_2}{r_2}-\frac{\cos.^2\theta'_1}{r_1}+(2m-1)\int\frac{\cos.^2\theta'\,\mathrm{d}r}{r^2}\right].$$

La première partie de cette valeur s'évanouit quand la courbe s est fermée, parce qu'alors $r_2=r_1$, $\cos.\theta'_2=\cos.\theta'_1$, à l'égard de la seconde on démontre facilement, comme nous l'avons fait, page 209, que $\int\frac{\cos.^2\theta'\,\mathrm{d}r}{r^2}$ ne peut s'évanouir, quelle que soit la forme de la

courbe fermée s; il faut donc qu'on ait $2m-1=0$, $m=\frac{1}{2}$, et que la valeur de la force due à l'action mutuelle des deux éléments ds, ds' soit

$$-\frac{ii'\,dd'(r^m)}{m\,\varepsilon^m}=-\frac{2ii'\,dd'\sqrt{r}}{\sqrt{r}}.$$

II. *Sur une transformation propre à simplifier le calcul de l'action mutuelle de deux conducteurs rectilignes.*

Quand les deux conducteurs sont rectilignes, l'angle formé par les directions des deux éléments est constant et égal à celui des directions mêmes des deux conducteurs; il est donc censé connu, et en le désignant par ε, on a, page 207,

$$r\frac{d^2 r}{ds\,ds'}+\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}=-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx'}{ds'}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy'}{ds'}-\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz'}{ds'}=-\cos.\varepsilon,$$

d'où il suit que

$$\frac{dd'(r^m)}{m\,r^m}=\frac{(m-1)\,dr\,dr'+r\,dd'r}{r^2}=\frac{(m-2)\,dr\,dr'-\cos.\varepsilon\,ds\,ds'}{r^2}.$$

En désignant par p un autre exposant quelconque, on a de même

$$\frac{dd'(r^p)}{pr^p}=\frac{(p-2)\,dr\,d'r-\cos.\varepsilon\,ds\,ds'}{r^2},$$

et, en éliminant $\frac{dr\,dr'}{r^2}$ entre ces deux équations, on obtient

$$\frac{(p-2)\,dd'(r^m)}{mr^m}-\frac{(m-2)\,dd'(r^p)}{pr^p}=\frac{(m-p)\cos.\varepsilon\,ds\,ds'}{r^2},$$

d'où

$$\frac{dd'(r^m)}{mr^m}=\frac{m-2}{p-2}\cdot\frac{dd'(r^p)}{pr^p}+\frac{m-p}{p-2}\cdot\frac{\cos.\varepsilon\,ds\,ds'}{r^2}.$$

En substituant $\frac{1}{2}$ à m dans cette équation, et en multipliant les deux membres de celle qui résulte de cette substitution par $-ii'$, on a la valeur de l'action de deux éléments de fils conducteurs transformée ainsi

$$-\frac{2ii\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}'\sqrt{r}}{\sqrt{r}}=\frac{\frac{3}{2}ii'}{p-2}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}'(r^p)}{pr^p}-\frac{(\frac{1}{2}-p)ii'}{p-2}\cdot\frac{\cos.\varepsilon\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}{r^2},$$

et l'on peut, dans cette expression, assigner à p la valeur que l'on veut. Celle qui donne un résultat plus commode pour le calcul est $p=-1$, en l'adoptant, il vient

$$-\frac{2ii'\mathrm{d}\,\mathrm{d}'\sqrt{r}}{\sqrt{r}}=\frac{1}{2}ii'r\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}'\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\cdot\frac{ii'\cos.\varepsilon\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}{r^2}$$

$$=\frac{1}{2}ii'\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'\left(\frac{\cos.\varepsilon}{r^2}+r\frac{\mathrm{d}^2\frac{1}{r}}{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}s'}\right).$$

J'ai déja trouvé d'une autre manière, page 253, cette expression de la force qu'exercent l'un sur l'autre deux éléments de fils conducteurs; on ne peut l'employer, pour simplifier les calculs, que quand les conducteurs sont rectilignes, parce que ce n'est qu'alors que l'angle ε est constant et connu; mais dans ce cas, c'est elle qui donne de la manière la plus simple les valeurs des forces et des moments de rotation qui résultent de l'action mutuelle de deux conducteurs de ce genre. Si j'ai employé dans ce Mémoire d'autres moyens de calculer ces valeurs, c'est qu'à l'époque où je l'ai écrit je ne connaissais pas encore cette transformation de ma formule.

III. *Sur la direction de la droite désignée dans ce Mémoire sous le nom de* directrice de l'action électro-dynamique à un point donné, *lorsque cette action est celle d'un circuit fermé et plan dont toutes les dimensions sont très-petites.*

La droite que j'ai nommée *directrice de l'action électro-dyna-*

mique à un point donné est celle qui forme avec les trois axes des angles dont les cosinus sont respectivement proportionnels aux trois quantités A, B, C dont les valeurs, trouvées à la page 227, deviennent

$$A=\lambda\left(\frac{\cos.\xi}{r^3}-\frac{3qx}{r^5}\right),$$
$$B=\lambda\left(\frac{\cos.\eta}{r^3}-\frac{3qy}{r^5}\right),$$
$$C=\lambda\left(\frac{\cos.\zeta}{r^3}-\frac{3qz}{r^5}\right),$$

quand on substitue à n le nombre 2 auquel n est égal; si donc on suppose le petit circuit d'une forme quelconque situé comme il l'est (pl. 1, fig. 14), c'est-à-dire qu'après avoir placé l'origine A des coordonnées au point donné, on prenne pour l'axe des z la perpendiculaire AZ abaissée du point A sur le plan du petit circuit, et pour le plan des xz celui qui passe par cette perpendiculaire et par le centre d'inertie O de l'aire LMS auquel se rapportent les x, y, z qui entrent dans les valeurs de A, B, C, il est évident qu'on aura $y=0$, $q=z$, $\xi=\eta=\frac{\pi}{2}$, $\zeta=0$, et que ces valeurs se réduiront par conséquent à

$$A=-\frac{3\lambda xz}{r^5},\ B=0,\ C=\lambda\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right)=\frac{\lambda(x^2-2z^2)}{r^5},$$

parce que $r^2=x^2+z^2$. B étant nul, la directrice AE est nécessairement dans le plan des xz déterminé comme nous venons de le dire. La tangente de l'angle EAX qu'elle forme avec l'axe des x est évidemment égale à $\frac{C}{A}$, c'est-à-dire à $\frac{2z^2-x^2}{3xz}$; et comme celle de l'angle OAX l'est à $\frac{z}{x}$, on trouvera pour la valeur de la tangente de OAE

$$\text{tang. OAE}=\frac{\frac{z}{x}-\frac{2z^2-x^2}{3xz}}{1+\frac{2z^2-x^2}{3x^2}}=\frac{(z^2+x^2)x}{(2x^2+2z^2)z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{z}=\frac{1}{2}\,\text{tang. COA}:$$

d'où il suit que si l'on prend $OB = \frac{1}{3} OA$, et qu'on élève sur OA au point B un plan perpendiculaire à AO qui rencontre en D la normale OC au plan du petit circuit, la droite ADE menée par les points A, D, sera la directrice de l'action exercée au point A par le courant électrique qui le parcourt, puisqu'on aura

$$AB = 2OB, \text{tang.} BDA = 2 \, \text{tang.} BDO,$$

et

$$\text{tang.} OAE = \text{cot.} BDA = \tfrac{1}{2} \text{cot.} BDO = \tfrac{1}{2} \, \text{tang.} COA.$$

Cette construction donne de la manière la plus simple la direction de la droite AE suivant laquelle nous avons vu que le pôle d'un aimant placé en A serait porté par l'action de ce courant. Il est à remarquer qu'elle est située à l'égard du plan LMS du petit circuit qu'il décrit, de même que la direction de l'aiguille d'inclinaison l'est en général à l'égard de l'équateur magnétique; car le point O étant considéré comme le centre de la terre, le plan OAC comme celui du méridien magnétique, et la droite AE comme la direction de l'aiguille d'inclinaison, il est évident que l'angle OAE compris entre le rayon terrestre OA et la direction AE de l'aiguille aimantée est le complément de l'inclinaison, et que l'angle COA est le complément de la latitude magnétique LOA; l'équation précédente devient ainsi

$$\text{cot. incl.} = \tfrac{1}{2} \text{cot. lat.},$$

ou

$$\text{tang. incl.} = 2 \, \text{tang. lat.}$$

IV. *Sur la valeur de la force qu'un conducteur angulaire indéfini exerce sur le pôle d'un petit aimant.*

Soit que l'on considère le pôle B (pl. 2, fig. 34) du petit aimant AB comme l'extrémité d'un solénoïde électro-dynamique ou comme une molécule magnétique, on est d'accord, dans les deux manières de voir, à l'égard de l'expression de la force exercée

sur ce pôle par chaque élément du conducteur angulaire CMZ: on convient généralement qu'en abaissant du point B sur une de ses branches CμM prolongée vers O la perpendiculaire $BO = b$, en faisant $O\mu = s$, $BM = a$, $B\mu = r$, l'angle $B\mu M = \theta$, l'angle $CMH = BMO = \varepsilon$, et en désignant par ρ un coefficient constant, la force exercée sur le pôle B par l'élément ds situé en μ est égale à

$$\frac{\rho \sin.\theta \, ds}{r^2},$$

qu'il s'agit d'intégrer depuis $s = OM = a \cos.\varepsilon$ jusqu'à $s = \infty$, ou, ce qui revient au même, depuis $\theta = \varepsilon$ jusqu'à $\theta = 0$: mais, dans le triangle B O μ, dont le côté $OB = b = a \sin.\varepsilon$, on a

$$r = \frac{a \sin.\varepsilon}{\sin.\theta}, \; s = a \sin.\varepsilon \cot.\theta, \; ds = -\frac{a \sin.\varepsilon \, d\theta}{\sin.^2 \theta}, \; \frac{ds}{r^2} = -\frac{d\theta}{a \sin.\varepsilon},$$

ainsi

$$\frac{\rho \sin.\theta \, ds}{r^2} = -\frac{\rho \sin.\theta \, d\theta}{a \sin.\varepsilon},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{\rho}{a \sin.\varepsilon}(\cos.\theta + C),$$

ou, en la prenant entre les limites déterminées ci-dessus,

$$\frac{\rho(1 - \cos.\varepsilon)}{a \sin.\varepsilon} = \frac{\rho}{a} \text{tang.} \frac{1}{2} \varepsilon,$$

valeur qu'il suffit de doubler pour avoir la force exercée sur le pôle B par le conducteur angulaire indéfini CMZ; cette force, en raison inverse de $BM = a$, est donc, pour une même valeur de a, proportionnelle à la tangente de la moitié de l'angle CMH, et non à cet angle lui-même, quoiqu'on prétende que la valeur

$$\frac{\rho \sin.\theta \, ds}{r^2}$$

de la force exercée par l'élément ds sur le pôle B, ait été trouvée en *analysant par le calcul* la supposition que la force produite

par le fil conducteur CMZ était proportionnelle à l'angle CMH. On ne peut douter qu'il n'y eût quelque erreur dans ce calcul; mais il serait d'autant plus curieux de le connaître, qu'il avait pour but de déterminer la valeur d'une différentielle par celle de l'intégrale définie qui en résulte entre des limites données, ce qu'aucun mathématicien ne me paraît, jusqu'à présent, avoir cru possible.

Comme on ne peut pas, dans la pratique, rendre les branches MC, MZ du conducteur angulaire réellement infinies, ni éloigner les portions du fil dont il est formé qui mettent cet branches en communication avec les deux extrémités de la pile, à une assez grande distance du petit aimant AB pour qu'elles n'aient sur lui absolument aucune action, on ne doit, à la rigueur, regarder la valeur que nous venons d'obtenir que comme une approximation. Afin d'avoir à vérifier par l'expérience une valeur exacte, il faut calculer celle qu'exerce sur le pôle B du petit aimant un fil conducteur PSRMTSN, dont les portions SP, SN, qui communiquent aux deux extrémités de la pile, sont revêtues de soie et tordues ensemble, comme on le voit en SL, jusqu'auprès de la pile, en sorte que les actions qu'elles exercent se détruisent mutuellement, et dont le reste forme un losange SRMT situé de manière que la direction de la diagonale SM de ce losange passe par le point B. Pour cela, en conservant les dénominations précédentes et faisant de plus l'angle BRM$=\theta_1$, l'angle BRO'$=\theta_1'$, la distance BS$=a'$ et la perpendiculaire BO'$=b'=-a'\sin.\varepsilon$ parce que l'angle BSO'$=-\varepsilon$, on verra aisément que l'action de la portion RS du fil conducteur sur le pôle B est égale à

$$-\frac{\rho(\cos.\varepsilon-\cos.\theta_1')}{b'},$$

comme, à cause de $b=a\sin.\varepsilon$, on aurait trouvé

$$\frac{\rho(\cos.\theta_1-\cos.\varepsilon)}{b},$$

pour celle qu'exerce la portion MR sur le même pôle B, en prenant l'intégrale précédente depuis $\theta=\varepsilon$ jusqu'à $\theta=\theta_1$.

En réunissant ces deux expressions et en doublant la somme, on a, pour l'action de tout le contour du losange MRST,

$$2\rho\left(\frac{\cos.\theta_1}{b}-\frac{\cos.\varepsilon}{b}+\frac{\cos.\theta_1'}{b'}-\frac{\cos.\varepsilon}{b'}\right).$$

Cette expression est susceptible d'une autre forme qu'on obtient en rapportant la position des quatre angles du losange à deux axes BX, BY menés par le point B parallèlement à ces côtés et qui les rencontrent aux points D, E, F, G; si l'on fait $BD=BF=g$, $BE=BG=h$, on aura

$$b=BO=g\sin.2\varepsilon,\ b'=BO'=h\sin.2\varepsilon,$$

$$\cos.\theta_1=\frac{OR}{BR}=\frac{h+g\cos.2\varepsilon}{\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos.2\varepsilon}},$$

$$\cos.\theta'_1=\frac{O'R}{BR}=\frac{g+h\cos.2\varepsilon}{\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos.2\varepsilon}},$$

et au moyen de ces valeurs, celle de la force exercée sur le pôle B deviendra

$$2\rho\left(\frac{h+g\cos.2\varepsilon}{g\sin.2\varepsilon\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos.2\varepsilon}}+\frac{g+h\cos.2\varepsilon}{h\sin.2\varepsilon\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos.2\varepsilon}}-\frac{\cos.\varepsilon}{g\sin.2\varepsilon}-\frac{\cos.\varepsilon}{h\sin.2\varepsilon}\right)=$$
$$\rho\left(\frac{2\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos.2\varepsilon}}{gh\sin.2\varepsilon}-\frac{1}{g\sin.\varepsilon}-\frac{1}{h\sin.\varepsilon}\right),$$

en remplaçant dans les deux derniers termes $\sin.2\varepsilon$ par sa valeur $2\sin.\varepsilon\cos.\varepsilon$.

Abaissons maintenant du point D les perpendiculaires DI, DK sur les droites BM, BR : la première sera évidemment égale à $g\sin.\varepsilon$, et la seconde s'obtiendra en faisant attention qu'en la multipliant par $BR=\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos.2\varepsilon}$, on a un produit égal au double de la surface du triangle BDR, c'est-à-dire à $gh\sin.2\varepsilon$,

en sorte qu'en nommant $p_{1,1}$ et $p_{1,2}$ ces perpendiculaires, il vient

$$\frac{1}{p_{1,1}}=\frac{1}{g\sin.\varepsilon},\ \frac{1}{p_{1,2}}=\frac{\sqrt{g^2+h^2+2gh\cos.2\varepsilon}}{gh\sin.2\varepsilon};$$

en abaissant du point E les deux perpendiculaires EU, EV sur les droites BT, BS, et en les représentant par $p_{2,1}$ et $p_{2,2}$, la première sera égale à DK à cause de l'égalité des triangles BDR, BET, et la seconde aura pour valeur $h\sin.\varepsilon$, en sorte que l'expression de la force exercée par le contour du losange MRST sur le pôle B pourra s'écrire ainsi :

$$\rho\left(\frac{1}{p_{1,2}}+\frac{1}{p_{2,1}}-\frac{1}{p_{1,1}}-\frac{1}{p_{2,2}}\right).$$

Sous cette forme elle s'applique non-seulement à un losange dont une diagonale est dirigée de manière à passer par le point B, mais à un parallélogramme quelconque NRST (fig. 44) dont le périmètre est parcouru par un courant électrique qui agit sur le pôle d'un aimant situé dans le plan de ce parallélogramme. Il résulte, en effet, de ce qui a été dit, pages 229 et 276, que l'action de NRST sur le pôle B est la même que si tous les éléments $d^2\lambda$ dont se compose sa surface agissaient sur ce pôle avec une force égale à $\frac{\rho d^2\lambda}{r^3}$; d'où il suit qu'en nommant x et y les coordonnées rapportées aux axes BX, BY, et à l'origine B d'un point quelconque M de l'aire du parallélogramme ce qui donne

$$d^2\lambda=dx\,dy\sin.2\varepsilon,\ \text{et}\ r=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos.2\varepsilon},$$

on aura, pour la force totale imprimée au pôle B,

$$\rho\sin.2\varepsilon\iint\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+2xy\cos.2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or nous avons vu, page 266, que l'intégrale indéfinie de

$$\frac{ds\,ds'}{(a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$$

est

$$\frac{1}{a\sin.\varepsilon}\,\text{arc. tang.}\,\frac{ss'\sin.^2\varepsilon+a^2\cos.\varepsilon}{a\sin.\varepsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}},$$

ou

$$-\frac{1}{a\sin.\varepsilon}\,\text{arc. tang.}\,\frac{a\sin.\varepsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}}{ss'\sin.^2\varepsilon+a^2\cos.\varepsilon},$$

en supprimant la constante $\frac{\pi}{2}$. Quand a est nul, cette quantité se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; mais comme l'arc doit être alors remplacé par sa tangente, le facteur nul $a\sin.\varepsilon$ disparaît, et l'on a

$$\iint\frac{ds\,ds'}{(s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\sqrt{s^2+s'^2-2ss'\cos.\varepsilon}}{ss'\sin.^2\varepsilon},$$

qu'il est aisé de vérifier par la différentiation. On en conclut immédiatement que l'expression de la force que nous calculons, considérée comme une intégrale indéfinie, est

$$-\frac{\rho\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos.2\varepsilon}}{xy\sin.2\varepsilon}=-\frac{\rho}{p},$$

en nommant p la perpendiculaire PQ abaissée du point P sur BM, parce que le double de l'aire du triangle BPM est à la fois égal à $p\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos.2\varepsilon}$ et à $xy\sin.2\varepsilon$, ce qui donne

$$\frac{1}{p}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos.2\varepsilon}}{xy\sin.2\varepsilon}.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à calculer les valeurs que prend cette intégrale indéfinie aux quatre sommets N, R, T, S du parallélogramme, et à les ajouter avec des signes convenables; en continuant de désigner respectivement par $p_{1,1}, p_{1,2}, p_{2,1}, p_{2,2}$ les

perpendiculaires DI, DK, EU, EV, il est évident qu'on obtient ainsi pour la valeur de la force cherchée

$$\rho\left(\frac{1}{p_{1,2}}+\frac{1}{p_{2,1}}-\frac{1}{p_{1,1}}-\frac{1}{p_{2,2}}\right).$$

La direction perpendiculaire au plan du parallélogramme NRST suivant laquelle le pôle d'un aimant situé en B est porté par l'action du courant électrique qui parcourt le contour de ce parallélogramme, est la directrice de l'action électro-dynamique qu'il exerce au point B: d'où il suit que s'il y avait à ce point un élément de courant électrique situé dans le plan du parallélogramme, il formerait un angle droit avec la directrice, et qu'ainsi l'action de ce courant sur l'élément serait une force située dans ce plan, perpendiculaire à la direction de l'élément, et égale à celle que le même courant exercerait sur le pôle d'un aimant placé au point B multipliée par un rapport constant, qui est ici celui de ρ à $\frac{1}{2}ii'\,ds$, en nommant cet élément ds; en sorte que la force ainsi dirigée qui agirait sur l'élément aurait pour valeur

$$\frac{1}{2}ii'ds\left(\frac{1}{p_{1,2}}+\frac{1}{p_{2,1}}-\frac{1}{p_{1,1}}-\frac{1}{p_{2,2}}\right).$$

Lorsque l'élément situé en B n'est pas dans le plan du parallélogramme, mais forme avec ce plan un angle égal à ω, on peut le remplacer par deux éléments de même intensité, l'un dans ce plan, l'autre qui lui est perpendiculaire : l'action du courant du parallélogramme sur ce dernier étant nulle, on ne doit tenir compte que de celle qu'il exerce sur le premier; elle est évidemment dans le plan du parallélogramme, perpendiculaire à l'élément et égale à

$$\frac{1}{2}ii'ds\cos.\omega\left(\frac{1}{p_{1,2}}+\frac{1}{p_{2,1}}-\frac{1}{p_{1,1}}-\frac{1}{p_{2,2}}\right).$$

FAUTES A CORRIGER DANS LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Page 175, ligne 8, 21 *novembre,* lisez : 28 *novembre*

La page 209 porte mal à propos le chiffre 206.

Page 229, ligne 20, $\iint \frac{d^2\lambda}{l^{n+2}}$, *lisez :* $\iint \frac{d^2\lambda}{l^{n+1}}$;

Page 239, ligne 14, $\frac{1}{2} ii' \left(\frac{a}{r_2''} - \frac{a}{r_1''} - \frac{a}{r_2'} + \frac{a}{r_1'} \right) + \frac{r_1'' + r_2' - r_2'' - r_1'}{a}$,

lisez : $\frac{1}{2} ii' \left(\frac{a}{r_2''} - \frac{a}{r_1''} - \frac{a}{r^{2\prime}} + \frac{a}{r_1'} + \frac{r_1'' + r_2' - r_2'' - r_1'}{a} \right)$.

Page 248, ligne 16, Quant, *lisez :* Quand

Même page, ligne 17, (fig. 24), *lisez :* (fig. 22)

Page 250, ligne 14, $L'L_2 L''L_2$, *lisez :* $L'L_2$, $L''L_2$

Page 291, ligne 24, *on, lisez : oh*

Page 311, ligne 21, $\frac{\mu \varepsilon \varepsilon' d^2\sigma d^2\sigma'}{r^2}$, *lisez :* $-\frac{\mu \varepsilon \varepsilon' d^2\sigma d^2\sigma'}{r^2}$, que nous considérerons comme agissant sur l'élément d*s*;

Page 317, ligne 19, B*ab*A, *lisez :* B*cd*A

MÉMOIRE

SUR LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES;

PAR M. NAVIER.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 18 mars 1822.

I. *Notions préliminaires.*

Les géomètres représentent, au moyen d'équations aux différences partielles, les conditions générales de l'équilibre et du mouvement des fluides. Ces équations ont été déduites de divers principes, qui supposent tous que les molécules du fluide sont susceptibles de prendre les unes par rapport aux autres des mouvements quelconques, sans opposer aucune résistance, et de glisser sans effort sur les parois des vases dans lesquels le fluide est contenu. Mais les différences considérables, ou totales, que présentent dans certains cas les effets naturels avec les résultats des théories connues, indiquent la nécessité de recourir à des notions nouvelles, et d'avoir égard à certaines actions moléculaires qui se manifestent principalement dans les phénomènes du mouvement. On sait, par exemple, que, dans le cas où l'eau s'écoule hors d'un vase par un long tuyau d'un petit diamètre, le cal-

cul conduit à attribuer à ce fluide une vitesse d'écoulement qui surpasse beaucoup celle que l'on observe, et qui est soumise à des lois différentes.

Nous considérons ici un fluide incompressible, et nous nous représentons ce corps comme un assemblage de points matériels, ou molécules, placées à des distances très-petites les unes des autres, et susceptibles de changer presque librement de position les unes par rapport aux autres. Une pression est exercée sur la surface du fluide, et pénètre dans l'intérieur du corps. Elle tend à rapprocher les parties, qui résistent à cette action par des forces répulsives qui s'établissent entre les molécules voisines. Si le fluide est en repos, chaque molécule est en équilibre, en vertu de ces forces répulsives et des forces étrangères, telles que la pesanteur, qui peuvent agir sur elle; et c'est en cela que consiste l'état du corps.

Si le fluide est en mouvement, ce qui suppose, en général, que les molécules voisines s'approchent ou s'éloignent les unes des autres, il nous paraît naturel d'admettre que les forces répulsives dont il vient d'être question sont modifiées par cette circonstance. Nous concevons en effet que, dans l'état de repos du fluide, les molécules voisines se sont placées à des distances respectives déterminées par la condition d'une destruction mutuelle des forces de répulsion et de compression; ce qui a déterminé la grandeur du volume occupé par le corps, en raison de la température et de la pression extérieure à laquelle il est soumis. Or, tous les phénomènes indiquent que les actions exercées de molécule à molécule, dans l'intérieur des corps, varient avec la distance des molécules; que si l'on veut diminuer la distance des parties, on fait naître une force de répulsion; que si l'on

veut augmenter cette distance, on fait naître une force d'attraction. Un liquide résiste beaucoup moins qu'un solide à un effort qui tend à écarter les parties voisines les unes des autres, mais l'expérience prouve que la résistance à l'écartement n'est pas nulle. Nous admettrons, d'après ces considérations, que, dans un fluide en mouvement, deux molécules qui s'approchent l'une de l'autre se repoussent plus fortement, et que deux molécules qui s'éloignent l'une de l'autre se repoussent moins fortement qu'elles ne le feraient si leur distance actuelle ne changeait pas; et nous prendrons pour principe, dans les recherches suivantes, que par l'effet du mouvement d'un fluide, les actions répulsives des molécules sont augmentées ou diminuées d'une quantité proportionnelle à la vitesse avec laquelle les molécules s'approchent ou s'éloignent les unes des autres.

Il s'établit de même, dans l'état d'équilibre, des actions répulsives entre les molécules du fluide et celles des parois solides dans lesquelles il est contenu. Ces actions doivent être également modifiées dans l'état de mouvement, et nous supposerons encore qu'elles sont augmentées ou diminuées de quantités proportionnelles aux vitesses avec lesquelles chaque molécule du fluide s'approche ou s'éloigne de chaque molécule immobile appartenant à la paroi.

II. *Équations de l'équilibre des fluides.*

Pour exprimer les conditions de l'équilibre d'une portion de fluide conformément aux notions établies ci-dessus, on considérera une molécule placée au point M dont les coordonnées sont x, y, z; et une molécule placée au point M′

très-voisin du premier, dont les coordonnées sont $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$. On nommera ρ la distance des deux points, en sorte que $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$. La force répulsive qui s'établit entre ces deux molécules dépend de la situation du point M, puisqu'elle doit balancer la pression, qui peut varier dans les diverses parties du fluide. Elle dépend de la distance ρ, et, comme toutes les actions moléculaires, décroît très-rapidement quand cette distance augmente. On désignera cette force par la fonction $f(\rho)$, à laquelle on attribuera cette propriété, et qui doit être regardée aussi comme dépendante des coordonnées x, y, z. Cela posé, chaque molécule M du fluide est sollicitée par des forces semblables, émanant de toutes les molécules M′ qui l'entourent. Nous supposons également cette molécule sollicitée par des forces accélératrices dont les composantes, dans le sens de chaque axe, seront désignées par P, Q, R, ces lettres représentant les valeurs des forces, données en unités de poids, et rapportées à l'unité de volume. Il s'agit de trouver les conditions de l'équilibre entre toutes ces forces, et pour cela d'exprimer la somme de leurs moments, et d'égaler cette somme à zéro.

Si, le fluide étant supposé en équilibre, on imprime au système un mouvement très-petit, par l'effet duquel la molécule M soit déplacée dans le sens de chaque axe des quantités δx, δy, δz, que nous regardons comme des fonctions de x, y, z, la molécule M′ sera déplacée dans les mêmes directions des quantités

$$\delta x+\frac{d\delta x}{dx}\alpha+\frac{d\delta x}{dy}\beta+\frac{d\delta x}{dz}\gamma,$$

$$\delta y+\frac{d\delta y}{dx}\alpha+\frac{d\delta y}{dy}\beta+\frac{d\delta y}{dy}\gamma,$$

$$\delta z+\frac{d\delta z}{dx}\alpha+\frac{d\delta z}{dy}\beta+\frac{d\delta z}{dz}\gamma.$$

Par conséquent, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ désignant les accroissements des distances α, β, γ qui ont lieu par l'effet de ce mouvement, on a

$$\delta\alpha=\frac{d\delta x}{dx}\alpha+\frac{d\delta x}{dy}\beta+\frac{d\delta x}{dz}\gamma,$$

$$\delta\beta=\frac{d\delta y}{dx}\alpha+\frac{d\delta y}{dy}\beta+\frac{d\delta y}{dz}\gamma,$$

$$\delta\gamma=\frac{d\delta z}{dx}\alpha+\frac{d\delta z}{dy}\beta+\frac{d\delta z}{dz}\gamma.$$

Mais on a

$$\delta\rho=\frac{\alpha\delta\alpha+\beta\delta\beta+\gamma\delta\gamma}{\rho};$$

donc

$$\delta\rho=\frac{1}{\rho}\Big(\frac{d\delta x}{dx}\alpha^2+\frac{d\delta x}{dy}\alpha\beta+\frac{d\delta x}{dz}\alpha\gamma+\frac{d\delta y}{dx}\alpha\beta+\frac{d\delta y}{dy}\beta^2+\frac{d\delta y}{dz}\beta\gamma$$
$$+\frac{d\delta z}{dx}\alpha\gamma+\frac{d\delta z}{dy}\beta\gamma+\frac{d\delta z}{dz}\gamma^2\Big).$$

Le produit $f(\rho)\,.\,\delta\rho$ représente le moment de la force $f(\rho)$ agissant entre les deux molécules M, M′, considérée comme étant appliquée au point M, plus le moment de la même force, considérée comme étant appliquée au point M′. Nous prendrons d'abord la somme des produits semblables, donnés par les forces qui agissent entre la molécule M et toutes celles qui l'entourent ; et nous remarquerons qu'il existe autour du point M huit points, situés tous à la même distance ρ, et pour lesquels les coordonnées relatives α, β, γ ont des valeurs qui diffèrent deux à deux seulement par le signe de l'une des coordonnées. Donc, en ajoutant d'abord les huit valeurs du produit

$f(\rho) \,.\, \delta\rho$ qui répondent à ces huit points, il viendra

$$\frac{8.f(\rho)}{\rho}\left(\frac{d\delta x}{dx}\alpha^2 + \frac{d\delta y}{dy}6^2 + \frac{d\delta z}{dz}\gamma^2\right).$$

Il ne reste plus qu'à intégrer par rapport à α, 6, γ, dans l'étendue du huitième de sphère où ces quantités n'ont que des valeurs positives. Pour cela on changera ces coordonnées en coordonnées polaires, et désignant par ψ l'angle du rayon ρ avec sa projection sur le plan des $\alpha 6$, par φ l'angle que forme cette projection avec l'axe des α, on aura

$$\alpha = \rho \cos.\psi \cos.\varphi,$$
$$6 = \rho \cos.\psi \sin.\varphi,$$
$$\gamma = \rho \sin.\psi.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression précédente; multipliant par l'élément de volume $d\rho \,.\, d\psi \,.\, d\varphi \,.\, \rho^2 \cos.\psi$, et intégrant entre les limites convenables, il vient

$$8\int_0^\infty d\rho.\rho^3 f(\rho)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\frac{d\delta x}{dx}\cos.^3\psi.\cos.^2\varphi + \frac{d\delta y}{dy}\cos.^3\psi.\sin.^2\varphi + \frac{d\delta z}{dz}\sin.^2\psi.\cos.\psi\right);$$

ou bien, parce que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi.\cos^3\psi = \frac{2}{3}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi.\sin.^2\psi.\cos.\psi = \frac{1}{3}$,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi.\cos.^2\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi.\sin.^2\varphi = \frac{\pi}{4}$,

$$8.\frac{2}{3}.\frac{\pi}{4}\int_0^\infty d\rho.\rho^3 f(\rho).\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right).$$

Posant maintenant $\frac{4\pi}{3}\int_0^\infty d\rho.\rho^3 f(\rho) = p$, en désignant par

p une quantité qui ne dépend pas de la distance ρ, mais seulement des coordonnées x, y, z qui déterminent la situation de la molécule M, et qui mesure la résistance opposée à la pression qui tend à rapprocher les parties du fluide, on aura définitivement

$$p\left(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)$$

pour l'expression de la somme des moments des forces agissant entre la molécule M et toutes celles qui l'entourent.

Pour obtenir maintenant l'expression de la somme des moments de toutes les forces répulsives existantes entre les molécules du fluide, on devra multiplier l'expression précédente par l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, et intégrer par rapport à x, y, z dans toute l'étendue du fluide. Il suit de là que l'équation exprimant les conditions de l'équilibre du système est

$$0=\iiint dx\,dy\,dz\left[p\left(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)+\mathrm{P}\delta x+\mathrm{Q}\delta y+\mathrm{R}\delta z\right].$$

Nous remarquerons ici que, par le calcul précédent, on prend deux fois la somme des mêmes moments des forces intérieures; puisque la somme des moments des deux forces agissant suivant la ligne ρ, représentée par $f(\rho).\delta\rho$, est comptée par rapport à la molécule M et par rapport à la molécule M'. Mais cela est indifférent pour le résultat, puisque le facteur $\frac{1}{2}$, qu'il faudrait appliquer au premier terme de l'équation, peut être supposé compris dans la quantité p, dont la valeur absolue dépend toujours de la grandeur des forces appliquées au fluide.

En intégrant par parties le premier terme de l'équation

précédente, elle se changera en

$$o=\iiint dx\,dy\,dz\left[\left(P-\frac{dp}{dx}\right)\delta x+\left(Q-\frac{dp}{dy}\right)\delta y+\left(R-\frac{dp}{dz}\right)\delta z\right]$$
$$-\iint dy\,dz(p'\delta x'-p''\delta x'')-\iint dx\,dz(p'\delta y'-p''\delta y'')$$
$$-\iint dx\,dy(p'\delta z'-p''\delta z''),$$

en marquant d'un et de deux accents les lettres représentant les quantités appartenant aux limites des intégrales.

On a donc en premier lieu, pour les conditions de l'équilibre d'un point quelconque de l'intérieur du fluide, les équations indéfinies

$$\frac{dp}{dx}=P,\ \frac{dp}{dy}=Q,\ \frac{dp}{dz}=R,$$

qui signifient que les expressions des forces P, Q, R données en fonction de x, y, z, doivent être respectivement les différentielles partielles prises par rapport à x, à y, à z, d'une même fonction p de ces coordonnées. La différentielle complète de cette fonction est donc

$$dp=P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

et l'on a par conséquent

$$p=\int(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)+const.$$

formule où la fonction sous le signe $\int$ doit être nécessairement susceptible d'une intégration exacte, pour que le fluide soumis à l'action des forces représentées par P, Q, R, puisse demeurer en équilibre.

Si aucune force n'était appliquée aux points intérieurs du fluide, la valeur de p devrait être constante dans toute l'étendue de ce corps.

En second lieu, à l'égard des points appartenant à la surface, si l'on désigne par l, m, n les angles que forme un plan tangent à la surface mené au point dont les coordonnées sont x, y, z, avec les plans des yz, des xz et des xy, et par ds^2 l'élément différentiel de la surface, on pourra remplacer $dydz$ par $ds^2 . \cos. l$, $dxdz$ par $ds^2 . \cos. m$, et $dxdy$ par $ds^2 . \cos. n$ (Voyez la *Mécanique analytique*, 1re partie, section VII, art. 29 et 30). La partie de l'équation qui est relative à ces points devient donc

$$0 = \mathrm{S}\, ds^2 [(p' \cos. l' . \delta x' - p'' \cos. l'' . \delta x'') + (p' \cos. m' . \delta y' - p'' \cos. m'' . \delta y'') + (p' \cos. n' . \delta z' - p'' \cos. n'' . \delta z'')].$$

On en conclut que dans la partie de la surface qui est libre, où les variations des coordonnées de chaque point sont entièrement indéterminées, on doit avoir $p = 0$. Ainsi, la figure que doit affecter cette partie de la surface est donnée en termes finis par l'équation

$$0 = \int (\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz) + const. :$$

l'équation différentielle est

$$0 = \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz,$$

en sorte que la résultante des forces P, Q, R agissant sur chaque molécule du fluide placée à la surface libre, doit être dirigée suivant la normale à cette surface.

Dans la partie où la surface du fluide est formée par une paroi solide et fixe, les molécules qui s'y trouvent placées ne pouvant se mouvoir dans le sens de la paroi, on a entre les variations δx, δy, δz la relation

$$0 = \delta x . \cos . l + \delta y . \cos . m + \delta z . \cos . n,$$

en vertu de laquelle les termes de l'équation précédente disparaissent d'eux-mêmes, en sorte qu'il n'existe aucune condition particulière relative à cette partie de la surface.

Les lois de l'équilibre des fluides, énoncées ci-dessus, sont conformes à celles que les géomètres ont établies d'après le principe de l'équilibre des canaux, ou en supposant le fluide décomposé en éléments rectangulaires infiniment petits, et exprimant que chacun de ces éléments, soumis à l'action des pressions exercées sur ses faces, et des forces accélératrices appliquées aux molécules, doit être en équilibre. La considération des forces répulsives que la pression développe entre les molécules, dont M. de Laplace avait déja déduit les équations générales du mouvement des fluides, dans le XIIe livre de la Mécanique céleste, paraît dépendre plus immédiatement des notions physiques que l'on peut se former sur la nature de ces corps.

III. *Expressions des forces provenant des actions moléculaires qui ont lieu dans l'état de mouvement.*

Si, dans l'état de mouvement d'un fluide, les forces répulsives existantes entre les molécules ne subissaient aucune altération, les conditions du mouvement se déduiraient de

celles de l'équilibre en exprimant, conformément aux principes de la mécanique, que les forces accélératrices auxquelles sont dus les mouvements de chaque particule sont égales à la résultante des forces qui agissent sur cette particule, et qui se détruisent mutuellement dans l'état d'équilibre. En désignant par u, v, w les vitesses parallèles aux axes des x, des y et des z, à la fin du temps t, de la molécule située dans le point dont les coordonnées sont x, y, z, et par ρ la densité du fluide, on aurait ainsi les trois équations

$$P-\frac{dp}{dx}=\rho\left(\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}\right),$$
$$Q-\frac{dp}{dy}=\rho\left(\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}\right),$$
$$R-\frac{dp}{dz}=\rho\left(\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}\right).$$

On devrait avoir également $p=0$ dans tous les points de la surface libre du fluide. Il faudrait exprimer que les molécules contiguës aux parois solides ne peuvent se mouvoir que dans le sens de ces parois. Enfin l'on doit joindre aux équations précédentes celle qui exprime que le volume des parties du fluide est invariable, qui est

$$0=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}.$$

Mais, d'après les notions exposées ci-dessus, il est nécessaire d'admettre l'existence de nouvelles forces moléculaires, qui sont développées par l'état de mouvement du fluide. La recherche des expressions analytiques de ces forces est le principal objet que l'on s'est proposé dans la composition de ce mémoire.

Considérons toujours deux molécules très-voisines M, M'.

Les vitesses de la molécule M dans le sens des axes étant u, v, w, celles de la molécule M′ sont au même instant

$$u + \frac{du}{dx}\alpha + \frac{du}{dy}\beta + \frac{du}{dz}\gamma,$$

$$v + \frac{dv}{dx}\alpha + \frac{dv}{dy}\beta + \frac{dv}{dz}\gamma,$$

$$w + \frac{dw}{dx}\alpha + \frac{dw}{dy}\beta + \frac{dw}{dz}\gamma,$$

en négligeant les puissances supérieures des coordonnées α, β, γ, qui sont toujours supposées extrêmement petites. On a donc

$$\frac{\alpha}{\rho}\left(\frac{du}{dx}\alpha + \frac{du}{dy}\beta + \frac{du}{dz}\gamma\right) + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{dv}{dx}\alpha + \frac{dv}{dy}\beta + \frac{dv}{dz}\gamma\right) + \frac{\gamma}{\rho}\left(\frac{dw}{dx}\alpha + \frac{dw}{dy}\beta + \frac{dw}{dz}\gamma\right) = V$$

pour la différence des vitesses des molécules placées aux points M, M′ estimées suivant la ligne MM′; en sorte qu'en vertu du principe que nous avons adopté, il s'établit entre ces deux molécules une action proportionnelle à la quantité V. Si nous multiplions cette quantité par une fonction $f(\rho)$ de la distance des molécules qui ait la propriété de diminuer avec une rapidité extrême quand ρ augmente à partir de zéro, et de devenir nulle dès que ρ a une valeur sensible; l'expression $f(\rho).V$ représentera la force qui existe entre deux molécules quelconques du fluide. Il s'agit de prendre les moments des forces semblables dans toute l'étendue de la masse. Considérant donc le fluide dans son état de mouvement, nous supposerons que l'on donne au système une impulsion, par l'effet de laquelle les vitesses actuelles

u, v, w aient varié respectivement des quantités δu, δv, δw. Le produit des forces qui seraient appliquées à la molécule M dans le sens des axes, multipliées respectivement par ces variations, représenteront les moments de ces forces, et l'on aura de même $f(\rho).\mathrm{V}\,\delta\mathrm{V}$ pour la somme du moment de la force $f(\rho).\mathrm{V}$, considérée comme agissant de M' sur M, et du moment de la même force considérée comme agissant de M sur M'. L'expression précédente de V donne

$$\delta\mathrm{V} = \frac{\alpha}{\rho}\left(\frac{\delta du}{dx}\alpha + \frac{\delta du}{dy}\beta + \frac{\delta du}{dz}\gamma\right) + \frac{\beta}{\rho}\left(\frac{\delta dv}{dx}\alpha + \frac{\delta dv}{dy}\beta + \frac{\delta dv}{dz}\gamma\right)$$
$$+ \frac{\gamma}{\rho}\left(\frac{\delta dw}{dx}\alpha + \frac{\delta dw}{dy}\beta + \frac{\delta dw}{dz}\gamma\right),$$

et par conséquent le moment des forces intérieures provenant des actions mutuelles des deux molécules M et M', est exprimé par

$$\frac{f\rho}{\rho^2}\left[\alpha\left(\frac{du}{dx}\alpha + \frac{du}{dy}\beta + \frac{du}{dz}\gamma\right) + \beta\left(\frac{dv}{dx}\alpha + \frac{dv}{dy}\beta + \frac{dv}{dz}\gamma\right)\right.$$
$$\left. + \gamma\left(\frac{dw}{dx}\alpha + \frac{dw}{dy}\beta + \frac{dw}{dz}\gamma\right)\right] \times$$
$$\left[\alpha\left(\frac{\delta du}{dx}\alpha + \frac{\delta du}{dy}\beta + \frac{\delta du}{dz}\gamma\right) + \beta\left(\frac{\delta dv}{dx}\alpha + \frac{\delta dv}{dy}\beta + \frac{\delta dv}{dz}\gamma\right)\right.$$
$$\left. + \gamma\left(\frac{\delta dw}{dx}\alpha + \frac{\delta dw}{dy}\beta + \frac{\delta dw}{dz}\gamma\right)\right].$$

Il faut donc prendre la somme des quantités semblables pour toutes les molécules du fluide, considérées deux à deux, afin de la faire entrer dans l'équation générale qui donnera les lois du mouvement. Pour y parvenir, nous prendrons d'abord la somme de ces moments pour les actions réciproques exercées entre la molécule M et toutes celles qui

l'avoisinent ; puis nous ajouterons les sommes semblables qui seront fournies par tous les points du fluide.

Afin d'effectuer de la manière la plus simple la première intégration, qui doit être faite autour du point M, nous remarquerons, comme ci-dessus, que l'on peut distinguer avec le point M', dont les coordonnées comptées du point M sont α, β, γ, sept autres points situés à la même distance ρ du point M, dont les coordonnées auront les mêmes valeurs absolues, mais des signes différents. La formule précédente représentera les valeurs des moments relatifs aux actions réciproques du point M et de l'un quelconque de ces huit points, en donnant dans cette formule à α, β, γ les signes qui conviennent à chacun d'eux. Si l'on ajoute ensuite les huit valeurs que l'on obtiendra ainsi, les termes contenant des puissances paires des coordonnées α, β, γ se trouveront multipliés par 8, et les termes contenant des puissances impaires de ces mêmes coordonnées se seront détruits réciproquement. Cette circonstance est une suite nécessaire de ce que les valeurs correspondantes aux huit points dont il s'agit, considérées deux à deux, diffèrent seulement par le signe de l'une des coordonnées. La somme cherchée sera donc, en effectuant la multiplication indiquée,

$$\frac{8 \cdot f(\rho)}{\rho^3} \left\{ \begin{array}{l}
\left(\frac{du}{dx}\frac{\delta du}{dx}\alpha^4 + \frac{du}{dy}\frac{\delta du}{dy}\alpha^2\beta^2 + \frac{du}{dz}\frac{\delta du}{dz}\alpha^2\gamma^2\right) + \\
\left(\frac{dv}{dy}\frac{\delta du}{dx}\alpha^2\beta^2 + \frac{dv}{dx}\frac{\delta du}{dy}\alpha^2\beta^2\right) + \\
\left(\frac{dw}{dz}\frac{\delta du}{dx}\alpha^2\gamma^2 + \frac{dw}{dx}\frac{\delta du}{dz}\alpha^2\gamma^2\right) + \\
\left(\frac{du}{dx}\frac{\delta dv}{dy}\alpha^2\beta^2 + \frac{du}{dy}\frac{\delta dv}{dx}\alpha^2\beta^2\right) + \\
\left(\frac{dv}{dx}\frac{\delta dv}{dx}\alpha^2\beta^2 + \frac{dv}{dy}\frac{\delta dv}{dy}\beta^4 + \frac{dv}{dz}\frac{\delta dv}{dz}\beta^2\gamma^2\right) + \\
\left(\frac{dw}{dy}\frac{\delta dv}{dz}\beta^2\gamma^2 + \frac{dw}{dz}\frac{\delta dv}{dy}\beta^2\gamma^2\right) + \\
\left(\frac{du}{dx}\frac{\delta dw}{dz}\alpha^2\gamma^2 + \frac{du}{dz}\frac{\delta dw}{dx}\alpha^2\gamma^2\right) + \\
\left(\frac{dv}{dy}\frac{\delta dw}{dz}\beta^2\gamma^2 + \frac{dv}{dz}\frac{\delta dw}{dy}\beta^2\gamma^2\right) + \\
\left(\frac{dw}{dx}\frac{\delta dw}{dx}\alpha^2\gamma^2 + \frac{dw}{dy}\frac{\delta dw}{dy}\beta^2\gamma^2 + \frac{dw}{dz}\frac{\delta dw}{dz}\gamma^4\right)
\end{array} \right\}$$

Cette addition étant faite, il ne reste plus qu'à intégrer dans la huitième partie de la sphère dont le point M est le centre, où les valeurs de α, β, γ sont positives. A cet effet, on changera ces coordonnées en d'autres coordonnées polaires, et désignant par ψ l'angle du rayon ρ avec sa projection sur le plan des $\alpha\beta$, et par φ l'angle que forme cette projection avec l'axe des α, on aura

$$\alpha = \rho \cos.\psi \cos.\varphi,$$
$$\beta = \rho \cos.\psi \sin.\varphi,$$
$$\gamma = \rho \sin.\psi;$$

valeurs qui devront être substituées dans la formule précédente. On la multipliera ensuite par l'expression.....

$d\rho\, d\psi\, d\varphi\,.\,\rho^2 \cos.\psi$ de l'élément du volume dans le nouveau système de coordonnées, et on intégrera par rapport à φ et à ψ de o à $\frac{\pi}{2}$; et par rapport à ρ de o à ∞. En faisant abstraction du facteur en ρ, on aura d'abord

$$\alpha^4.\cos.\psi = \cos.^5\psi \cos.^4\varphi,\ 6^4\cos.\psi = \cos.^5\psi \sin.^4\varphi, \gamma^4\cos.\psi = \cos.\psi \sin.^4\psi,$$
$$\alpha^2 6^2 \cos.\psi = \cos.^5\psi \sin.^2\varphi \cos.^2\varphi,$$
$$\alpha^2\gamma^2 \cos.\psi = \cos.^3\psi \sin.^2\psi \cos.^2\varphi,$$
$$6^2\gamma^2 \cos.\psi = \cos.^3\psi \sin.^2\psi \sin.\varphi.$$

Multipliant chacune de ces quantités par $d\psi\, d\varphi$, et intégrant entre les limites indiquées, on trouve pour la valeur commune des trois premières intégrales $\frac{\pi}{10}$; et pour la valeur commune des trois dernières $\frac{\pi}{30}$. Par conséquent si nous posons

$$\varepsilon = \frac{8\pi}{30}\int_0^\infty d\rho\,.\,\rho^4 f(\rho),$$

la somme des moments de toutes les actions exercées réciproquement entre la molécule M et celles qui l'avoisinent se trouvera exprimée par

$$\varepsilon\left\{\begin{array}{l}
3\frac{du}{dx}\frac{\delta du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{\delta du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{\delta du}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{\delta du}{dx} + \frac{dv}{dx}\frac{\delta du}{dy} + \frac{dw}{dz}\frac{\delta du}{dx} + \frac{dw}{dz}\frac{\delta du}{dz} \\
\frac{du}{dx}\frac{\delta dv}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{\delta dv}{dx} + \frac{dv}{dx}\frac{\delta dv}{dx} + 3\frac{dv}{dy}\frac{\delta dv}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{\delta dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\frac{\delta dv}{dz} + \frac{dw}{dz}\frac{\delta dv}{dy} \\
\frac{du}{dx}\frac{\delta dw}{dz} + \frac{du}{dz}\frac{\delta dw}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{\delta dw}{dz} + \frac{dv}{dz}\frac{\delta dw}{dy} + \frac{dw}{dx}\frac{\delta dw}{dx} + \frac{dw}{dy}\frac{\delta dw}{dy} + 3\frac{dw}{dz}\frac{\delta dw}{dz}
\end{array}\right\}$$

Il faut maintenant prendre la somme des quantités semblables à la précédente pour tous les points de la masse du

fluide. On y parviendra en remarquant que, pour tous les points compris dans un élément rectangulaire infiniment petit, dont les dimensions sont dx, dy, dz, les valeurs de ces quantités ne diffèrent pas; d'où il résulte que la somme de ces quantités, pour tous les points compris dans l'élément, s'obtient en multipliant l'expression précédente par le volume $dx\,dy\,dz$. Il ne restera plus qu'à intégrer par rapport à x, y, z dans toute l'étendue de la masse du fluide. On pourrait d'ailleurs remarquer ici, comme dans le IIe paragraphe, que l'on prend deux fois la somme des moments dont il s'agit, et que, pour une entière exactitude, on doit regarder le facteur $\frac{1}{2}$ comme étant compris dans la constante ε, en outre des facteurs écrits ci-dessus.

Nous venons de trouver l'expression de la somme des moments des forces provenant des actions réciproques des molécules du fluide : nous allons passer maintenant à la recherche de la somme des moments des forces provenant des actions exercées entre les molécules du fluide et celles des parois solides.

Considérons à cet effet un point M appartenant à la surface de séparation du fluide et de sa paroi, dont les coordonnées sont x, y, z; et où les valeurs des vitesses du fluide, dans le sens de chaque axe, sont u, v, w. Considérons ensuite une molécule m du fluide, placée très-près du point M, dans le point m dont les coordonnées sont $x+\alpha, y+\beta, z+\gamma$. Les valeurs des vitesses de la molécule m, dans le sens de chaque axe, seront

$$u + \frac{du}{dx}\alpha + \frac{du}{dy}\beta + \frac{du}{dz}\gamma,$$

$$v + \frac{dv}{dx}\alpha + \frac{dv}{dy}\beta + \frac{dv}{dz}\gamma,$$

$$w + \frac{dw}{dx}\alpha + \frac{dw}{dy}\beta + \frac{dw}{dz}\gamma,$$

en négligeant les puissances supérieures des quantités α, β, γ, qui sont supposées extrêmement petites. La vitesse avec laquelle la molécule m s'éloigne du point M, est donc égale à

$$\frac{1}{\rho}(\alpha u + \beta v + \gamma w),$$

en négligeant toujours les termes du second ordre en α, β, γ par rapport aux termes du premier ordre; et cette formule représente également la vitesse avec laquelle la molécule m du fluide s'éloigne de toutes les molécules de la paroi solide qui sont situées dans le prolongement de la ligne mM. Il suit de là, et du principe que nous avons énoncé, que les actions réciproques exercées entre la molécule m du fluide et une molécule quelconque de la paroi située dans le prolongement de la ligne mM, sont toutes proportionnelles à la quantité précédente. Elles ne diffèrent les unes des autres qu'à raison de l'inégalité des distances entre m et les molécules dont il s'agit.

Si d'ailleurs les molécules du fluide reçoivent une impulsion, en vertu de laquelle les vitesses de la molécule m, dans le sens de chaque axe, augmentent des quantités δu, δv, δw, la vitesse de cette molécule, dans le sens de la ligne mM, aura augmenté de la quantité

$$\frac{1}{\rho}(\alpha\delta u + \beta\delta v + \gamma\delta w).$$

Donc les moments des actions réciproques entre la molécule m, et l'une quelconque des molécules de la paroi situées sur le

prolongement de la ligne mM, sont proportionnels à

$$\frac{1}{\rho^2}(\alpha u+\text{ϐ}v+\gamma w).(\alpha\delta u+\text{ϐ}\delta v+\gamma\delta w).$$

Ainsi, pour avoir la somme des moments fournis par toutes les actions dont il s'agit, il faudrait multiplier l'expression précédente par une fonction de la distance ρ' supposée entre la molécule m et une molécule de la paroi, puis intégrer depuis $\rho'=\rho$ jusqu'à $\rho'=\infty$. Or, en faisant cette opération, on doit nécessairement trouver pour résultat l'expression précédente multipliée par une fonction de ρ, qui décroisse très-rapidement quand ρ augmente à partir de o, et devienne nulle quand ρ acquiert une valeur sensible. Car l'action de la molécule m sur celles de la paroi est nécessairement assujettie à cette condition. Donc, en représentant par F (ρ) une telle fonction, on doit prendre

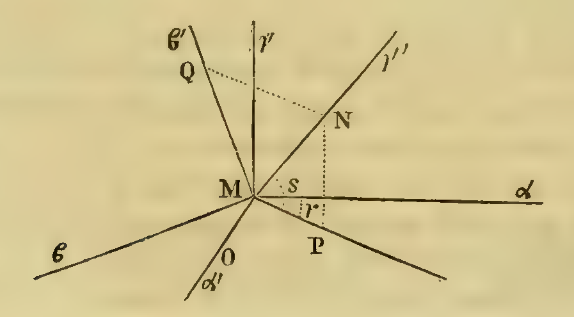
$$\frac{\mathrm{F}(\rho)}{\rho^2}.(\alpha u+\text{ϐ}v+\gamma w).(\alpha\delta u+\text{ϐ}\delta v+\gamma\delta w)$$

pour l'expression de la somme des moments des actions exercées entre la molécule m du fluide, et celles des molécules de la paroi qui se trouvent dirigées suivant la ligne mM.

Nous allons maintenant prendre la somme des moments semblables fournis par toutes les molécules du fluide situées dans le voisinage du point M. Nous obtiendrons de cette manière la somme des moments de toutes les actions réciproques, entre les molécules du fluide et de la paroi, qui sont dirigées suivant des lignes passant par le point M : il ne restera plus qu'à ajouter les sommes semblables fournies par tous les points de la surface du fluide.

Il s'agit donc d'abord d'intégrer l'expression précédente

dans l'étendue du fluide qui se trouve à une très-petite distance du point M. Cette intégrale doit généralement se prendre d'une manière différente lorsque la paroi est plane, et lorsqu'elle est courbe; mais ayant supposé précédemment le rayon de la sphère d'activité des actions moléculaires assez petit pour qu'il fût permis de négliger, dans l'étendue de cette sphère, les quarrés des distances α, β, γ par rapport à leurs premières puissances, nous devons admettre, comme une suite de cette hypothèse, que la surface de la paroi (sauf les arêtes ou les points singuliers) se confond avec son plan tangent dans l'espace où l'intégration doit s'effectuer. Ainsi supposant que l'on ait mené par le point M à la surface de la paroi un plan tangent, nous prendrons l'intégrale dont il s'agit dans la demi-sphère dont le point M est le centre, et qui est terminée par ce plan. Pour fixer la direction du plan tangent mené par le point M, soit MN la direction de la normale à la surface passant par ce point : nous désignerons par r l'angle P M α que la projection de cette normale sur le plan des $\alpha\beta$ fait avec l'axe des α, et par s l'angle NMP que la normale elle-même fait avec sa projection.



Cela posé, nous allons d'abord changer les coordonnées α, β, γ en d'autres coordonnées rectangulaires α', β', γ', dont les axes seront dirigés comme il suit. La normale MN est l'axe des γ'. Menant par le point M un plan perpendiculaire à cette normale, l'intersection MO de ce plan avec le plan des $\alpha\beta$ est l'axe des α'. Enfin l'intersection MQ du plan perpendiculaire dont on vient de parler avec le plan contenant les lignes MP, MN, Mγ, est l'axe des β'. En adaptant à ces suppositions les formules connues pour la transformation des coordonnées rectangulaires, nous aurons

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\alpha' \sin. r + \beta' \cos. r \sin. s + \gamma' \cos. r \cos. s,\\
\beta &= \alpha' \cos. r + \beta' \sin. r \sin. s + \gamma' \sin. r \cos. s,\\
\gamma &= \beta' \cos. s - \gamma' \sin. s;
\end{aligned}$$

et ces valeurs, substituées dans l'expression précédente, la changeront en

$$\begin{aligned}
\frac{F(\rho)}{\rho^2}\Big[\alpha'(-u \sin. r + v \cos. r) + \beta'(u \cos. r \sin. s + v \sin. r \sin. s + w . \cos. s) +\\
\gamma'(u \cos. r \cos. s + v \sin. r \cos. s - w \sin. s)\Big] \times\\
\Big[\alpha'(-\delta u \sin. r + \delta v \cos. r) + \beta'(\delta u \cos. r \sin. s + \delta v \sin. r \sin. s + \delta w \cos. s) +\\
\gamma'(\delta u \cos. r \cos. s + \delta v \sin. r \cos. s - \delta w \sin. s)\Big].
\end{aligned}$$

expression qu'il faut intégrer pour toutes les valeurs de α' et β', et pour les valeurs positives seulement de γ'. Cette opération se simplifiera en remarquant que si l'on considère quatre points placés symétriquement, pour lesquels γ' est positif, mais dont les autres coordonnées α' et β' diffèrent deux à deux par le signe; et qu'on ajoute les valeurs que prendrait l'expression précédente en ces quatre points, il ne restera dans le résultat de l'addition que les termes affectés

des puissances paires de α' et β', termes qui se trouveront multipliés par 4. Ainsi, effectuant la multiplication indiquée, tout se réduit à intégrer la quantité

$$\frac{4.F(\rho)}{\rho^2}\left\{\begin{array}{l}\alpha'^2\left\{\begin{array}{l}(u\sin.^2 r - v\sin.r\cos.r)\delta u\\(-u\sin.r\cos.r + v\cos.^2 r)\delta v\end{array}\right\}\\ \beta'^2\left\{\begin{array}{l}(u\cos.^2 r\sin.^2 s + v\sin.r\cos.r\sin.^2 s + w\cos.r\sin.s\cos.s)\delta u\\(u\sin.r\cos.r\sin.^2 s + v\sin.^2 r\sin.^2 s + w\sin.r\sin.s\cos.s)\delta v\\(u\cos.r\sin.s\cos.s + v\sin.r\sin.s\cos.s + w\cos.^2 s)\delta w\end{array}\right\}\\ \gamma'^2\left\{\begin{array}{l}(u\cos.^2 r\cos.^2 s + v\sin.r\cos.r\cos.^2 s - w\cos.r\sin.s\cos.s)\delta u\\(u\sin.r\cos.r\cos.^2 s + v\sin.^2 r\cos.^2 s - w\sin.r\sin.s\cos.s)\delta v\\(-u\cos.r\sin.s\cos.s - v\sin.r\sin.s\cos.s + w\sin.^2 s)\delta w\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

dans l'étendue du huitième de sphère où α', β' et γ' ont des valeurs positives.

Pour y parvenir nous substituerons, comme ci-dessus, les coordonnées polaires ρ, ψ et φ aux coordonnées rectangulaires, en posant

$$\alpha' = \rho\cos.\psi\cos.\varphi,$$
$$\beta' = \rho\cos.\psi\sin.\varphi,$$
$$\gamma' = \rho\sin.\psi.$$

Mettant donc ces valeurs dans l'expression précédente, et multipliant par l'élément de volume $d\rho\, d\psi\, d\varphi\,.\,\rho^2\cos.\psi$, nous aurons à prendre d'abord les trois intégrales

$$\iint d\psi\, d\varphi\,.\cos.^3\psi\cos.^2\varphi,\quad \iint d\psi\, d\varphi\,.\cos.^3\psi\sin.^2\varphi,$$
$$\iint d\psi\, d\varphi\,.\sin.^2\psi\cos.\psi,$$

entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, et nous trouverons pour leur valeur commune $\frac{\pi}{6}$. Substituant cette valeur à la place de α'^2, $6'^2$ et γ'^2; posant

$$\frac{4.\pi}{6}\int_0^\infty d\rho \, . \, \rho^2 F(\rho) = E,$$

et ayant égard aux réductions qui s'opèrent, il viendra définitivement

$$E(u\delta u + v\delta v + w\delta w)$$

pour l'expression cherchée de la somme des moments de toutes les actions qui s'exercent entre les molécules de la paroi et du fluide, suivant des directions qui passent par le point M de la surface de séparation du fluide et de la paroi. La lettre E représente une constante dont la valeur sera donnée par l'expérience, d'après la nature de la paroi et du fluide, et qui peut être regardée comme la mesure de leur action réciproque. On prendra ensuite la somme des moments de toutes les actions semblables, en multipliant l'expression précédente par l'élément ds^2 de la surface du fluide, et intégrant dans toute l'étendue de cette surface.

Il résulte de tout ce qui précède, qu'en admettant les principes énoncés dans l'article 1er de ce Mémoire, l'équation générale exprimant l'égalité à zéro de la somme des moments des forces appliquées aux molécules d'un fluide incompressible, dans l'état de mouvement, est

$$
0=\iiint dx\,dy\,dz \left\{
\begin{array}{l}
\left[\mathrm{P}-\frac{dp}{dx}-\rho\left(\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}\right)\right]\delta u \\
\left[\mathrm{Q}-\frac{dp}{dy}-\rho\left(\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}\right)\right]\delta v \\
\left[\mathrm{R}-\frac{dp}{dz}-\rho\left(\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dv}{dz}\right)\right]\delta w
\end{array}
\right\}
$$

$$
-\varepsilon\iiint dx\,dy\,dz \left(
\begin{array}{l}
3\frac{du}{dx}\frac{\delta du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{\delta du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{\delta du}{dz}+\frac{dv}{dy}\frac{\delta du}{dx}+\frac{dv}{dx}\frac{\delta du}{dy}+\frac{dw}{dz}\frac{\delta du}{dx}+\frac{dw}{dx}\frac{\delta du}{dz} \\
\frac{du}{dx}\frac{\delta dv}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{\delta dv}{dx}+\frac{dv}{dx}\frac{\delta dv}{dx}+3\frac{dv}{dy}\frac{\delta dv}{dy}+\frac{dv}{dz}\frac{\delta dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\frac{\delta dv}{dz}+\frac{dw}{dz}\frac{\delta dv}{dy} \\
\frac{du}{dx}\frac{\delta dw}{dz}+\frac{du}{dz}\frac{\delta dw}{dx}+\frac{dv}{dy}\frac{\delta dw}{dz}+\frac{dv}{dz}\frac{\delta dw}{dy}+\frac{dw}{dx}\frac{\delta dw}{dx}+\frac{dw}{dy}\frac{\delta dw}{dy}+3\frac{dw}{dz}\frac{\delta dw}{dz}
\end{array}
\right)
$$

$$
+\,\mathrm{S}\,ds^2.\mathrm{E}(u\delta u+v\delta v+w\delta w).
$$

Le signe S désigne une intégration effectuée dans toute l'étendue de la surface du fluide, en faisant varier la quantité E suivant la nature des corps avec lesquels cette surface est en contact. Il est inutile de tenir compte des termes relatifs à l'équilibre des points de cette surface, puisque, pourvu que l'on ait $p=0$ dans les points appartenant à la partie où la surface est libre, ces termes disparaissent.

En passant dans le second terme de l'équation précédente le d devant le δ, et effectuant les intégrations par parties, ce terme se changera en

$$
\varepsilon\iiint dx\,dy\,dz \left\{
\begin{array}{l}
\left(3\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}+2\frac{d^2v}{dx\,dy}+2\frac{d^2w}{dx\,dz}\right)\delta u \\
\left(2\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{d^2v}{dx^2}+3\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}+2\frac{d^2w}{dy\,dz}\right)\delta v \\
\left(2\frac{d^2u}{dx\,dz}+2\frac{d^2v}{dy\,dz}+\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+3\frac{d^2w}{dz^2}\right)\delta w
\end{array}
\right\}
$$

$$+\varepsilon\iint dy'\,dz'\left[\left(3\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}\right)\delta u'+\left(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\right)\delta v'+\left(\frac{du'}{dz'}+\frac{dw'}{dx'}\right)\delta w'\right]$$

$$+\varepsilon\iint dx'\,dz'\left[\left(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\right)\delta u'+\left(\frac{du'}{dx'}+3\frac{dv'}{dy'}+\frac{dw'}{dz'}\right)\delta v'+\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right)\delta w'\right]$$

$$+\varepsilon\iint dx'\,dy'\left[\left(\frac{du'}{dz'}+\frac{dw'}{dx'}\right)\delta u'+\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right)\delta v'+\left(\frac{du'}{dx'}+\frac{dv'}{dy'}+3\frac{dw'}{dz'}\right)\delta w'\right]$$

$$-\varepsilon\iint dy''\,dz''\left[\left(3\frac{du''}{dx''}+\frac{dv''}{dy''}+\frac{dw''}{dz''}\right)\delta u''+\left(\frac{du''}{dy''}+\frac{dv''}{dx''}\right)\delta v''+\left(\frac{du''}{dz''}+\frac{dw''}{dx''}\right)\delta w''\right]$$

$$-\varepsilon\iint dx''\,dz''\left[\left(\frac{du''}{dy''}+\frac{dv''}{dx''}\right)\delta u''+\left(\frac{du''}{dx''}+3\frac{dv''}{dy''}+\frac{dw''}{dy''}\right)\delta v''+\left(\frac{dv''}{dz''}+\frac{dw''}{dy''}\right)\delta w''\right]$$

$$-\varepsilon\iint dx''\,dy''\left[\left(\frac{du''}{dz''}+\frac{dw''}{dx''}\right)\delta u''+\left(\frac{dv''}{dz''}+\frac{dw''}{dy''}\right)\delta v''+\left(\frac{du''}{dx''}+\frac{dv''}{dy''}+3\frac{dw''}{dz''}\right)\delta w''\right]$$

en marquant par un trait les quantités qui se rapportent à la première limite des intégrales, et par deux traits celles qui se rapportent à la seconde limite. Nous remarquerons d'abord que l'équation de continuité

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,$$

à laquelle les valeurs de u, v, w doivent satisfaire dans toute l'étendue du fluide, donne, en la différentiant successivement par rapport à x, à y et à z,

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2v}{dx\,dy}+\frac{d^2w}{dx\,dz}=0,$$
$$\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2w}{dy\,dz}=0,$$
$$\frac{d^2u}{dx\,dz}+\frac{d^2v}{dy\,dz}+\frac{d^2w}{dz^2}=0;$$

D'après ces relations, l'expression précédente se réduit à

$$\varepsilon\iiint dx\,dy\,dz\Big[\Big(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\Big)\delta u+\Big(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\Big)\delta v+\Big(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\Big)\delta w\Big]$$

$$+\varepsilon\iint dy'\,dz'\;\Big[2\frac{du'}{dx'}\delta u'+\Big(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\Big)\delta v'+\Big(\frac{du'}{dz'}+\frac{dw'}{dx'}\Big)\delta w'\Big]$$

$$+\varepsilon\iint dx'\,dz'\;\Big[\Big(\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}\Big)\delta u'+2\frac{dv'}{dy'}\delta v'+\Big(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\Big)\delta w'\Big]$$

$$+\varepsilon\iint dx'\,dy'\;\Big[\Big(\frac{du'}{dz'}+\frac{dw'}{dx'}\Big)\delta u'+\Big(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\Big)\delta v'+2\frac{dw'}{dz'}\delta w'\Big]$$

$$-\varepsilon\iint dy''\,dz''\;\Big[\Big(2\frac{du''}{dx''}\delta u''+\text{etc.}$$

On voit donc en premier lieu que les équations indéfinies du mouvement du fluide deviendront respectivement

$$P-\frac{dp}{dx}=\rho\Big(\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz}\Big)-\varepsilon\Big(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\Big),$$

$$Q-\frac{dp}{dy}=\rho\Big(\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz}\Big)-\varepsilon\Big(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\Big),$$

$$R-\frac{dp}{dz}=\rho\Big(\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz}\Big)-\varepsilon\Big(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\Big).$$

En second lieu, à l'égard des conditions qui se rapportent aux points de la surface du fluide, si l'on désigne, comme on l'a fait plus haut, par l, m, n les angles que le plan tangent à la surface forme avec les plans des yz, des xz et des xy; si l'on remplace $dydz$ par $ds^2 \cos. l$, $dxdz$ par $ds^2 \cos. m$, $dxdy$ par $ds^2 \cos. n$, et les doubles signes d'intégration relatifs à $dydz$, $dxdz$, $dydz$ par le signe S relatif à ds^2 : il sera nécessaire, pour que les termes affectés des quantités δu, δv, δw soient respectivement réduits à zéro, que l'on ait, pour chacun des points de la surface du fluide, les équations déterminées

$$\mathrm{E}u+\varepsilon\left[\cos.l.2\frac{du}{dx}+\cos.m\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)+\cos.n\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\right]=0,$$

$$\mathrm{E}v+\varepsilon\left[\cos.l\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)+\cos.m.2\frac{dv}{dy}+\cos.n\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\right]=0,$$

$$\mathrm{E}w+\varepsilon\left[\cos.l\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)+\cos.m\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)+\cos.n.2\frac{dw}{dz}\right]=0.$$

La valeur de la constante E doit varier suivant la nature des corps avec lesquels le fluide est en contact, et (ce qui est physiquement impossible) s'il y avait un espace vide au-dessus de la portion libre de la surface du fluide, ces équations devraient encore être satisfaites pour les points appartenant à cette portion, en y supposant $\mathrm{E}=0$.

Les équations précédentes peuvent encore être simplifiées. En effet, les molécules du fluide contiguës à la paroi ne pouvant se mouvoir dans une direction perpendiculaire à la surface, on a la relation

$$0=u.\cos.l+v.\cos.m+w.\cos.n,$$

en vertu de laquelle elles se réduisent à

$$\mathrm{E}u+\varepsilon\left(\cos.l.\frac{du}{dx}+\cos.m.\frac{du}{dy}+\cos.n.\frac{du}{dz}\right)=0,$$

$$\mathrm{E}v+\varepsilon\left(\cos.l.\frac{dv}{dx}+\cos.m.\frac{dv}{dy}+\cos.n.\frac{dv}{dz}\right)=0,$$

$$\mathrm{E}w+\varepsilon\left(\cos.l.\frac{dw}{dx}+\cos.m.\frac{dw}{dy}+\cos.n.\frac{dw}{dz}\right)=0.$$

Dans un point où la paroi serait perpendiculaire à l'axe des z, on aurait simplement

$$\mathrm{E}u+\varepsilon\frac{du}{dz}=0,\ \mathrm{E}v+\varepsilon\frac{dv}{dz}=0.$$

Si elle était perpendiculaire à l'axe des y,

$$Eu + \varepsilon \frac{du}{dy} = 0, \quad Ew + \varepsilon \frac{dw}{dy} = 0;$$

et si elle était perpendiculaire à l'axe des x,

$$Ev + \varepsilon \frac{dv}{dx} = 0, \quad Ew + \varepsilon \frac{dw}{dx} = 0.$$

On peut, d'après ce qui précède, se former une notion exacte de la nature des constantes ε et E. Concevons une portion de fluide reposant sur un plan, et dont toutes les molécules se meuvent suivant des lignes parallèles entre elles et à ce plan. Admettons que les vitesses des molécules du fluide comprises dans une même couche parallèle au plan soient égales entre elles; et que les vitesses de chaque couche, à mesure qu'elles sont plus éloignées du plan, augmentent progressivement et uniformément, en sorte que deux couches dont la distance est égale à l'unité linéaire ont des vitesses dont la différence est aussi égale à l'unité linéaire. Dans cette hypothèse, la constante ε représente en unités de poids la résistance provenant du glissement de deux couches quelconques l'une sur l'autre, pour une étendue égale à l'unité superficielle.

Si de plus on suppose que la vitesse de la couche en contact avec le plan formant une paroi fixe est égale à l'unité linéaire, la constante E représente en unités de poids la résistance provenant du glissement de cette couche sur la paroi, pour une étendue égale à l'unité superficielle.

IV. *Applications des résultats précédents.*

Écoulement d'un fluide par un tuyau rectiligne dont la section est rectangulaire.

On considère un tuyau dont les parois sont formées par quatre plans parallèles aux plans des xy et des xz. L'axe du tuyau se confond avec l'axe des x, qui forme avec l'horizon un angle θ. Toutes les molécules du fluide sont supposées se mouvoir suivant des directions parallèles à l'axe du tuyau. On a donc ici $v=0, w=0$; et désignant par g la vitesse que la gravité imprime aux corps pesants dans l'unité de temps, $P=\rho g \sin.\theta, Q=0, R=\rho g \cos.\theta$, en supposant que les x et les z positives sont comptées de haut en bas. L'équation de continuité se réduit à $\frac{du}{dx}=0$; ce qui apprend que u est fonction de y et z seulement, ou que toutes les molécules situées sur une même ligne parallèle à l'axe du tuyau doivent à chaque instant avoir les mêmes vitesses. Les équations indéfinies deviennent

$$\rho g \sin.\theta - \frac{dp}{dx} = \rho \frac{du}{dt} - \varepsilon\left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}\right),$$

$$\frac{dp}{dy} = 0,$$

$$\rho g \cos.\theta - \frac{dp}{dz} = 0,$$

et l'on doit y satisfaire dans toute l'étendue du fluide. Il faut de plus, en désignant par b la demi-largeur, et par c la demi-épaisseur du tuyau, que l'on ait

$$\mathrm{E}u + \varepsilon\frac{du}{dy} = 0 \text{ quand } y = \pm b,$$

$$\mathrm{E}u + \varepsilon\frac{du}{dz} = 0 \text{ quand } z = \pm c.$$

La valeur de la pression est indépendante de y, en sorte qu'elle est la même pour tous les points situés sur une même ligne horizontale perpendiculaire à l'axe du tuyau. Nommons a la distance fixe ou variable de l'extrémité supérieure de la portion de fluide contenue dans le tuyau à l'origine des x, α la longueur de la partie du tuyau occupée par le fluide, a et α étant mesurés sur l'axe. Désignons par Z et Z′ les hauteurs dues aux pressions qui ont lieu respectivement aux deux extrémités du fluide, pour les points situés dans l'axe, pressions que nous supposerons constantes. Il faudra que l'on ait $p = \rho g.\mathrm{Z}$ quand $x = a, z = 0$; et $p = \rho g.\mathrm{Z}'$ quand $x = a + \alpha, z = 0$. L'expression

$$p = \rho g.\mathrm{Z} - \rho g(\mathrm{Z} - \mathrm{Z}')\frac{x - a}{\alpha} + \rho g.z\cos.\theta$$

satisfait à ces conditions, aussi bien qu'à la troisième des équations indéfinies. En substituant cette expression dans la première de ces équations, et posant $\zeta = \alpha\sin.\theta + \mathrm{Z} - \mathrm{Z}'$, il viendra

$$\rho\frac{du}{dt} = \frac{\rho g\zeta}{\alpha} + \varepsilon\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

La quantité ζ représente la différence de niveau des extrémités supérieures des lignes Z et Z′ supposées portées verticalement aux deux extrémités du fluide. La question se réduit maintenant à trouver une expression de u qui satisfasse en même temps à cette équation, aux deux équations déterminées écrites ci-dessus, et à l'état initial du fluide.

On satisfait à l'équation précédente au moyen de l'expression

$$u = SS\,P\cos.my.\cos.nz.e^{-\frac{\varepsilon}{\rho}(m^2+n^2)t} + SS\,Q\cos.my.\cos.nz,$$

m, n étant des nombres quelconques, P représentant un coëfficient arbitraire, et Q un coëfficient déterminé par la condition

$$\frac{\rho g \zeta}{\varepsilon.\alpha} = SS\,Q(m^2+n^2)\cos.my.\cos.nz.$$

En substituant ensuite l'expression de u dans les deux équations déterminées, et faisant dans la première $y = \pm b$, et dans la seconde $z = \pm c$, il en résulte les équations

$$mb.\text{tang}.mb = \frac{Eb}{\varepsilon},$$

$$nc.\text{tang}.nc = \frac{Ec}{\varepsilon},$$

qui donneront chacune pour m et n une infinité de valeurs, au moyen desquelles on formera les termes des séries qui entrent dans l'expression de u. Il ne reste plus qu'à déterminer les coëfficients de ces termes, que nous avons représentés par P et Q. Pour trouver d'abord les coëfficients représentés par Q, on multipliera l'équation dont ils dépendent par $dy\,dz\cos.m'y.\cos.n'z$, et l'on intégrera par rapport à y entre les limites o et b, et par rapport à z entre les limites o et c, ce qui donnera

$$\frac{\rho g \zeta}{\varepsilon\alpha}\int_0^b dy\int_0^c dz.\cos.m'y.\cos.n'z =$$

$$SS\,Q(m^2+n^2)\int_0^b dy\int_0^c dz.\cos.my.\cos.m'y.\cos.nz.\cos.n'z;$$

53.

Or on démontre que, les nombres m', n' étant supposés assujettis, comme les nombres m, n, aux équations déterminées précédentes, la valeur de l'intégrale double indiquée dans le second membre sera o si m' diffère de m, ou si n' diffère de n; mais que, dans le cas où $m'=m$ et $n'=n$, la valeur de cette intégrale est

$$\frac{2mb+\sin.2mb}{4m}\cdot\frac{2nc+\sin.2nc}{4n}.$$

(Voyez la *Théorie de la chaleur,* page 399). D'un autre côté, la valeur de l'intégrale double indiquée dans le premier membre est alors $\frac{\sin.mb}{m}\cdot\frac{\sin.nc}{n}\cdot$ L'équation précédente se réduit donc à

$$\frac{\rho g\zeta}{\varepsilon.\alpha}\cdot\frac{\sin.mb}{m}\cdot\frac{\sin.nc}{n}=Q(m^2+n^2)\cdot\frac{2mb+\sin.2mb}{4m}\cdot\frac{2nc+\sin.2nc}{4n};$$

ce qui donne la valeur de chacun des coëfficients représentés par Q. Quant aux autres coëfficients, ils se détermineront de la même manière par la considération de l'état initial du fluide. Si l'on désigne par $\varphi(y, z)$ la vitesse initiale du filet de fluide dont la position est fixée par les coordonnées y, z, on devra avoir

$$\varphi(y, z)=\mathrm{SS}\,(P+Q)\cos.my\cos.nz.$$

Il résulte de ce qui précède que, quel que soit le mouvement initial du fluide, ce mouvement s'approche continuellement d'un même état régulier et permanent, entièrement indépendant de cet état initial, et dont la nature est exprimée par l'équation

$$u = \frac{4.4.\rho g \zeta}{\varepsilon.\alpha} SS \frac{\sin. mb . \sin. nc . \cos. my \cos. nz}{(m^2 + n^2)(2mb + \sin. 2mb)(2nc + \sin. 2nc)}.$$

On forme les termes de la série en donnant successivement à m, n toutes les valeurs qui satisfont aux équations déterminées transcendantes $mb \operatorname{tang.} mb = \frac{Eb}{\varepsilon}$, $nc \operatorname{tang.} nc = \frac{Ec}{\varepsilon}$. Dans aucun cas le véritable mouvement du fluide, après un temps déterminé, ne différera sensiblement de celui qui est représenté par cette équation.

Pour trouver la vitesse moyenne des filets du fluide, il faut multiplier l'expression précédente par $dydz$, intégrer dans toute l'étendue de la section transversale du tuyau, et diviser par l'aire de cette section transversale. En nommant cette vitesse U, on a donc

$$U = \frac{4.4.\rho g \zeta}{\varepsilon.\alpha.bc} SS \frac{\sin.^2 mb . \sin.^2 nc}{mn(m^2 + n^2)(2mb + \sin. 2mb)(2nc + \sin. 2nc)}.$$

Cette valeur de U donne le mouvement auquel tend continuellement une masse de fluide placée dans un tuyau rectiligne incliné, formant avec l'horizon un angle dont le sinus est $\frac{\zeta}{\alpha}$. Comme la solution précédente ne tient pas compte de la modification que pourraient apporter à ce mouvement les effets qui ont lieu aux extrémités de la colonne de fluide, elle ne peut d'ailleurs s'appliquer en général qu'au cas où le tuyau est assez gros pour que ces effets puissent être négligés. Mais s'il s'agit d'un tuyau établissant la communication entre deux vases, la formule précédente donne la loi du mouvement, lors même que la grosseur de ce tuyau est très-petite, puisque les effets capillaires dont il s'agit disparaissent alors entièrement. Dans

ce dernier cas, α représente la longueur du tuyau, et ζ la distance verticale des surfaces de l'eau dans les deux vases, ou ce qu'on appelle communément la *charge d'eau.*

Si la largeur et la hauteur du tuyau étaient très-petites, les premières valeurs des quantités mb, nc, données par les équations déterminées, seraient à très-peu près $\sqrt{\frac{Eb}{\varepsilon}}, \sqrt{\frac{Ec}{\varepsilon}}$. Les valeurs suivantes des mêmes quantités différeraient très-peu des nombres $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\ldots$ Ainsi, dans ce cas, les valeurs qu'il faudrait attribuer aux nombres m, n, seraient respectivement $\sqrt{\frac{E}{\varepsilon b}}, \frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}, \frac{3\pi}{b}, \ldots\ldots$, et $\sqrt{\frac{E}{\varepsilon c}}, \frac{\pi}{c}, \frac{2\pi}{c}, \frac{3\pi}{c}, \ldots\ldots$ Les nombres de chacune de ces suites étant, dans l'hypothèse dont il s'agit, très-grands par rapport aux premiers, tous les termes de la valeur de U, à raison du facteur $\frac{1}{mn(m^2+n^2)}$, peuvent être négligés par rapport au premier. On a donc simplement

$$U = \frac{\rho g \zeta}{E\alpha} \cdot \frac{bc}{b+c};$$

et si la section du tuyau est un quarré dont b représente le demi-côté, l'expression de la vitesse moyenne est

$$U = \frac{\rho g \zeta}{E.\alpha} \cdot \frac{b}{2}.$$

Écoulement d'un fluide par un tuyau rectiligne dont la section est circulaire.

La solution donnée précédemment pour le cas d'un tuyau rectangulaire apprend que l'état constant dont le fluide s'approche continuellement, et dont son mouvement ne diffère

pas sensiblement au bout d'un certain temps, consiste en ce que les vitesses des filets du fluide décroissent depuis l'axe du tuyau jusqu'aux parois, et sont égales pour des filets placés symétriquement par rapport aux plans parallèles aux parois qu'on supposerait menés par cet axe. Ainsi, si les vitesses initiales ont été imprimées de manière que cette condition se trouve satisfaite, la même condition subsistera pendant toute la durée du mouvement. Il est évident que cette circonstance ne peut être particulière à la forme rectangulaire, et que, pour un tuyau cylindrique, l'état constant du fluide doit être tel que les vitesses des filets décroissent depuis l'axe du tuyau jusqu'à la paroi, et soient égales pour tous les filets situés à la même distance de cet axe. Nous supposerons donc, pour plus de simplicité, et en nous bornant au cas où les vitesses initiales seraient aussi égales pour les filets situés à la même distance de l'axe, que la vitesse u est seulement fonction du rayon variable r de chaque couche cylindrique du fluide.

Dans ce cas, l'équation différentielle employée ci-dessus deviendra, comme l'on sait,

$$\frac{\rho du}{dt} = \frac{\rho g \zeta}{\alpha} + \varepsilon \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right);$$

et on n'aura plus que la seule équation déterminée

$$\mathrm{E}u + \varepsilon \frac{du}{dr} = 0,$$

qui devra subsister pour la valeur $r = \mathrm{R}$, en appelant R le rayon du tuyau. L'identité de ces deux équations avec celles dont dépend la recherche du mouvement de la chaleur dans un cylindre, lorsque, dans l'état initial, les points situés à la

même distance de l'axe ont des températures égales, permet d'employer ici la solution exposée dans le Chapitre VI de la *Théorie de la chaleur.*

Pour trouver d'abord une valeur particulière de u qui satisfasse aux équations précédentes, nous supposerons donc $u = s \, . \, e^{-\frac{mt}{\rho}}$, m étant un nombre quelconque, et s une fonction de r. En substituant dans l'équation indéfinie, où nous faisons pour le moment abstraction du terme constant $\frac{\rho g \zeta}{\alpha}$, il viendra

$$\frac{m}{\varepsilon} s + \frac{d^2 s}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{ds}{dr} = 0,$$

équation dont dépend la fonction s. On satisfait à cette équation au moyen de la série

$$s = 1 - \frac{m}{\varepsilon}\frac{r^2}{2^2} + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{r^4}{2^2.4^2} - \frac{m^3}{\varepsilon^3}\frac{r^6}{2^2.4^2.6^2} + \frac{m^4}{\varepsilon^4}\frac{r^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \text{etc.},$$

dont la somme est donnée par l'intégrale définie

$$s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dq \, . \cos.\left(r\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}} \sin. q\right).$$

Si maintenant on substitue la valeur de u dans l'équation déterminée $\frac{E}{\varepsilon} u + \frac{du}{dr} = 0$, et que l'on fasse $r = R$, il vient

$$\frac{E}{\varepsilon}\left(1 - \frac{m}{\varepsilon}\frac{R^2}{2^2} + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{R^4}{2^2.4^2} - \frac{m^3}{\varepsilon^3}\frac{R^6}{2^2.4^2.6^2} + \frac{m^5}{\varepsilon^5}\frac{R^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \text{etc.}\right) =$$
$$\frac{2m}{\varepsilon}\frac{R}{2^2} - \frac{4m^2}{\varepsilon^2}\frac{R^3}{2^2.4^2} + \frac{6m^3}{\varepsilon^3}\frac{R^5}{2^2.4^2.6^2} - \frac{8m^5}{\varepsilon^5}\frac{R^7}{2^2.4^2.6^2.8^2} + \text{etc.}$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{E}}{\varepsilon}\int_0^\pi dq.\cos.\left(\mathrm{R}\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\sin.q\right)=\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\int_0^\pi dq\sin.q\sin.\left(\mathrm{R}\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\sin.q\right),$$

pour la condition à laquelle doit satisfaire le nombre représenté par m. L'une ou l'autre de ces équations, qui sont identiques, donnera pour m une infinité de valeurs.

En s'assujettissant à prendre les nombres représentés par m parmi ces valeurs, l'expression cherchée de la vitesse u en r et t sera donc

$$u=\mathbf{S}\,\mathrm{P}.s.e^{-\frac{mt}{\rho}}+\mathbf{S}\,\mathrm{Q}.s,$$

P et Q représentant des coëfficients constants; les coëfficients Q étant déterminés par la condition que l'on ait, depuis $r=0$ jusqu'à $r=\mathrm{R}$,

$$\frac{\rho g\zeta}{\alpha}=\mathbf{S}\,\mathrm{Q}ms,$$

et les coëfficients P par la condition que $\varphi(r)$ étant, au commencement du mouvement, la vitesse de la couche cylindrique de fluide dont le rayon est r, on ait, depuis $r=0$ jusqu'à $r=\mathrm{R}$,

$$\varphi(r)=\mathbf{S}(\mathrm{P}+\mathrm{Q}).s.$$

Il s'agit donc de trouver généralement l'expression du coëfficient A d'un terme quelconque du second nombre, dans l'équation

$$\varphi(r)=\mathbf{S}\,\mathrm{A}s,$$

la fonction s, ainsi que les nombres m qui entrent dans cette fonction, et dont les diverses valeurs servent à composer les termes de la série $\mathrm{SA}s$, étant assujettis aux conditions énoncées ci-dessus.

Pour y parvenir, on multipliera chaque membre de l'équation précédente par $dr.\sigma$, σ représentant une fonction de s, et l'on intégrera depuis $r=0$ jusqu'à $r=R$; ce qui donnera

$$\int_0^R dr.\sigma.\varphi(r) = \mathrm{S}\, A\int_0^R dr.\sigma s.$$

Mais, à cause de l'équation dont dépend la valeur de s,

$$\int dr.\sigma s = -\frac{\varepsilon}{m}\int dr.\sigma\left(\frac{d^2 s}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{ds}{dr}\right);$$

et comme, en intégrant par parties, on a

$$\int dr.\sigma\frac{d^2 s}{dr^2} = \sigma\frac{ds}{dr} - \frac{d\sigma}{dr}s + \int dr\frac{d^2\sigma}{dr^2}s,$$

$$\int dr.\sigma\frac{1}{r}\frac{ds}{dr} = \frac{\sigma}{r}s - \int dr\frac{d\frac{\sigma}{r}}{dr}s,$$

il vient

$$\frac{m}{\varepsilon}\int_0^R dr.\sigma s = \left(\frac{\sigma}{r}s+\sigma\frac{ds}{dr}-\frac{d\sigma}{dr}s\right)_0 - \left(\frac{\sigma}{r}s+\sigma\frac{ds}{dr}-\frac{d\sigma}{dr}s\right)_R + \int_0^R dr\left(\frac{d\frac{\sigma}{r}}{dr}s - \frac{d^2\sigma}{dr^2}s\right),$$

les parenthèses affectées des signes o et R indiquant les valeurs que prennent les quantités comprises dans ces parenthèses, lorsqu'on fait $r=0$, $r=R$. Supposons maintenant que la fonction σ soit assujettie à satisfaire à l'équation

$$\frac{n}{\varepsilon}\sigma - \frac{d\frac{\sigma}{r}}{dr} + \frac{d^2\sigma}{dr^2} = 0,$$

on aura, au lieu de l'équation précédente,

$$\frac{m-n}{\varepsilon}\int_0^R dr.\sigma s=\left(\frac{\sigma}{r}s+\sigma\frac{ds}{dr}-\frac{d\sigma}{dr}s\right)_0-\left(\frac{\sigma}{r}s+\sigma\frac{ds}{dr}-\frac{d\sigma}{dr}s\right)_R.$$

Or la fonction σ satisfait effectivement à l'équation que l'on vient de poser, si l'on prend $\sigma=r.s$. En effet, mettant cette valeur de σ dans l'équation dont il s'agit, elle devient

$$\frac{n}{\varepsilon}s+\frac{d^2s}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{ds}{dr}=0,$$

c'est-à-dire l'équation même dont dépend la fonction s, en changeant seulement m en n.

Nous désignerons par $\Psi\left(\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}r\right)$ la fonction de r qui satisfait à l'équation

$$\frac{m}{\varepsilon}s+\frac{d^2s}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{ds}{dr}=0,$$

et par $\Psi\left(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}r\right)$ la fonction de r qui satisfait à l'équation

$$\frac{n}{\varepsilon}s+\frac{d^2s}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{ds}{dr}=0.$$

En substituant donc $\Psi\left(\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}r\right)$ à la place de s, et $r\Psi\left(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}r\right)$ à la place de σ, il viendra

$$\frac{m-n}{\varepsilon}\int_0^R dr.\sigma s=\left[r\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}.\Psi'\left(\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}r\right).\Psi\left(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}r\right)-r\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}.\Psi\left(\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}r\right).\Psi'\left(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}r\right)\right]_0$$
$$-\left[r\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}.\Psi'\left(\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}r\right).\Psi\left(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}r\right)-r\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}.\Psi\left(\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}r\right).\Psi'\left(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}r\right)\right]_R$$

ou bien

$$\int_0^R dr.\sigma s = \frac{\varepsilon.R}{n-m}\Big[\sqrt{\tfrac{m}{\varepsilon}}.\Psi'\Big(\sqrt{\tfrac{m}{\varepsilon}}R\Big).\Psi\Big(\sqrt{\tfrac{n}{\varepsilon}}R\Big) - \sqrt{\tfrac{n}{\varepsilon}}.\Psi\Big(\sqrt{\tfrac{m}{\varepsilon}}R\Big).\Psi'\Big(\sqrt{\tfrac{n}{\varepsilon}}R\Big)\Big].$$

Si l'on suppose d'ailleurs le nombre n pris dans la série des valeurs représentées par m, les fonctions $\Psi\left(\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}r\right)$, $\Psi\left(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}r\right)$ seront également assujetties à satisfaire, pour la valeur particulière $r=R$, à l'équation $\frac{E}{\varepsilon}s+\frac{ds}{dr}=0$, d'où résulte

$$\frac{E}{\varepsilon} = -\frac{\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\Psi'\left(\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}R\right)}{\Psi\left(\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}R\right)} = -\frac{\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}\Psi'\left(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}R\right)}{\Psi\left(\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}R\right)}.$$

Le second membre de l'équation précédente est donc nul, sauf le cas particulier où l'on aurait $n=m$, dans lequel la valeur de ce second membre se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Pour trouver dans ce cas cette valeur, soit $\mu=\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}$, $\nu=\sqrt{\frac{n}{\varepsilon}}$. L'équation précédente devient

$$\int_0^R dr.\sigma s = R\,\frac{\mu\Psi'(\mu R).\Psi(\nu R)-\nu\Psi(\mu R).\Psi'(\nu R)}{\nu^2-\mu^2}:$$

différentiant les deux termes de la fraction par rapport à ν, et faisant ensuite $\nu=\mu$, il vient

$$\int_0^R dr.\sigma s = \frac{R}{2\mu}\Big[\mu R\big(\Psi'(\mu R)\big)^2 - \Psi(\mu R).\Psi'(\mu R) - \mu R\Psi(\mu R).\Psi''(\mu R)\Big].$$

Or la fonction $\Psi(\mu r)$ étant, pour la valeur $r=R$, assujettie

aux équations

$$\frac{m}{\varepsilon}s+\frac{d^2 s}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{ds}{dr}=0, \text{ ou } \mu^2\Psi+\mu^2\Psi''+\frac{\mu}{R}\Psi'=0,$$

$$\frac{E}{\varepsilon}s+\frac{ds}{dr}=0, \text{ ou } \frac{E}{\varepsilon}\Psi+\mu\Psi'=0,$$

d'où l'on déduit

$$\Psi'=-\frac{E}{\mu\varepsilon}\Psi, \quad \Psi''=-\Psi+\frac{E\Psi}{\mu^2\varepsilon R};$$

l'équation précédente se change en

$$\int_0^R dr.\sigma s=\frac{R^2\Psi^2}{2}\left(1+\frac{E^2}{\mu^2\varepsilon^2}\right),$$

ou, en nommant S la valeur que prend s quand $r=R$, et remplaçant μ par la valeur $\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}$,

$$\int_0^R dr.\sigma s=\frac{R^2 S^2}{2}\left(1+\frac{E^2}{m\varepsilon}\right).$$

Il résulte de ce qui précède, qu'en prenant pour σ la fonction $r.s$, le coëfficient A se trouvera déterminé par l'équation

$$\int_0^R dr.rs.\varphi(r)=A.\frac{R^2 S^2}{2}\left(1+\frac{E^2}{m\varepsilon}\right),$$

d'où

$$A=\frac{2\int_0^R dr.rs.\varphi(r)}{R^2 S^2\left(1+\frac{E^2}{m\varepsilon}\right)}.$$

Dans le cas particulier dont il s'agit ici, où les coëfficients Q

doivent être déterminés de manière que l'on ait

$$\frac{\rho g \zeta}{\alpha} = \mathrm{S}\, Q m s;$$

nous avons $\varphi(r) = \frac{\rho g \zeta}{\alpha}$, $A = Qm$. La formule précédente donne donc

$$Q = \frac{\rho g \zeta}{\alpha} \cdot \frac{2\int_0^R dr.rs}{m R^2 S^2 \left(1 + \frac{E^2}{m\varepsilon}\right)};$$

et par conséquent la portion de la valeur de u qui représente les vitesses constantes que le fluide tend toujours à prendre quel qu'ait été son état initial, et qu'il a acquises sensiblement après un certain temps, est

$$u = \frac{\rho g \zeta}{\alpha . R^2} \mathrm{S} \frac{2\int_0^R dr.rs}{m S^2 \left(1 + \frac{E^2}{m\varepsilon}\right)} . s$$

ou bien

$$u = \frac{\rho g \zeta}{\alpha} \mathrm{S} \frac{s}{m\left(1 + \frac{E^2}{m\varepsilon}\right)} \frac{\left(1 - \frac{m}{\varepsilon}\frac{R^2}{2.2^2} + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{R^4}{3.2^2.4^2} - \frac{m^3}{\varepsilon^3}\frac{R^6}{4.2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}\right)}{\left(1 - \frac{m}{\varepsilon}\frac{R^2}{2^2} + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{R^4}{2^2.4^2} - \frac{m^3}{\varepsilon^3}\frac{R^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}\right)^2}.$$

Pour déduire de cette expression celle de la vitesse moyenne U, il faut prendre l'intégrale $\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr.ru = \frac{2}{R^2}\int_0^R dr.ru$. On aura donc

$$U = \frac{\rho g \zeta}{\alpha} \mathrm{S} \frac{1}{m\left(1 + \frac{E^2}{m\varepsilon}\right)} \left(\frac{1 - \frac{m}{\varepsilon}\frac{R^2}{2.2^2} + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{R^4}{3.2^2.4^2} - \frac{m^3}{\varepsilon^3}\frac{R^6}{4.2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{m}{\varepsilon}\frac{R^2}{2^2} + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{R^4}{2^2.4^2} - \frac{m^3}{\varepsilon^3}\frac{R^6}{2^2.4^2.6^2} + \text{etc.}}\right)^2.$$

On formera les termes de la série du second membre, en mettant pour m la suite infinie des valeurs qui satisfont à l'équation transcendante écrite ci-dessus.

Cette valeur de U exprime la vitesse de l'écoulement de l'eau par un tuyau cylindrique qui établit la communication entre deux vases, α étant la longueur du tuyau, et ζ la charge d'eau. Si l'on suppose le diamètre du tuyau très-petit, la première valeur de m sera très-petite, et égale à $\frac{2E}{R}$; toutes les autres valeurs seront très-grandes par rapport à celle-ci. Il en résulte que l'expression de U, lorsque le rayon du tuyau est très-petit, se réduit à

$$U = \frac{\rho g \zeta}{E\alpha} \frac{R}{2\left(1 + \frac{ER}{2\varepsilon}\right)},$$

ou simplement à

$$U = \frac{\rho g \zeta}{E\alpha} \frac{R}{2}.$$

En comparant cette expression à celle trouvée précédemment pour un tuyau quarré, on voit que la vitesse moyenne prend la même valeur dans des tuyaux quarrés ou cylindriques, lorsque leur grosseur est la même et très-petite. Ces résultats apprennent d'ailleurs que la valeur de la vitesse est alors sensiblement indépendante de l'action mutuelle des parties du fluide, c'est-à-dire de ce qu'on nomme ordinairement la cohésion, ou la viscosité du fluide : cette valeur dépend presque uniquement de l'adhérence qui existe entre le fluide et sa paroi ; et elle est d'autant plus grande que cette adhérence est plus petite. Lorsque les tuyaux sont très-petits, la vitesse moyenne augmente, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnellement au diamètre; mais elle tend à augmenter dans

une proportion plus rapide, à mesure que la grandeur du diamètre augmente elle-même, et alors l'influence de la cohésion du fluide se fait de plus en plus sentir, et finit par déterminer seule, lorsque le diamètre devient très-grand, la vitesse moyenne du fluide.

La théorie précédente est entièrement d'accord avec les résultats principaux des curieuses expériences de M. Girard sur l'écoulement de divers fluides par des tubes capillaires. On en conclut d'abord, comme ces expériences l'avaient indiqué, que la vitesse moyenne, lorsque le mouvement est linéaire, est toujours proportionnelle au rapport $\frac{\zeta}{\alpha}$, résultat tout-à-fait contraire aux idées reçues, puisqu'on pensait que cette proportionnalité ne devait avoir lieu que pour des vitesses très-petites. Cet accord prouve que la supposition d'une action proportionnelle à la vitesse, entre la paroi et le fluide, est exacte, dans l'étendue au moins des vitesses soumises à l'observation.

On conclut aussi de cette théorie, que la vitesse d'un même liquide, coulant dans des tubes de même matière, mais de diverses grosseurs, augmente avec la grosseur du tube, conformément à l'indication donnée par l'expérience (1).

---

(1) M. Girard trouve que les résultats de ses expériences, lorsque les tuyaux sont assez longs pour que le mouvement y soit devenu linéaire, sont représentés par la formule

$$au = \frac{gDh}{4l},$$

u étant la vitesse moyenne, D le diamètre du tuyau, l sa longueur, et h la charge d'eau. Cette formule ne diffère en rien de celle à laquelle nous

La théorie dont il s'agit apprenant que la vitesse, lorsque le diamètre du tuyau est extrêmement petit, ne dépend

---

parvenons pour le cas d'un tuyau dont le diamètre est extrêmement petit. Le coëfficient a, dans la formule de M. Girard, est la quantité que nous avons désignée par E, divisée par la masse ρ de l'unité de volume.

Il résulte des expériences dont il s'agit, qu'à la température de 12° environ, la valeur du coëfficient a ou $\frac{E}{\rho}$, pour l'eau coulant dans le cuivre, est environ 0,0023 pour un tuyau de $0^{m},00183$ de diamètre; et environ 0,0027 pour un tuyau de $0^{m},00296$ de diamètre. L'inégalité de ces valeurs, si elle ne provient pas de quelque différence dans l'état de la surface des deux tuyaux, indique que leurs diamètres ne sont pas assez petits pour qu'on puisse leur appliquer rigoureusement la formule $U = \frac{\rho g \zeta}{E \alpha} \cdot \frac{R}{2}$. On peut présumer aussi que les tuyaux n'étaient pas encore assez longs pour que le mouvement y fût parfaitement linéaire, et qu'en les allongeant davantage, on aurait trouvé pour le coëfficient E des valeurs plus petites, et qui auraient offert moins de différences dans des tuyaux de diamètres différents.

Quoi qu'il en soit, les expériences apprennent que la valeur de $\frac{E}{\rho}$, pour l'eau coulant sur le cuivre, est un peu moindre que 0,0023, la température étant 12° environ, le mètre et la seconde sexagésimale étant l'unité linéaire et l'unité de temps. On a donc $E = \rho \times 0,0023$, ou, prenant le kilogramme pour unité de poids, $E = \frac{1000}{9,809} \cdot 0,0023$. La quantité E représente en unités de poids, comme on l'a dit ci-dessus, la résistance nécessaire pour surmonter le frottement d'une couche de fluide coulant sur une paroi solide avec une vitesse égale à l'unité linéaire, l'étendue de cette couche étant égale à l'unité superficielle. Donc la résistance provenant du frottement d'une couche d'eau d'un mètre quarré de surface, coulant sur du cuivre avec une vitesse d'un mètre par seconde, à la température de 12°, est d'environ $\frac{1}{4}$ de kilogramme. On peut juger par là que les frottements résultants des mouvements des fluides ont des valeurs très-sensibles, et on ne peut être surpris de l'influence considérable qu'ils ont dans plusieurs cas sur les circonstances du mouvement.

que de l'action réciproque du fluide de la paroi, on ne peut être étonné de voir le même fluide couler avec des vitesses très-différentes dans des tuyaux capillaires de diverses matières : l'eau, par exemple, couler trois ou quatre fois moins vite dans le verre que dans le cuivre.

On ne peut être étonné non plus de voir un fluide tel que l'alcool, dont les molécules sont moins adhérentes entre elles que ne le sont celles de l'eau et celles de l'huile de térébenthine, couler néanmoins plus lentement que ces deux derniers liquides dans des tubes de verre. On en conclura seulement que l'alcool adhère plus fortement au verre que ne le font l'eau et l'huile de térébenthine.

A l'égard des différences que présente l'écoulement d'un même fluide dans un même tube capillaire, sous diverses températures, elles s'expliquent naturellement, en admettant que l'action de la paroi sur le fluide diminue généralement à mesure que la température s'élève. Les expériences montrent d'ailleurs que tous les fluides ne suivent pas à cet égard la même loi. On voit, par exemple, que si l'on fait couler l'eau et une dissolution de nitrate de potasse dans le verre, le premier fluide coule plus lentement quand la température est au-dessous de 250 degrés environ, tandis qu'il coule plus vite quand la température est plus élevée : on conçoit en effet que l'élévation de la température peut déterminer dans certains cas, entre la matière du liquide et celle de la paroi, un commencement d'action chimique qui balance l'effet de la chaleur, et en vertu duquel il se manifeste une adhésion plus grande.

Il paraît, d'après les résultats précédents, que l'écoulement d'un fluide dans un tuyau d'un très-petit diamètre offre un

des meilleurs moyens que l'on puisse employer pour se former l'idée de la grandeur de l'adhérence qui s'établit entre la surface des corps solides et les liquides qui les mouillent. On sait que l'observation des phénomènes capillaires, dont M. de Laplace a donné la théorie, fait connaître l'adhésion des molécules fluides entre elles. On peut conclure des expériences de M. Gay-Lussac, rapportées dans le Supplément au Xe livre de la Mécanique céleste, les poids qui seraient nécessaires pour rompre une colonne d'eau, d'alcool, ou d'huile de térébenthine, d'un diamètre donné, en la tirant par ses extrémités opposées. La force que ces poids mesureraient ne doit pas être confondue avec celle désignée ci-dessus par la constante ε; mais il est très-vraisemblable que ces deux forces conservent les mêmes rapports dans divers fluides. Il paraît difficile, quant à présent, d'exécuter des expériences dont on puisse conclure avec une exactitude suffisante la valeur de la constante ε; parce que l'écoulement dans des tuyaux d'un très-petit diamètre n'est point propre à faire connaître cette valeur; et parce que, avec des tuyaux plus gros, on pourrait difficilement être assuré que le mouvement fût exactement linéaire.

Les recherches précédentes ne s'appliquent pas aux cas où les fluides coulent dans des parois qu'elles ne sont pas susceptibles de mouiller: par exemple au cas du mercure coulant dans le verre. On se tromperait si l'on croyait pouvoir adapter à des cas semblables les formules précédentes, en y supposant E nul. Il conviendrait plutôt alors de considérer l'action des parois comme opposant au glissement de la couche extrême du fluide une résistance analogue au frottement des corps solides glissants les uns sur les autres.

Une circonstance très-remarquable, observée par M. Girard, et qui consiste en ce que l'écoulement du mercure dans un tuyau capillaire de verre, s'arrête de lui-même lorsque le niveau du fluide dans le réservoir est descendu à une certaine hauteur au-dessus de l'orifice du tube, paraît indiquer manifestement que la résistance provenant du glissement sur la paroi, par laquelle le mouvement du fluide se trouve ici modifié, est dépendante, comme le frottement des corps solides, de l'intensité de la pression.

Mouvement linéaire dans un lit découvert.

Considérons une masse de fluide coulant dans un lit rectangulaire, dirigé en ligne droite, et d'une longueur indéfinie; admettons que le mouvement du fluide soit linéaire, c'est-à-dire que toutes les molécules se meuvent suivant des lignes droites parallèles aux plans qui forment les parois du lit. Les équations différentielles seront les mêmes que dans la question du mouvement dans un tuyau, c'est-à-dire qu'en supposant le mouvement uniforme, on aura

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=g\sin.\theta+\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right),\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}=0,\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}=g\cos.\theta.$$

La pression ne variant point avec y, il s'ensuit nécessairement que la section de la surface du fluide, par un plan parallèle au plan des yz, est horizontale. Cette surface est donc plane. En la prenant pour le plan des xy, la valeur de la pression sera

$$p=\rho gz\cos.\theta;$$

car dans la question dont il s'agit, les quantités représentées

ci-dessus par Z et Z′ sont nulles, quand on fait abstraction de la pression atmosphérique. L'équation différentielle à laquelle l'expression de u en y, z doit satisfaire est donc simplement

$$g \sin.\theta + \varepsilon\left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}\right) = 0.$$

A l'égard des conditions relatives aux points des parois, en désignant toujours par b la demi-largeur du lit, on devra avoir comme ci-dessus

$$\mathrm{E}u + \varepsilon\frac{dy}{du} = 0 \text{ quand } y = \pm b.$$

Si nous nommons c la profondeur du lit, et si nous regardons comme nulle la résistance qui provient du frottement de la surface supérieure de l'eau contre la couche d'air qui est en contact avec elle, nous devrons avoir

$$\frac{du}{dz} = 0 \text{ quand } z = 0,$$

$$\mathrm{E}u + \varepsilon\frac{du}{dz} = 0 \text{ quand } z = c.$$

On voit facilement, d'après cela, que l'expression de u trouvée ci-dessus pour le cas du tuyau,

$$u = \frac{4.4.g\sin.\theta}{\varepsilon} \mathrm{SS} \frac{\sin.mb \sin.nc.\cos.my \cos.nz}{(m^2+n^2)(2mb+\sin.2mb)(2nc+\sin.2nc)},$$

convient à la question dont il s'agit présentement, avec cette seule différence que l'axe des x, au lieu de passer par le centre des sections transversales, passe ici par le milieu de leur côté supérieur. Sin. θ est la pente de la surface du fluide, b la demi-largeur du lit, c sa profondeur. La plus grande

vitesse est celle du filet situé au milieu de la surface du fluide, et les vitesses diminuent à partir de ce point à mesure qu'on s'approche des parois.

La vitesse moyenne U est également exprimée, comme dans le cas du tuyau, par la formule

$$U = \frac{4.4 g \sin.\theta}{\varepsilon . bc} \mathrm{SS} \frac{\sin.^2 mb . \sin.^2 nc}{mn\,(m^2 + n^2)\,(2mb + \sin.2mb)\,(2nc + \sin.2nc)}.$$

On s'est beaucoup occupé de rechercher par l'expérience le rapport qui existe entre la vitesse moyenne, et celle qui a lieu à la surface et au milieu du lit, et qui est la plus grande de toutes. Cette dernière vitesse se déduit de l'expression précédente de u en faisant $y=0$, $z=0$; en sorte qu'en la nommant V, on a

$$V = \frac{4.4 g \sin.\theta}{\varepsilon} \mathrm{SS} \frac{\sin. mb \sin. nc}{(m^2 + n^2)\,(2mb + \sin.2mb)\,(2nc + \sin.2nc)}.$$

Si nous supposons d'abord b et c extrêmement petits, cas dans lequel les premières valeurs de m et n sont $\sqrt{\frac{\mathrm{E}b}{\varepsilon}}$, $\sqrt{\frac{\mathrm{E}c}{\varepsilon}}$, et les séries se réduisent sensiblement à leurs premiers termes, nous trouvons à fort peu près

$$\frac{U}{V} = 1 :$$

ainsi, le rapport des deux vitesses tend à devenir égal à l'unité quand les dimensions du lit diminuent de plus en plus.

Lors même que b et c ne sont pas très-petits, le rapport de U à V diffère peu de celui des premiers termes des séries. On peut considérer ce rapport comme représenté à fort peu

près par la formule

$$\frac{U}{V} = \frac{\sin. mb. \sin. nc}{mb. nc},$$

dans laquelle on mettrait pour m, n les plus petites valeurs qui satisfont aux équations dont dépendent ces quantités. Si l'on suppose b et c très-grands, ces valeurs sont $\frac{\pi}{2b}$, $\frac{\pi}{2c}$: on a donc alors à peu près

$$\frac{U}{V} = \frac{4}{\pi^2} = 0,4053.$$

Si l'on suppose b très-grand, et c très-petit, on aura $m = \frac{\pi}{2b}$, $n = \sqrt{\frac{Ec}{\varepsilon}}$; ce qui donne

$$\frac{U}{V} = \frac{2}{\pi} = 0,6366.$$

On suppose ordinairement $\frac{U}{V} = 0,8$; et d'après l'autorité de Dubuat, on regarde ce rapport comme pouvant s'appliquer à différents lits, dont les sections transversales n'auraient point la même figure et les mêmes dimensions absolues. Les résultats précédents montrent qu'effectivement la valeur 0,8 tient une sorte de milieu entre les valeurs extrêmes du rapport dont il s'agit; mais on en conclut que ces valeurs peuvent varier sensiblement avec la grandeur et la proportion des deux dimensions de la section.

Il est essentiel de remarquer d'ailleurs, qu'en admettant l'exactitude des expériences connues sur le mouvement uniforme de l'eau dans les canaux découverts et les tuyaux servant à la conduite des eaux, il résulte de la nouvelle théorie

exposée dans ce Mémoire, que la supposition d'un mouvement linéaire n'est point propre à représenter complètement les phénomènes de ce mouvement, à l'exception des cas où le diamètre des tuyaux est très-petit. Nous remarquerons aussi qu'en entreprenant de résoudre exactement la question dont il s'agit, il ne conviendrait point de supposer $E=0$ à la surface supérieure du fluide. Il faudrait prendre en considération l'action qui s'établit à cette surface entre l'air et l'eau, et le mouvement que l'eau doit communiquer aux couches d'air qui reposent sur elle.

Dans le cas où l'on aurait ainsi à considérer l'action mutuelle de deux couches formées de deux fluides différents, glissant l'une sur l'autre parallèlement à leur plan de séparation, on verra facilement, par les principes établis dans ce Mémoire, qu'en nommant u la vitesse dans le premier fluide, et u' la vitesse dans le second fluide, les conditions relatives à la surface de contact seraient

$$\left.\begin{array}{l} e(u-u')+\varepsilon\dfrac{du}{dz}=0, \\ e(u-u')+\varepsilon'\dfrac{du'}{dz}=0, \end{array}\right\} \text{et par conséquent } \varepsilon\frac{du}{dz}=\varepsilon'\frac{du'}{dz};$$

ε' désignant la valeur que prend ε dans le second fluide, et e un nouveau coëfficient proportionnel à l'action réciproque des molécules de l'un des fluides sur celles de l'autre.

MÉMOIRE

Sur la Théorie du magnétisme en mouvement;

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie des Sciences, le 10 juillet 1826.

DANS les deux Mémoires que j'ai lus précédemment à l'Académie, j'ai considéré l'action des corps aimantés par influence, lorsque les fluides boréal et austral sont parvenus dans leur intérieur à l'état d'équilibre. Je me propose maintenant d'étendre au cas du mouvement, la théorie que j'ai exposée en détail dans le premier de ces Mémoires; théorie qui attribue les phénomènes magnétiques à deux fluides impondérables, contenus l'un et l'autre en égale quantité dans les corps susceptibles d'aimantation, dont les particules n'éprouvent jamais que de très-petits déplacements et sont soumises à une action mutuelle en raison inverse du carré des distances, répulsive entre celles d'un même fluide, et attractive entre les molécules de l'un des fluides et celles de l'autre.

Coulomb avait pensé que tous les corps peuvent donner des signes d'aimantation, et que cette propriété ne provenait pas d'une petite proportion de fer qui entrerait dans leur

composition. Cette opinion se trouve aujourd'hui confirmée par les expériences de M. Arago, qui ont fait voir que les métaux, l'eau, le verre, le bois, etc., agissent sur l'aiguille aimantée quand ils sont en mouvement, ou quand l'aiguille oscille dans leur voisinage. Mais ce que cette découverte a, ce me semble, de plus important, c'est qu'elle nous apprend que le magnétisme agit dans les corps en mouvement avec une intensité et suivant des lois très-différentes de ce qui a lieu dans les corps en repos. Cette différence d'action a aussi été remarquée par M. P. Barlow, mais dans le fer seulement, et non pas dans des substances comme le cuivre, par exemple, où le magnétisme est à peine sensible dans l'état de repos, et où il se montre avec une grande intensité dans l'état de mouvement. C'est à l'occasion de ces expériences, maintenant bien connues des savants, que j'ai écrit ce nouveau Mémoire.

Je continuerai d'appeler *éléments magnétiques,* les petites portions des corps aimantés dans lesquels les fluides boréal et austral peuvent se mouvoir, et qui sont séparées par d'autres portions imperméables au magnétisme. La proportion de la somme de leurs volumes, au volume entier de chaque corps, varie dans les différentes matières; ce qui suffit pour expliquer comment, dans l'état de repos, ces matières donnent des signes de magnétisme plus ou moins marqués sous l'influence des mêmes forces extérieures. Cette proportion peut aussi dépendre de la température des corps aimantés par l'influence; et ce serait pour cela que l'intensité de leurs actions magnétiques change avec leur degré de chaleur. Mais pour se rendre raison de la différence d'action du magnétisme dans les deux états de mouvement et de repos, d'un

même corps, à la même température, il faut avoir recours à d'autres considérations.

Dès qu'on approche un aimant d'un corps susceptible d'aimantation par influence, et où les éléments magnétiques sont en proportion quelconque, la décomposition du fluide neutre commence dans chacun des éléments, et elle continue jusqu'à ce que l'action du fluide décomposé fasse équilibre à la force extérieure, ce qui arrive après un temps très-court, si cette force est constante en grandeur et en direction. Mais si elle varie continuellement, ou bien, si l'aimant extérieur change de position à l'égard des éléments soumis à son influence, les deux fluides, au lieu de parvenir à un état permanent, se mouvront dans chaque élément avec des vitesses qui pourront n'être pas les mêmes, toutes choses d'ailleurs égales, dans les corps de diverses matières. Dans cet état, nous ne saurions déterminer à chaque instant, la distribution variable des deux fluides dans les éléments magnétiques; néanmoins nous pouvons concevoir qu'elle soit très-différente de la distribution permanente qui a lieu dans l'état d'équilibre : il est possible, en effet, que pendant le mouvement, la décomposition du fluide neutre ayant lieu dans toute l'étendue de chaque élément, l'un des fluides boréal ou austral soit en excès dans chacun de ses points; et qu'au contraire, dans l'état d'équilibre, le fluide décomposé soit transporté à sa surface où il forme une couche d'une très-petite épaisseur par rapport aux dimensions de cet élément, ainsi que nous l'avons supposé dans les précédents Mémoires. L'action exercée au dehors par un même élément soumis à l'influence des mêmes forces, serait alors très-différente dans les deux cas, puisque dans l'un elle émanerait seulement des

points voisins de la surface, et dans l'autre, de tous les points de son volume. Toutefois je ne fais ici cette observation que pour indiquer une cause probable et facile à se représenter, de la différence d'action magnétique que l'expérience a fait connaître entre les corps en mouvement et les corps en repos. Mon analyse embrasse à la fois ces deux cas, et je l'ai affranchie de toute hypothèse relative à la disposition des deux fluides dans les éléments magnétiques. Il ne subsiste dans les formules qui expriment, après un temps très-court, l'action extérieure d'un corps aimanté par influence, que des constantes dont l'une répond à l'état d'équilibre, et ne dépend que de la proportion des éléments magnétiques, tandis que les autres sont relatives à l'état de mouvement, et dépendent de cette proportion et de la vitesse des deux fluides dans ces éléments. Quelle que soit d'ailleurs la nature de ces constantes, elles doivent être données par l'expérience pour chaque corps en particulier, et même pour chaque degré de chaleur, si l'observation fait voir qu'elles changent avec la température.

Si les éléments magnétiques n'étaient pas des sphères, et qu'ils fussent régulièrement disposés, comme cela pourrait arriver dans les corps cristallisés, les constantes dont nous parlons dépendraient encore de leur forme et de leur disposition. Dans ce cas, l'action d'un corps sphérique ne serait pas la même de tous les côtés, c'est-à-dire que le centre de ce corps ne changeant pas de position, et les forces extérieures qui produisent son aimantation, restant les mêmes, son action serait différente, lorsqu'on tournerait l'un de ses hémisphères d'un côté ou d'un autre. Mais une telle circonstance ne s'étant pas encore présentée à l'observation, nous avons exclu de nos recherches, ce cas singulier dont la possibilité

avait déja été remarquée dans les Mémoires précédents.

Nous continuerons aussi de supposer nulle, ou du moins très-faible, la force coercitive dans les corps que nous considérerons : toute force extérieure, d'une grandeur appréciable, qui agira sur ces corps, y décomposera donc en proportion le fluide neutre; les effets de cette décomposition commenceront à se manifester au dehors, aussitôt que la force extérieure aura commencé d'agir, et ils atteindront toute leur intensité dans un intervalle de temps très-court. C'est ce qui arrive dans le fer doux, par exemple. C'est encore ce que l'on observe dans les expériences de M. Arago, sur des plaques de cuivre, ou d'autres matières, dont on approche les pôles d'une aiguille aimantée. Il n'en faut pas conclure, cependant, que ces substances n'opposent aucune résistance au mouvement des deux fluides dans leurs éléments magnétiques; nous admettrons, au contraire, que la matière pondérable exerce sur les particules boréales et australes une certaine action, insuffisante pour empêcher leur mouvement de commencer quand elles sont sollicitées par une force extérieure qui n'est pas extrêmement petite, mais dont l'effet est de retarder plus ou moins ce mouvement, et peut se comparer à celui de la résistance des milieux. Nous supposerons de plus que cette action varie avec la matière et la température des corps, afin d'expliquer comment la vitesse des deux fluides, bien qu'elle soit très-grande dans toutes les substances dépourvues de force coercitive, peut néanmoins changer, dans un rapport quelconque, en passant de l'une de ces substances à une autre.

On trouvera dans ce nouveau Mémoire, les équations d'où dépend, en grandeur et en direction, l'action magnétique exercée à chaque instant sur un point extérieur, par

un corps de forme quelconque, homogène ou hétérogène, où la force coercitive est insensible, et qui est soumis à l'influence de forces variables ou constantes. Ces équations renferment, comme cas particulier, celles que j'avais trouvées dans mon premier Mémoire sur le magnétisme. Quoiqu'elles soient présentées sous la forme la plus simple dont elles sont susceptibles, ce n'est, cependant, que dans des cas très-limités qu'on peut parvenir à les résoudre. J'en ai fait très-facilement l'application au cas d'une sphère homogène, tournant sur elle-même, et aimantée par l'action de la terre; et ensuite, par des calculs beaucoup plus compliqués, à une plaque homogène, sans discontinuité, d'une petite épaisseur et d'un grand diamètre, agissant sur des points très-éloignés de ses bords. J'ai développé en détail les formules relatives à l'action de cette plaque sur une aiguille parallèle ou inclinée, qui oscille dans son voisinage, ou qu'elle entraîne en tournant dans son plan. Leur comparaison à des expériences faites dans les circonstances qu'elles supposent, suffira pour décider si la théorie dont elles dérivent doit être accueillie ou rejetée : je la ferai aussitôt que j'aurai pu réunir toutes les données nécessaires de l'observation.

§ Ier.

Expressions générales des actions magnétiques.

(1) Le fluide libre étant distribué d'une manière quelconque, soit près de la surface, soit dans tout l'intérieur de chaque élément magnétique, proposons-nous de déterminer d'abord l'action d'un élément isolé, et ensuite l'action d'un corps de dimensions quelconques, sur un point donné de position.

Soit M ce point; x, y, z, ses trois coordonnées rectangulaires; x', y', z', les coordonnées rapportées aux mêmes axes, d'un autre point C appartenant à l'élément magnétique dont on veut considérer l'action sur M; représentons par h, le côté du cube équivalent en volume à cet élément; et soit M' un second point de ce même élément, dont nous exprimerons par $h\chi$, $h\xi$, $h\zeta$, les coordonnées rapportées à des axes menés par le point C, et parallèles à ceux des x', y', z'. Appelons ρ, la distance du point M au point C, de sorte qu'on ait

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

et ρ_1, la distance de M à M', laquelle se déduira de ρ en y augmentant x', y', z', de $h\chi$, $h\xi$, $h\zeta$, respectivement.

L'élément différentiel du volume, correspondant au point M', aura $h^3\, d\chi\, d\xi\, d\zeta$ pour expression; nous désignerons par $\mu'\, h^3\, d\chi\, d\xi\, d\zeta$, la quantité de fluide libre qu'il contient, μ' étant positif ou négatif selon que ce fluide sera boréal ou austral. Ce coefficient sera une fonction de χ, ξ, ζ, dépendante de la distribution des deux fluides dans l'intérieur de l'élément magnétique que nous considérons. S'ils y sont en mouvement, μ' variera en outre avec le temps; mais la quantité totale de fluide libre, appartenant à un même élément, devant être nulle dans tous les cas, on aura toujours

$$\int \mu'\, d\chi\, d\xi\, d\zeta = 0, \qquad (1)$$

l'intégrale s'étendant au volume entier de l'élément magnétique.

L'action répulsive exercée par le fluide de $\mu'\, h^3\, d\chi\, d\xi\, d\zeta$

sur une particule de fluide boréal située au point M′, aura pour mesure :

$$\frac{h^3 \mu' d\chi\, d\xi\, d\zeta}{\rho^2},$$

en prenant pour unité de force, l'intensité de la puissance magnétique, à l'unité de distance et correspondante à l'unite de quantité de fluide. Ses composantes parellèles aux axes des x, y, z, seront exprimées par les différences partielles :

$$\frac{d.\frac{1}{\rho_1}}{dx}, \quad \frac{d.\frac{1}{\rho_1}}{dy}, \quad \frac{d.\frac{1}{\rho_1}}{dz},$$

prises avec des signes contraires, et multipliées par... $h^3 \mu' d\chi\, d\xi\, d\zeta$. Selon que leurs valeurs seront positives ou négatives, ces forces tendront à augmenter ou à diminuer les coordonnées de la particule boréale, située en M; le contraire aurait lieu, si l'on considérait leur action sur une particule australe : par *augmenter* ou *diminuer* les coordonnées du point M, on entend éloigner ou rapprocher ce point de leur origine, quand elles sont positives, *et vice versâ,* lorsqu'elles sont négatives. Dans tout ce Mémoire, on prendra dans le sens que nous expliquons, l'action des composantes positives ou négatives, agissant sur des particules boréales ou australes suivant leurs coordonnées.

Ces trois composantes de la force dirigée de M′ vers M devront être intégrées dans toute l'étendue de l'élément magnétique auquel M′ appartient, pour en conclure l'action exercée par cet élément sur le point M.

(2) Pour cela, développons la quantité $\frac{1}{\rho_1}$ suivant les puissances de h, ce qui donnera une série très-convergente,

excepté dans le cas particulier où la distance du point M à l'élément magnétique serait du même ordre de petitesse que ses dimensions. Ce cas étant exclu, nous pourrons, sans erreur sensible, négliger les puissances de h supérieures à la première, et nous aurons simplement

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho}+\frac{d.\frac{1}{\rho}}{dx'}h\chi+\frac{d.\frac{1}{\rho}}{dy'}h\xi+\frac{d.\frac{1}{\rho}}{dz'}h\zeta.$$

En vertu de l'équation (1), le premier terme de cette valeur de $\frac{1}{\rho_1}$ disparaîtra dans les intégrales triples qu'il s'agit d'effectuer; et si l'on fait, pour abréger :

$$h\int\mu'\chi\, d\chi\, d\xi\, d\zeta=\alpha',$$

$$h\int\mu'\xi\, d\chi\, d\xi\, d\zeta=\beta',$$

$$h\int\mu'\xi\, d\chi\, d\xi\, d\zeta=\gamma';$$

et ensuite

$$\frac{d.\frac{1}{\rho}}{dx'}\alpha'+\frac{d.\frac{1}{\rho}}{dy'}\beta'+\frac{d.\frac{1}{\rho}}{dz'}\gamma'=q;$$

qu'enfin l'on désigne par $\lambda, \lambda', \lambda''$, les trois composantes demandées, respectivement parallèles aux axes des x, y, z, on aura

$$\lambda=-h^3\frac{dq}{dx},\ \ \lambda'=-h^3\frac{dq}{dy},\ \ \lambda''=-h^3\frac{dq}{dz}. \qquad (2)$$

On voit par-là que l'action d'un élément magnétique sur un point qui n'en est pas très-rapproché, ne dépend de sa forme et de la distribution des deux fluides dans son intérieur, qu'en tant qu'elles influent sur les valeurs des trois

quantités α', β', γ'. Quand ces valeurs seront connues, on pourra assigner la direction et l'intensité magnétiques d'une petite aiguille, dont l'action équivaudra à celle de cet élément, ainsi que je l'ai remarqué dans mon premier Mémoire sur le magnétisme. J'ai aussi observé dans ce Mémoire que les quantités χ, ξ, ζ, et par suite les intégrales α', β', γ', varient avec les directions des axes rectangulaires auxquels elles se rapportent, suivant les mêmes lois que les composantes d'une force donnée. Cette propriété de α', β', γ', nous sera très-utile dans la suite; mais elle est assez évidente d'elle-même pour qu'il soit inutile de revenir sur ce point. Nous allons maintenant exprimer par de nouvelles intégrations, l'action d'un corps de forme donnée, d'après les équations (2) appliquées à chacun de ses éléments magnétiques.

(3) Nous appellerons A le corps dont il s'agit de calculer l'action sur un point M, répondant toujours aux coordonnées x, y, z, et que nous placerons d'abord en dehors de A, à une distance sensible de sa surface. Partageons A en un très-grand nombre de parties, dont les dimensions extrêmement petites eu égard à celles de ce corps, soient cependant très-grandes par rapport aux dimensions de ses éléments magnétiques. Soit v le volume de l'une de ces parties, comprenant l'élément que nous venons de considérer, dont le lieu est déterminé par le point C qui répond aux coordonnées x', y', z'. Désignons par k', la somme des volumes de tous les éléments magnétiques contenus dans v, divisée par ce volume. Cette quantité k' devra être donnée pour chaque substance en particulier, dont elle représentera la densité sous le rapport du magnétisme; et même pour chaque degré de température, si l'on suppose que la proportion des éléments magnétiques puisse varier dans la même matière avec

son degré de chaleur. Nous regarderons, pour plus de généralité, k' comme une fonction donnée de x', y', z', qui se changera en une quantité constante, lorsque A sera homogène, et qu'il aura partout la même température : cette fonction dépendra aussi du temps, si les différents points de A ne sont pas parvenus à des températures permanentes.

Quoique le volume v soit très-petit, les quantités $\alpha', 6', \gamma'$, n'auront pas les mêmes valeurs dans toute son étendue, si les éléments magnétiques qu'il renferme n'ont pas tous la même forme et la même disposition ; mais le pont M étant extérieur et sensiblement éloigné de la surface de A, sa distance au volume v est très-grande par rapport aux dimensions de cette petite partie de A; d'où l'on peut conclure que les composantes de l'action de v sur M, seront toujours exprimées par les valeurs précédentes de $\lambda, \lambda', \lambda''$, en y remplaçant le volume h^3 d'un élément magnétique par la somme $k'v$ de tous les éléments contenus dans v, et prenant pour les quantités $\alpha', 6', \gamma'$, les moyennes de leurs valeurs relatives à ces mêmes éléments. Ces moyennes devront être soumises à la loi de continuité, et pouvoir s'exprimer en fonction des coordonnées $x', y' z'$, du point C qui détermine le lieu de v, sans quoi l'analyse mathématique ne pourrait pas s'appliquer à la question qui nous occupe.

Cela étant, il ne restera plus qu'à prendre la somme des actions de tous les volumes v sur le point M, décomposées suivant un même axe, pour avoir l'action totale de A suivant cette droite; or, cette sommation de quantités finies pourra être remplacée par une intégrale définie. En effet, si $vf(x', y', z')$ est le terme général des quantités que l'on veut sommer, x', y', z' étant les coordonnées de l'un des points

du volume v supposé très-petit, et si la somme demandée doit s'étendre à toutes les parties v dans lesquelles on a divisé un volume V, on sait par les principes du calcul intégral, que cette somme sera à très-peu égale à l'intégrale triple $\iiint f(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'$, prise dans toute l'étendue du volume V. La différence entre la somme et l'intégrale est d'autant moindre que les volumes partiels sont plus petits par rapport au volume entier; et dans le cas actuel, on peut la négliger sans crainte qu'il en résulte aucune erreur appréciable. Toutefois la substitution d'une intégrale à une somme ne serait plus permise, si la fonction $f(x', y', z')$ variait très-rapidement dans quelques parties de l'intégrale, et que sa grandeur devînt en raison inverse de celle de v; mais d'après les expressions de $\lambda, \lambda', \lambda''$, cette exception ne saurait avoir lieu, lorsque le point M est situé comme nous l'avons supposé, ce qui empêche la quantité ρ de devenir nulle ou insensible.

En désignant donc par X, Y, Z, les trois composantes suivant les axes des x, y, z, de l'action de A sur ce point extérieur M, nous aurons leurs valeurs en substituant d'abord $k'\, dx'\, dy'\, dz'$ à la place de h^3 dans les seconds membres des équations (2) que nous intégrerons ensuite dans toute l'étendue de A. De cette manière, on a

$$X = -\iiint \frac{dq}{dx} k'\, dx'\, dy'\, dz',$$

$$Y = -\iiint \frac{dq}{dy} k'\, dx'\, dy'\, dz',$$

$$Z = -\iiint \frac{dq}{dz} k'\, dx'\, dy'\, dz';$$

ou bien en faisant passer les différences relatives à x, y, z,

en dehors des intégrales dont les limites sont, en général, indépendantes de ces trois coordonnées ; remettant pour q, ce que cette lettre représente, et posant, pour abréger,

$$Q = \iiint \left(\frac{d.\frac{1}{\rho}}{dx'} \alpha' + \frac{d.\frac{1}{\rho}}{dy'} \mathcal{6}' + \frac{d.\frac{1}{\rho}}{dz'} \gamma' \right) k' dx' dy' dz',$$

on aura plus simplement

$$X = -\frac{dQ}{dx}, \quad Y = -\frac{dQ}{dy}, \quad Z = -\frac{dQ}{dz}. \quad (3)$$

(4) Lorsque M fera partie de A, ces formules s'appliqueront encore à la partie de ce corps dont M sera sensiblement éloigné. Ainsi, en concevant autour de M, une partie de A, que nous appellerons B, dont les dimensions seront à la fois très-grandes par rapport à celles des éléments magnétiques, et très-petites relativement aux dimensions de A, les équations (3) feront connaître les composantes de l'action exercée sur M, par l'autre partie de ce corps, pourvu que l'intégrale que Q représente ne soit étendue qu'à cette partie, c'est-à-dire, aux points de A compris entre sa surface extérieure, et la surface de B. Quant à l'action de B sur le point M, elle se composera de celle de l'élément magnétique dont M fait partie, et de celle des autres éléments contenus dans B : nous représenterons leurs composantes suivant les axes des x, y, z, par δ, δ', δ'', pour la seconde action, et par ε, ε', ε'', pour la première. Le point M appartenant au corps A, la particule boréale que l'on y considère, sera en outre soumise à l'action des forces extérieures dont l'influence produit l'aimantation de ce corps. Or, si nous représentons par V, la somme des particules du fluide libre que con-

tiennent tous les aimants extérieurs, divisées par leurs distances respectives au point M, les composantes suivant les coordonnées x, y, z, de l'action de tous ces aimants sur ce point, seront exprimées par

$$-\frac{dV}{dx}, \quad -\frac{dV}{dy}, \quad -\frac{dV}{dz}.$$

Donc enfin, si nous désignons par X', Y', Z', les composantes selon les mêmes directions de toutes les forces qui agissent sur le point intérieur M, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} X' &= -\frac{dV}{dx} - \frac{dQ'}{dx} + \delta + \varepsilon, \\ Y' &= -\frac{dV}{dy} - \frac{dQ'}{dy} + \delta' + \varepsilon', \\ Z' &= -\frac{dV}{dz} - \frac{dQ'}{dz} + \delta'' + \varepsilon''; \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Q' étant ce que devient l'intégrale Q, lorsqu'on n'y comprend pas la portion B du corps A.

Dans mon premier Mémoire sur le magnétisme, j'avais pensé qu'on pouvait négliger les termes $\delta, \delta', \delta''$, de ces équations; mais un examen plus approfondi m'a fait reconnaître qu'encore bien que B soit une très-petite partie de A, ces forces sont du même ordre de grandeur que les composantes relatives à l'autre portion de ce corps, qui sont exprimées par les différences partielles de Q'. Pour s'en convaincre, il suffira de calculer l'action exercée sur M par les éléments magnétiques de B qui en sont le plus éloignés, et dont les distances à ce point seront supposées très-grandes par rapport à leurs dimensions. C'est ce que nous allons faire avant d'aller plus loin; et ce calcul sera utile, comme

on le verra, pour mieux connaître la nature des actions magnétiques, dans les cas où les dimensions des corps dont elles émanent, deviennent très-petites.

(5) Appelons donc D, la portion de B que nous voulons considérer. Les points de D étant éloignés de M comme l'exigent les équations (2), on calculera l'action de chacun de ses éléments sur ce point au moyen de ces équations; et si nous représentons par $\Delta, \Delta', \Delta''$, les composantes de l'action totale des D suivant les axes de x, y, z, elles seront données par les équations (2), c'est-à-dire que nous aurons

$$\Delta = -\frac{dQ''}{dx}, \quad \Delta' = -\frac{dQ''}{dy}, \quad \Delta'' = -\frac{dQ''}{dz};$$

en désignant par Q'' la même intégrale que Q étendue seulement à tous les points de D. Ces trois équations étant susceptibles des mêmes transformations, il suffira d'en considérer une seule, la première par exemple.

Si l'on y met pour Q'' sa valeur, et que l'on effectue la différentiation relative à x, cette équation deviendra

$$\Delta = \iiint \left(\frac{d.\frac{x-x'}{\rho^3}}{dx'} \alpha' + \frac{d.\frac{x-x'}{\rho^3}}{dy'} \mathit{6}' + \frac{d.\frac{x-x'}{\rho^3}}{dz'} \gamma' \right) k' dx' dy' dz'.$$

Dans cette petite portion D du corps A, non plus que dans toute l'étendue de B, les quantités $k', \alpha', \mathit{6}', \gamma'$, ne varient pas sensiblement, et sont à très-peu près les mêmes qu'au point M; en exprimant donc par $k, \alpha, \mathit{6}, \gamma$, leurs valeurs relatives à ce point, ou ce que deviennent $k', \alpha', \mathit{6}', \gamma'$, lorsqu'on y met ses coordonnées x, y, z, à la place des variables x', y', z', et faisant ensuite passer $k, \alpha, \mathit{6}, \gamma$, hors des signes d'intégration, il en résultera

$$\Delta = k\alpha \iiint \frac{d.\frac{x-x'}{\rho^3}}{dx'} dx'\,dy'\,dz'$$
$$+ k6 \iiint \frac{d.\frac{x-x'}{\rho^3}}{dy'} dx'\,dy'\,dz' + k\gamma \iiint \frac{d.\frac{x-x'}{\rho^3}}{dz'} dx'\,dy'\,dz'.$$

Pour plus de clarté, supposons que l'axe de x' soit vertical et dirigé de bas en haut; que D soit tout entier au-dessus du plan horizontal des y', z'; et qu'il n'y ait que deux points de sa surface qui aient la même projection sur ce plan. Ce sera depuis l'ordonnée du point inférieur jusqu'à celle du point supérieur, que l'on devra prendre l'intégrale relative à x'; ainsi l'on aura

$$\iiint \frac{d.\frac{x-x'}{\rho^3}}{dx'} dx'\,dy'\,dz' = \iint \left(\frac{x-x'}{\rho^3}\right) dy'\,dz' - \iint \left[\frac{x-x'}{\rho^3}\right] dy'\,dz';$$

les quantités $\left[\frac{x-x'}{\rho^3}\right]$ et $\left(\frac{x-x'}{\rho^3}\right)$ se rapportant respectivement à ces deux points. Si donc on conçoit un cylindre vertical, tangent à la surface de D, qui la divise en deux parties, il faudra étendre la première des deux intégrales doubles à la partie supérieure, et la seconde à la partie inférieure. Or, en appelant l l'angle compris entre la verticale tirée de bas en haut par le point de la surface de D dont x', y, z', sont les coordonnées, et la partie extérieure de la normale à cette surface au même point, cet angle sera aigu dans toute la première portion de la surface, et obtus dans toute la deuxième partie; désignant de plus par $d\omega$ l'élément différentiel de la surface en ce même point, sa projection horizontale sera $dy'\,dz'$, et nous aurons

$$dy'\,dz' = \pm \cos. l\, d\omega,$$

en prenant le signe + quand l sera aigu, et le signe — quand cet angle sera obtus. D'après cela, nous pourrons réduire la différence de nos deux intégrales doubles, à une seule intégrale étendue à la surface entière de D, savoir :

$$\iint\left(\frac{x-x'}{\rho^3}\right)dy'\,dz'-\iint\left[\frac{x-x'}{\rho^3}\right]dy'\,dz'=\iint\frac{(x-x')\cos.l}{\rho^3}\,d\omega.$$

Nous aurons par conséquent

$$\iint\frac{d.\frac{x-x'}{\rho^3}}{dx'}\,dx'\,dy'\,dz'=\iint\frac{(x-x')\cos.l}{\rho^3}\,d\omega. \quad (5)$$

Si dans quelques parties de D, une même verticale rencontre la surface en quatre, six, ... points, il faudra les considérer deux à deux consécutivement : l'intégrale triple se composera alors d'autant d'intégrales doubles, dont la moitié sera précédée du signe +, et l'autre moitié du signe —; aux points de la surface de D qui répondent à la première moitié, l'angle sera aigu, et il sera obtus aux points relatifs à l'autre moitié; on pourra donc encore remplacer ces intégrales par une seule qui s'étendra à la surface entière de D; et l'équation (5) aura toujours lieu, quelle que soit la forme de ce corps. Ce cas général comprend celui où D renfermerait un espace vide intérieur : on devra alors étendre l'intégrale double aux deux surfaces de D, l'une extérieure et l'autre intérieure, ou, si l'on veut, la partager en deux intégrales dont chacune se rapportera seulement à l'une de ces surfaces.

On trouvera de la même manière

$$\iiint\frac{d.\frac{x-x'}{\rho^3}}{dy'}\,dx'\,dy'\,dz'=\iint\frac{(x-x')\cos.l'}{\rho^3}\,d\omega,$$

$$\iiint \frac{d.\frac{x-x'}{\rho^3}}{dz'} dx'\,dy'\,dz' = \iint \frac{(x-x')\cos.l''}{\rho^3} d\omega,$$

en désignant par l' et l'' ce que devient l'angle l précédemment défini, quand on remplace la verticale tirée de bas en haut, par des droites horizontales, menées dans la direction des y' positives pour l', et des z' positives pour l''.

La valeur précédente de Δ deviendra donc

$$\Delta = \iint \frac{(x-x')\mathrm{L}}{\rho^3} d\omega,$$

en faisant pour abréger

$$\alpha\cos.l + \beta\cos.l' + \gamma\cos.l'' = \mathrm{L};$$

et l'on obtiendra semblablement

$$\Delta' = \iint \frac{(y-y')\mathrm{L}}{\rho^3} d\omega, \quad \Delta'' = \iint \frac{(z-z')\mathrm{L}}{\rho^3} d\omega.$$

(6) On peut appliquer ces formules à plusieurs exemples dans lesquels on obtiendra les valeurs des intégrales doubles par les règles ordinaires; mais sans entrer dans de plus grands détails, on voit clairement par ces dernières équations, que les valeurs de Δ, Δ', Δ'', seront généralement du même ordre de grandeur que les quantités α, β, γ, et qu'il ne sera pas permis de négliger ces forces, ni, à plus forte raison, les composantes δ, δ', δ'', dont elles ne sont qu'une partie, en calculant l'action du corps A sur un point M de son intérieur. Quant à l'autre partie de δ, δ', δ'', comprenant l'action des éléments magnétiques de B, qui sont très-voisins du point M, nous n'aurions aucun moyen de la déterminer.

Nous ne pouvons pas non plus calculer les composantes $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, de l'action de l'élément dont M fait partie, non-seulement pendant que les deux fluides y sont en mouvement, mais même quand ils sont parvenus à l'état d'équilibre. Il en résulte donc que les équations (4) ne nous seront d'aucune utilité pour calculer l'action de A sur un point M qui fait partie de ce corps ; action que l'on ne pourrait pas d'ailleurs vérifier par l'expérience. Mais ce n'est pas là, en effet, l'objet que nous devons nous proposer : le but essentiel de nos calculs est de déterminer l'action de ce corps, sur un point extérieur, donné de position ; ce qui ne dépend heureusement que des inconnues α, β, γ, dont les valeurs résulteront de trois équations que nous formerons bientôt.

Quoique nous ne devions pas considérer les forces $\delta, \delta', \delta''$, il ne sera pas inutile d'observer qu'elles ne dépendent que de la forme de B, mais nullement de ses dimensions absolues, pourvu qu'elles soient toujours assez petites pour qu'on puisse regarder $k', \alpha', \beta', \gamma'$, comme constantes dans toute l'étendue de cette partie de A, et en même temps très-grandes eu égard aux dimensions des éléments magnétiques.

Supposons, en effet, qu'on prolonge les rayons menés du point M à tous les points de la surface de B, et qu'on les augmente dans un même rapport de 1 à n. Dans chaque direction, les quantités $x-x', y-y', z-z'$ et ρ augmenteront dans ce même rapport; $d\omega$ croîtra dans le rapport de 1 à n^2, et cos. l, cos. l', cos. l'', ne changeront pas. Il en résulte, d'après les formules du numéro précédent, que les forces $\Delta, \Delta', \Delta''$, provenant des éléments de B les plus éloignés de M, resteront les mêmes; par conséquent $\delta, \delta', \delta''$, ne changeront pas non plus par cet accroissement de B qui

reste semblable à lui-même. Mais il n'en serait pas ainsi, si ce corps changeait à la fois de forme et de dimensions.

(7) L'équation (5) est la même chose que

$$\iiint \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dx^2} dx' dy' dz' = \iint \frac{(x-x')\cos. l}{\rho^3} d\omega.$$

Ses deux membres sont des intégrales qui s'étendent à tous les points de la surface et du volume d'un même corps; et d'après les considérations qui nous y ont conduits, on peut donner à ce corps, une forme et des dimensions quelconques. On aura semblablement

$$\iiint \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dy^2} dx' dy' dz' = \iint \frac{(y-y')\cos. l'}{\rho^3} d\omega,$$

$$\iiint \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dz^2} dx' dy' dz' = \iint \frac{(z-z')\cos. l''}{\rho^3} d\omega.$$

En ajoutant ces trois équations, et faisant, pour abréger,

$$\frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dx^2} + \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dy^2} + \frac{d^2 . \frac{1}{\rho}}{dz^2} = \text{R},$$

il vient

$$\iiint \text{R}\, dx' dy' dz' = \iint \left(\frac{x-x'}{\rho}\cos. l + \frac{y-y'}{\rho}\cos. l' + \frac{z-z'}{\rho}\cos. l''\right)\frac{d\omega}{\rho^2}.$$

Soit i l'angle compris entre le prolongement du rayon ρ mené du point M dont les coordonnées sont x, y, z, au point de la surface qui répond aux coordonnées x', y', z', et la partie extérieure de la normale en ce dernier point; nous aurons

$$\cos. i = \frac{x'-x}{\rho}\cos. l + \frac{y'-y}{\rho}\cos. l' + \frac{z'-z}{\rho}\cos. l''.$$

Concevons un cône qui ait son sommet au point M, et soit circonscrit à l'élément $d\omega$ de la surface; puis une sphère décrite du point M avec un rayon égal à l'unité. Soit $d\theta$, l'élément intercepté par ce cône sur la surface de cette sphère; on aura

$$\cos. i\, d\omega = \pm \rho^2 d\theta,$$

en prenant le signe supérieur ou l'inférieur, selon que l'angle i sera aigu ou obtus. Donc, avec cette attention, l'équation précédente prendra la forme :

$$\iiint \mathrm{R}\, dx'\, dy'\, dz' = \iint (\mp)\, d\theta;$$

et l'intégrale double ne se rapportera plus qu'à la surface sphérique, quelle que soit la forme du corps auquel répond l'intégrale triple.

Or, si le point M est en dehors du corps, et que l'on circonscrive à sa surface, un cône qui ait son sommet à ce point, elle sera partagée par la ligne de contact, en deux parties, telles que l'angle i sera obtus dans toute la partie située du côté du sommet, et aigu dans toute la partie opposée; appelant donc Θ la portion de la surface sphérique, interceptée par ce cône, l'intégrale double aura pour valeur $+\Theta$ dans la première partie, et $-\Theta$ dans la seconde; par conséquent l'intégrale entière sera nulle, et l'on aura dans ce premier cas :

$$\iiint \mathrm{R}\, dx'\, dy'\, dz' = 0.$$

Si le point M se trouve sur la surface du corps que nous considérons, le cône se changera en un plan; la première partie de cette surface disparaîtra; la quantité Θ sera la moitié de la surface sphérique, ou égale à 2π, π désignant à l'ordinaire le rapport de la circonférence au diamètre;

dans ce second cas, nous aurons donc :

$$\iiint R\,dx'\,dy'\,dz' = -2\pi.$$

Enfin, si le point M est situé dans l'intérieur de ce corps, l'angle i sera aigu dans toute l'étendue de la surface; d'où il résultera que l'on aura dans ce troisième et dernier cas :

$$\iiint R\,dx'\,dy'\,dz' = -4\pi.$$

En effectuant les différentiations relatives à x, y, z, qui sont indiquées dans l'expression de R, on trouve cette quantité nulle, excepté dans le cas où le dénominateur ρ^5 devient égal à zéro; et cette exception n'ayant pas lieu quand le point M est extérieur, c'est pour cela que l'intégrale $\iiint R\,dx'\,dy'\,dz'$ est alors égale à zéro. D'après cette considération, on peut donner une plus grande extension aux résultats précédents.

En effet, soit k' une fonction donnée de x', y', z', et k ce qu'elle devient lorsqu'on fait $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$. Soit ensuite

$$\iiint \frac{k'\,dx'\,dy'\,dz'}{\rho} = V.$$

En différentiant sous les signes d'intégrations par rapport à x, y, z, on en conclura

$$\iiint R k'\,dx'\,dy'\,d\ ' = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}.$$

Quand le point M ne fera pas partie du volume auquel répond l'intégrale triple, cette intégrale sera nulle à cause de R = o dans toute son étendue. Lorsque M sera situé dans l'intérieur ou à la surface de ce volume, on le partagera arbitrai-

rement en deux portions : pour celle dont M ne fera pas partie, l'intégrale sera encore égale à zéro ; quant à l'autre, nous la supposerons assez petite pour que k' ne varie pas sensiblement, et qu'on puisse prendre $k'=k$ dans toute son étendue ; d'où il résultera

$$\iiint \mathrm{R}k'\,dx'\,dy'\,dz' = k\iiint \mathrm{R}\,dx'\,dy'\,dz' ;$$

la seconde intégrale s'étendant à la portion de volume qui comprend le point M. Donc, d'après ce qui précède, nous aurons enfin :

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dz^2}=0,\quad =-2k\pi,\quad =-4k\pi,$$

selon que le point M sera situé en dehors, à la surface ou en dedans du volume que l'on considère. Les géomètres ont remarqué le premier cas depuis long-temps ; j'ai été conduit à la troisième valeur, il y a plusieurs années, par une analyse moins directe que la précédente ; j'y joins maintenant la seconde ; ce qui ne laissera plus rien à désirer touchant cette équation, dont on connaît l'importance dans un grand nombre de questions, et qui nous sera bientôt utile.

(8) Après cette digression, cherchons les équations d'où dépendent les inconnues α', β', γ', qui entrent dans la quantité Q.

Ainsi qu'il a été dit au commencement de ce Mémoire, nous supposerons la force coercitive, nulle ou insensible dans la matière du corps A dont nous nous occupons. Il en résulte que dès qu'une force donnée commencera d'agir sur un de ses éléments magnétiques, les deux fluides s'y mouvront jusqu'à ce que l'élément soit parvenu à un état dans lequel son action sur chacun de ses points fasse équilibre à la force

extérieure. L'état magnétique d'un élément de forme déterminée, et par suite les trois intégrales α', β', γ', du n° 2, dépendront à chaque instant de l'action exercée jusque là par la force donnée, c'est-à-dire, du temps et des composantes de cette force, que nous supposerons d'abord constantes, et que nous représenterons par E, E', E'', relativement aux trois axes rectangulaires auxquels répondent α', β', γ'. D'ailleurs ces quantités α', β', γ', devant varier d'un système d'axes à un autre, suivant les mêmes lois que les composantes de la force donnée (n° 4 du premier Mémoire), elles ne sauraient être que des fonctions linéaires de E, E', E''; et comme elles seront nulles en même temps que ces forces, on aura, dans le cas le plus général :

$$\alpha' = aE + bE' + cE'',$$
$$\beta' = a'E + b'E' + c'E'',$$
$$\gamma' = a''E + b''E' + c''E'';$$

les coëfficients a, b, etc., étant indépendants de E, E', E''. Ils varieront avec le temps pendant que les deux fluides seront en mouvement dans l'intérieur de l'élément magnétique, et parviendront à des valeurs fixes lorsque les deux fluides seront arrivés à l'état d'équilibre. S'il s'agit d'un élément isolé, ils dépendront en outre de sa forme et de sa situation eu égard à la direction de la force extérieure; mais il n'en sera plus de même si nous prenons, d'après le n° 2, les moyennes de leurs valeurs relatives à tous les éléments compris dans un volume v, qui soit à la fois très-grand par rapport au volume de chaque élément, et très-petit relativement au volume entier de A; et dans ce cas, les seconds membres des équations précédentes se réduiront chacun à un seul

terme dont le coëfficient ne dépendra plus de la forme des éléments.

En effet, j'ai remarqué, il est vrai, dans le préambule du premier Mémoire, qu'il pourrait arriver que l'action magnétique d'un corps aimanté par influence, surtout s'il s'agissait d'un corps cristallisé, dépendît d'une disposition régulière de ses éléments, et que, toutes choses d'ailleurs égales, elle ne fût pas la même en tout sens; mais nous exclurons ce cas singulier qui ne s'est pas encore présenté à l'observation, et nous admettrons qu'il n'a pas lieu non plus pour toute partie v de A, très-grande par rapport à chacun de ses éléments. Cela posé, si cette partie de A agit, comme dans le n° 3, sur un point M qui n'en soit pas très-rapproché, et que M soit situé sur la direction de la force qui sollicite les éléments de v, il est évident que l'action de v sur M devra s'exercer selon cette même direction; si donc on prend l'axe des x, par exemple, dans cette direction, auquel cas on aura $E'=0$, $E''=0$, il faudra que les deux composantes λ' et λ'' de l'action de v sur M soient aussi égales à zéro; or, en faisant $y'=y, z'=z$, dans les équations (2), afin que le point M soit sur l'axe des x, et y mettant $k'v$ à la place de h^3, on trouve

$$\lambda=\frac{2k'v\alpha'}{\rho^3},\ \lambda'=-\frac{k'v\beta'}{\rho^3},\ \lambda''=-\frac{k'v\gamma'}{\rho^3}:$$

on aura donc $\beta'=0, \gamma'=0$, en même temps que $E'=0$, $E''=0$; ce qui exige qu'on ait $a'=0$ et $a''=0$. En faisant coïncider successivement les axes des y et des z avec la direction de la force donnée, on prouvera de même que l'on doit aussi avoir $b=0$ et $b''=0$, $c=0$ et $c'=0$; il ne

restera donc plus que les trois coëfficients a, b' et c'' qui devront être égaux entre eux, pour que α', β', γ', conservent la même relation avec les composantes de la force extérieure, quels que soient les axes des x', y', z'. Ainsi, les formules précédentes se réduiront simplement à

$$\alpha' = aE,\ \beta' = aE',\ \gamma' = aE''.$$

Cette réduction aurait lieu pour chaque élément isolé, et pourrait être regardée comme évidente, si tous les éléments magnétiques de A étaient des sphères de rayons égaux ou inégaux; mais il était bon de rendre nos calculs indépendants de cette hypothèse particulière.

(9) S'il s'agit des quantités α, β, γ, relatives à l'élément auquel appartient le point M de A, dont x, y, z, sont les coordonnées, les composantes de la force extérieure que nous venons de représenter en général par E, E′, E″, auront pour valeurs les seconds membres des équations (4), abstraction faite des termes $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$. On y pourra, en outre, omettre δ, δ', δ'', et considérer α, β, γ, comme dépendantes, en définitive, de la forme de B et des composantes exprimées par les différences partielles de V et de Q′, que nous appellerons T, T′, T″, en sorte qu'on ait

$$T = -\frac{dV}{dx} - \frac{dQ'}{dx},$$

$$T' = -\frac{dV}{dy} - \frac{dQ'}{dy},$$

$$T'' = -\frac{dV}{dz} - \frac{dQ'}{dz}.$$

Cela est évident, en effet, si l'on observe que les forces $\delta, \delta', \delta''$, provenant des éléments voisins de celui que l'on considère,

ne peuvent non plus dépendre que de la forme arbitraire de B et de ces forces T, T', T''. De plus, nous prendrons pour B une sphère qui ait son centre au point M, ce qui sera toujours possible, excepté dans le cas que nous excluons, où M ferait partie de la surface de A, ou en serait à une distance insensible. De cette manière, on verra que les valeurs de α, β, γ, se réduiront encore chacune à un seul terme, comme dans le n° précédent; et si l'on représente par T_o, T_o', T_o'', les valeurs initiales de T, T', T'', et que l'on suppose, pour un moment, ces forces invariables, on aura, au bout d'un temps t quelconque :

$$\alpha = T_o ft, \quad \beta = T_o' ft, \quad \gamma = T_o'' ft;$$

ft étant une fonction qui sera nulle quand $t=0$, et qui acquerra une valeur constante après un certain intervalle de temps.

Ce temps sera très-court, parce que dans toutes les substances susceptibles d'aimantation par influence, les phénomènes magnétiques acquièrent très-promptement toute leur intensité. Néanmoins il pourra être très-différent dans ces diverses substances; et il dépendra, ainsi que la forme de ft, de la matière et de la température de A au point M. L'action de la petite sphère dont ce point est le centre ne variant pas, d'après ce qu'on a vu plus haut (n° 6), avec la grandeur de son rayon, le coëfficient ft en sera aussi indépendant; et comme il ne devra rester finalement aucune trace de ce rayon indéterminé, il sera nécessaire que l'intégrale Q' qui commence à la surface de cette sphère, ne dépende pas cependant de son diamètre; ce qui arrivera effectivement, comme on le verra bientôt.

Les valeurs variables de ft pourront être extrêmement grandes par rapport à sa valeur finale. Cela aura lieu, par exemple, si la décomposition du fluide neutre se fait dans tout l'intérieur de chaque élément magnétique, de sorte que pendant leur mouvement, l'un des deux fluides soit en excès en chacun de ses points; et qu'au contraire dans l'état d'équilibre, le fluide libre soit transporté à sa surface, où il ne forme plus qu'une couche d'une très-petite épaisseur. Il en résulterait, en effet, que dans le premier cas, l'action d'un élément magnétique émanerait de tous les points de son volume, et d'une très-petite partie seulement, dans le second cas. Cette remarque que nous avons déja faite au commencement de ce Mémoire, peut servir à rendre raison de la différence d'action du magnétisme dans les deux états de repos et de mouvement. Mais nous ne ferons aucune hypothèse particulière sur la forme de ft: les valeurs de cette fonction pourront être positives ou négatives, et aussi grandes qu'on voudra; elles passeront plusieurs fois du plus au moins, si les deux fluides ne parviennent à l'état d'équilibre qu'après plusieurs oscillations dans l'intérieur des éléments magnétiques : il nous suffira de savoir que ft n'est variable que pendant un temps très-court, et la loi de ses variations n'influera aucunement sur notre analyse, ni sur les résultats définitifs de nos calculs.

(10) Étendons actuellement les résultats précédents au cas où les forces extérieures qui donnent naissance aux inconnues α, β, γ, sont variables en grandeur et en direction.

Supposons qu'après un temps $t' < t$, une nouvelle force T_1, constante et parallèle à l'axe des x, vienne s'ajouter à la force T_0; au bout du temps t, on aura

$$\alpha = T_0 ft + T_1 f(t-t');$$

car α ne peut être qu'une fonction linéaire de T_0 et T_1, qui devra se réduire à chacun de ces deux termes, quand la force relative à l'autre terme sera égale à zéro. Par la même raison, si après un temps $t'' < t$, une seconde force T_2, constante et parallèle à l'axe des x, s'ajoute aux deux premières, nous aurons, au bout du temps t:

$$\alpha = T_0 ft + T_1 f(t-t') + T_2 f(t-t'').$$

Et généralement, au bout d'un temps quelconque t, plus grand que t', t'', t''', etc., on aura

$$\alpha = T_0 ft + T_1 f(t-t') + T_2 f(t-t'') + T_3 f(t-t''') + \text{etc.},$$

lorsque les forces T_1, T_2, T_3, etc., toutes constantes et parallèles à l'axe des x, s'ajouteront successivement à la force T_0, et commenceront d'agir aux époques t', t'', t''', etc.

Maintenant, pour que la force qui agit dans cette direction sur l'élément que nous considérons, varie d'une manière continue, et soit égale à T au bout du temps t, il suffira de faire

$$t' = dt, \quad t'' = 2dt, \quad t''' = 3dt, \text{ etc.},$$

et de prendre en même temps

$$T_1 = dT_0, \quad T_2 = dT_1, \quad T_3 = dT_2, \text{ etc.};$$

d'où il résultera

$$\alpha = T_0 ft + f(t-dt)dT_0 + f(t-2dt)dT_1 + \ldots + f(dt)dT.$$

La partie de cette valeur de α qui se compose de termes in-

finiment petits, est une intégrale définie; et sa valeur entière pourra s'écrire ainsi :

$$\alpha = T_\circ ft + \int_0^t f(t-\theta)\, d\Theta;$$

en désignant par Θ la valeur de T qui répond à $t=\theta$.

On trouvera de la même manière

$$\beta = T_\circ' ft + \int_0^t f(t-\theta)\, d\Theta',$$

$$\gamma = T_\circ'' ft + \int_0^t f(t-\theta)\, d\Theta'';$$

Θ' et Θ'' étant les valeurs de T' et T'' relatives à $t=\theta$.

L'intégration par partie fera disparaître les termes compris hors du signe $\int$: en observant qu'on a $f(t-\theta)=0$, à la limite $\theta=t$, et faisant

$$\frac{dft}{dt} = f't,$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \int_0^t f'(t-\theta)\Theta\, d\theta, \\ \beta &= \int_0^t f'(t-\theta)\Theta'\, d\theta, \\ \gamma &= \int_0^t f'(t-\theta)\Theta''\, d\theta. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

(11) Ce sont ces trois équations qu'il faudrait pouvoir résoudre pour déterminer les trois inconnues α, β, γ. Lors-

que leurs valeurs seront connues en fonction du temps t et des trois coordonnées $x, y, z,$, du point de A auquel elles répondent, les équations (3) feront connaître à chaque instant, en grandeur et en direction, l'action de ce corps sur un point extérieur donné de position; ce qui serait le but final du problème dont nous nous occupons.

La quantité Q', contenue dans les seconds membres des équations (6), sera toujours l'intégrale Q du nº 3, étendue à tous les points de A compris entre sa surface et celle de B; mais la forme de B ne sera plus arbitraire; et l'on devra prendre pour cette partie de A, une sphère qui ait son centre au point M dont les coordonnées sont $x, y, z,$ et un rayon indéterminé, mais assez petit pour qu'on puisse regarder les quantités $k', \alpha', \beta', \gamma'$, comme sensiblement constantes dans toute l'étendue de B. Comme les limites de l'intégrale Q' qui commence à la surface de cette sphère, dépendront implicitement de la position du point M, il faudra se souvenir que les différentiations relatives à ses coordonnées $x, y, z,$ devront être effectuées avant l'intégration, ainsi qu'elles étaient indiquées dans le nº 3, avant qu'on les eût transportées en dehors des signes $\int$, ce qui n'est plus permis dans le cas actuel.

Observons aussi que les valeurs de α, β, γ, relatives à des éléments magnétiques, situés à la surface de A, ne sont pas comprises dans les équations (6); car en donnant dans le nº 9, une forme sphérique à B, nous avons exclu ces éléments. Ces trois quantités α, β, γ, sont des fonctions de $x, y, z,$ qui changent de forme et varient très-rapidement près de la surface de A. S'il s'agissait de calculer l'action de ce corps sur un point extérieur, très-voisin de sa surface, il ne serait

pas permis de négliger la partie de cette action qui proviendrait de la couche superficielle; mais dans toute la suite de ce Mémoire, nous nous bornerons à considérer les points extérieurs qui sont à une distance sensible des corps aimantés : alors on pourra faire abstraction de l'action exercée par la couche superficielle sur ces points; et par conséquent, nous n'aurons pas besoin de connaître les valeurs de α, β, γ, qui s'y rapportent.

§. II.

Simplification des formules précédentes.

(12) Nous pouvons écrire la valeur de Q sous la forme

$$Q=\iiint\left(\frac{d.\frac{k'\alpha'}{\rho}}{dx'}+\frac{d.\frac{k'\beta'}{\rho}}{dy'}+\frac{d.\frac{k'\gamma'}{\rho}}{dz'}\right)dx'dy'dz'-R,$$

en faisant, pour abréger,

$$R=\iiint\left(\frac{d.k'\alpha'}{dx'}+\frac{d.k'\beta'}{dy'}+\frac{d.k'\gamma'}{dz'}\right)\frac{dx'dy'dz'}{\rho}.$$

Si nous mettons successivement dans l'équation (5), $\frac{k'\alpha'}{\rho}$, $\frac{k'\beta'}{\rho}$, $\frac{k'\gamma'}{\rho}$, à la place $\frac{x-x'}{\rho^3}$, nous en conclurons

$$Q=\iint(\alpha'\cos.s+\beta'\cos.s'+\gamma'\cos.s'')\frac{k'd\omega}{\rho}-R;$$

$d\omega$ étant l'élément différentiel de la surface de A; s, s', s'', désignant les angles que fait la partie extérieure de la normale à cette surface, au point dont les coordonnées sont

x', y', z', avec des droites tirées par le même point suivant les directions des x', y', z', positives; et l'intégrale double s'étendant à tous les points de cette surface, de sorte que si A est un corps creux, cette intégrale pourra se partager en deux autres, l'une relative à la surface extérieure de A, et l'autre, à sa surface intérieure.

Pour obtenir l'intégrale Q′, nous l'étendrons d'abord, comme la précédente, au volume entier de A; puis nous en retrancherons l'intégrale relative à la sphère B qui n'y doit pas entrer; et si l'on veut connaître les différences partielles de Q′ qui entrent dans T, T′ T″, il sera nécessaire, d'après ce qu'on vient de dire, d'effectuer les différentiations par rapport à x, y, z, avant l'intégration dans l'étendue de B. De cette manière, on aura, par exemple,

$$\frac{dQ'}{dx} = \frac{dQ}{dx} - \Delta;$$

Q étant la même quantité que précédemment, et en faisant

$$\Delta = \iiint \left(\frac{d.\frac{x'-x}{\rho^3}}{dx'} \alpha' + \frac{d.\frac{y'-y}{\rho^3}}{dy'} 6' + \frac{d.\frac{z'-z}{\rho^3}}{dz'} \right) k'dx'dy'dz'.$$

Cette intégrale triple s'étendra à tous les points de B; entre ses limites, on regardera les quantités k', α', $6'$, γ', comme constantes et égales à k, α, 6, γ; par conséquent, en conservant les notations du nº 5, nous la changerons en une intégrale double, relative à la surface de B, savoir :

$$\Delta = k \iint \left(\alpha \cos. s + 6 \cos. s' + \gamma \cos. s'' \right) \frac{(x'-x)\, d\omega}{\rho^3},$$

dont on obtiendra facilement la valeur à cause de la forme sphérique de B.

Menons, pour cela, par le point M, trois axes parallèles à ceux des x, y, z; soit u l'angle que fait le rayon ρ mené de ce point à celui de la surface de B dont les coordonnées sont x', y', z', avec l'axe des x, et v l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des x, z; nous aurons

$$x'-x=\rho\cos.u,\ y'-y=\rho\sin.u\sin.v,\ z'-z=\rho\sin.u\cos.v.$$

La normale en chaque point de B coïncidant avec le rayon ρ qui aboutit au même point, il en résulte

$$\cos.s=\cos.u,\ \cos.s'=\sin.u\sin.v,\ \cos.s''=\sin.u\cos.v.$$

On aura, en outre,

$$d\omega=\rho^2\sin.u\,du\,dv,$$

à cause que le rayon ρ est constant; et pour étendre l'intégrale double à toute la surface de B, il faudra la prendre depuis $u=0$ et $v=0$, jusqu'à $u=\pi$ et $v=2\pi$; ce qui donnera

$$\Delta=\frac{4\pi k\alpha}{3}.$$

D'après cela, nous aurons

$$\frac{dQ'}{dx}=\frac{dQ}{dx}-\frac{4\pi k\alpha}{3}.$$

On trouvera de même

$$\frac{dQ'}{dy}=\frac{dQ}{dy}-\frac{4\pi k\beta}{3},\quad \frac{dQ'}{dz}=\frac{dQ}{dz}-\frac{4\pi k\gamma}{3};$$

et les valeurs de T, T', T'', deviendront

$$\left.\begin{aligned} T &= -\frac{dV}{dx} - \frac{dQ}{dx} + \frac{4\pi k\alpha}{3}, \\ T' &= -\frac{dV}{dy} - \frac{dQ}{dy} + \frac{4\pi k\beta}{3}, \\ T'' &= -\frac{dV}{dz} - \frac{dQ}{dz} + \frac{4\pi k\gamma}{3}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

(13) Avant d'aller plus loin, il sera bon de considérer en particulier le cas où les forces extérieures qui agissent sur A, sont constantes en grandeur et en direction, et où il s'est écoulé le temps très-court, nécessaire pour que les deux fluides soient parvenus à l'état d'équilibre dans son intérieur. A cette époque, la fonction ft aura acquis une valeur fixe que nous représenterons par

$$ft = q;$$

en même temps $f't$ sera nulle; par conséquent il faudra que θ diffère très-peu de t pour que les éléments des intégrales comprises dans les formules (6), ne s'évanouissent pas à raison de leur facteur $f'(t-\theta)$. Leurs seconds facteurs $\Theta, \Theta', \Theta''$ seront alors sensiblement constants; on pourra les remplacer par T, T', T''; et comme on a

$$\int_0^t f'(t-\theta)\,d\theta = q,$$

à cause que $f(t-\theta)$ est nulle à la limite $\theta = t$, ces équations (6) deviendront

$$\alpha = Tq, \quad \beta = T'q, \quad \gamma = T''q.$$

En les combinant avec les équations (7), on en déduit

60.

$$\alpha + \frac{q}{1 - \frac{4\pi q}{3}}\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) = 0,$$

$$\beta + \frac{q}{1 - \frac{4\pi q}{3}}\left(\frac{dV}{dy} + \frac{dQ}{dy}\right) = 0,$$

$$\gamma + \frac{q}{1 - \frac{4\pi q}{3}}\left(\frac{dV}{dz} + \frac{dQ}{dz}\right) = 0.$$

On peut réduire à une seule, les deux quantités k et q, dépendantes de la matière de A, que renferment ces formules et les valeurs de Q et R : il suffit pour cela de multiplier ces dernières équations par k; de mettre α, β, γ à la place de $k\alpha, k\beta, k\gamma$, et, par conséquent, α', β', γ', au lieu $k'\alpha', k'\beta'$, $k'\gamma'$; puis de remplacer $\frac{kq}{1 - \frac{4\pi q}{3}}$ par une seule lettre p. Ces équations et les valeurs de Q et R deviendront alors

$$\alpha + p\left(\frac{dV}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) = 0,$$

$$\beta + p\left(\frac{dV}{dy} + \frac{dQ}{dy}\right) = 0,$$

$$\gamma + p\left(\frac{dV}{dz} + \frac{dQ}{dz}\right) = 0,$$

$$Q = \iint \left(\alpha' \cos. s + \beta' \cos. s' + \gamma' \cos. s''\right) \frac{d\omega}{\rho} - R,$$

$$R = \iiint \left(\frac{d\alpha'}{dx'} + \frac{d\beta'}{dy'} + \frac{d\gamma'}{dz'}\right) \frac{dx'\, dy'\, dz'}{\rho}.$$

Soit maintenant φ une fonction de x, y, z, déterminée par l'équation

$$\varphi + V + Q = 0; \quad (8)$$

nous aurons

$$\alpha = p\frac{d\varphi}{dx},\quad \beta = p\frac{d\varphi}{dy},\quad \gamma = p\frac{d\varphi}{dz},$$

et en outre

$$\left.\begin{aligned} Q &= \iint\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos. s + \frac{d\varphi'}{dy'}\cos. s' + \frac{d\varphi'}{dz'}\cos. s''\right)\frac{p'd\omega}{\rho} - R,\\ R &= \iiint\left(\frac{d.p'\frac{d\varphi'}{dx}}{dx'} + \frac{d.p'\frac{d\varphi'}{dy'}}{dy'} + \frac{d.p'\frac{d\varphi'}{dz'}}{dz'}\right)\frac{dx'\,dy'\,dz'}{\rho}, \end{aligned}\right\} (9)$$

en désignant par p' et φ', ce que deviennent p et φ quand on y change x, y, z, en $x'\,y'\,z'$. La solution du problème qui nous occupe, c'est-à-dire, le calcul de l'action de A sur un point extérieur au moyen des équations (3), ne dépendra donc plus que d'une seule inconnue, ou de la résolution de l'équation (8).

(14) Les centres des forces auxquels répond la fonction V étant extérieurs, et les coordonnées x, y, z, appartenant à un point intérieur de A, on a

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0;$$

et ce point ne faisant pas partie de sa surface, on a aussi identiquement

$$\frac{d^2.\frac{1}{\rho}}{dx^2} + \frac{d^2.\frac{1}{\rho}}{dy^2} + \frac{d^2.\frac{1}{\rho}}{dz^2} = 0,$$

dans toute l'étendue de l'intégrale double que Q renferme, laquelle disparaît par conséquent dans la quantité

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2}.$$

Mais il n'en est pas de même à l'égard de l'intégrale triple R qui s'étend à tous les points de A; et d'après le théorème du n° 7, on a

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{d^2R}{dy^2}+\frac{d^2R}{dz^2}=-4\pi\left(\frac{d.p\frac{d\varphi}{dx}}{dx}+\frac{d.p\frac{d\varphi}{dx}}{dy}+\frac{d.p\frac{d\varphi}{dz}}{dz}\right).$$

On déduira donc de l'équation (8):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^3}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}+4\pi\left(\frac{d.p\frac{d\varphi}{dx}}{dx}+\frac{d.p\frac{d\varphi}{dy}}{dy}+\frac{d.p\frac{d\varphi}{dy}}{dz}\right)=0. \quad (10)$$

Si A est un corps homogène qui ait partout la même température, les quantités k et q, et par suite la quantité p, seront indépendantes de x, y, z; ce qui réduira cette dernière équation à

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0.$$

On aura en même temps $R=0$, et la valeur de Q sera simplement:

$$Q=p\iint\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos.s+\frac{d\varphi'}{dy'}\cos.s'+\frac{d\varphi'}{dz'}\cos.s''\right)\frac{d\omega}{\rho}.$$

Cette expression, l'équation précédente et l'équation (8), s'accordent avec celles que j'ai trouvées dans le premier mémoire, pour le même cas d'un corps homogène dans lequel les deux fluides sont en équilibre : elles coïncideront parfaitement, en remplaçant dans celles-ci, l'inconnue φ par $\frac{3\varphi}{4\pi(1-k)}$, et y mettant ensuite p à la place de $\frac{3k}{4\pi(1-k)}$; ce qui est permis, puisque k est une constante dont la signification n'est pas déterminée, d'après ce qu'on a dit à la fin du n° 12 de ce mémoire.

Après le cas de l'homogénéité, le plus simple serait celui d'une sphère composée de couches concentriques, dont chacune soit homogène. En fixant, dans ce cas, l'origine des coordonnées au centre de cette sphère, et désignant par r le rayon vecteur du point qui répond à x, y, z, en sorte qu'on ait

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

la quantité p sera une fonction donnée de r. On aura, en conséquence,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dr}\frac{x}{r}, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dr}\frac{y}{r}, \quad \frac{dp}{dz} = \frac{dp}{dr}\frac{z}{r};$$

et à cause de

$$\frac{x}{r}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{y}{r}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{z}{r}\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dr},$$

on tirera de l'équation (10) :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{4\pi\frac{dp}{dr}}{1 + 4\pi p}\frac{d\varphi}{dr}.$$

Si donc on désigne par r' le rayon vecteur du point qui répond à x', y', z', la seconde équation (9) deviendra

$$R = \iiint \zeta' \frac{d\varphi'}{dr}\frac{dx'\,dy'\,dz'}{\rho},$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{1 + 4\pi p'}\frac{dp'}{dr'} = \zeta',$$

de manière que ζ' soit une fonction donnée de r' qui sera nulle quand toutes les couches de A seront de la même nature. Conservons ensuite p pour représenter la valeur con-

stante de p' relative à la surface de A, observons qu'on a

$$\cos. s = \frac{x'}{r'}, \quad \cos. s' = \frac{y'}{r'}, \quad \cos. s'' = \frac{z'}{r'};$$

et éliminons R de la première équation (9), nous aurons

$$Q = p\int\int \frac{d\varphi'}{dr'} \frac{d\omega}{\rho} - \int\int\int \zeta' \frac{d\varphi'}{dr'} \frac{dx'\,dy'\,dz'}{\rho}.$$

Nous ne ferons quant à présent aucune application particulière de cette formule, faute de connaître la valeur de ζ' en fonction de r'. Si la sphère que l'on considère est formée d'une matière homogène, dont la température varie du centre à la surface, cette fonction dépendra de la loi inconnue suivant laquelle la puissance magnétique change avec le degré de chaleur dans les substances susceptibles d'aimantation par influence.

(15) Réduisons maintenant les équations relatives au magnétisme en mouvement, comme nous venons de réduire celles qui se rapportent au magnétisme en repos ; mais pour ne pas trop compliquer la question, bornons-nous à considérer le cas d'un corps homogène, dont tous les points ont la même température, de manière que k et ft soient des quantités indépendantes de x, y, z.

Soit pour un moment

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = \mathrm{F}t,$$

et désignons par $\mathrm{F}'t$, ce que devient cette fonction, quand on y change x, y, z, en x', y', z'. La valeur de Q du nº 12 deviendra

$$Q = k\iint(\alpha' \cos. s + 6' \cos. s' + \gamma' \cos. s'')\frac{d\omega}{\rho} - k\iiint\frac{F't}{\rho}dx'dy'dz'.$$

On en déduira, comme précédemment,

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2} = 4\pi k F t;$$

et les équations (7) donneront ensuite

$$\frac{dT}{dx} + \frac{dT'}{dy} + \frac{dT''}{dz} = -\frac{8\pi k F t}{3};$$

au moyen de quoi l'on déduira des équations (6):

$$Ft = -\frac{8\pi k}{3}\int_0^t F\theta f'(t-\theta)d\theta;$$

équation à laquelle on satisfait évidemment en prenant $Ft = o$, et qui n'a pas d'autre solution, quelle que soit la fonction $f't$.

En effet, si l'on a $Ft = o$, depuis $t = o$ jusqu'à une certaine valeur $t = a$, je dis que l'on aura encore $Ft = o$ jusqu'à $t = a + \delta$, δ étant infiniment petit; car d'après l'équation dont il est question, et en négligeant le carré de δ, nous aurons

$$F(a+\delta) = -\frac{8\pi k}{3}\left[\int_0^a F\theta f'(a+\delta-\theta)d\theta + Faf'(\delta)\delta\right];$$

et comme on a $Fa = o$, et que $F\theta$ est aussi nulle par hypothèse dans toute l'étendue de l'intégrale que cette formule renferme, il en résulte $F(a+\delta) = o$. D'ailleurs l'intégrale relative à θ que contient notre équation, s'évanouissant avec t, on a

$Ft=0$, quand $t=0$; on aura donc aussi $F(\delta)=0$; et en prenant successivement $a=\delta, =2\delta, =3\delta$, etc., on voit qu'on aura généralement $F(n\delta)=0$, n étant un nombre entier, fini ou infini; ou autrement dit la fonction Ft sera nulle pour toutes les valeurs de t.

En remettant pour cette fonction, ce qu'elle représente, nous aurons l'équation

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0;$$

d'après laquelle, il ne restera dans la quantité Q, que l'intégrale double relative à la surface de A, savoir :

$$Q=k\iint(\alpha'\cos.s+\beta'\cos.s'+\gamma'\cos.s'')\frac{d\omega}{\rho}.$$

(16) Soit actuellement

$$\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}=\psi t.$$

Les deux premières équations (7) donneront

$$\frac{dT}{dy}-\frac{dT'}{dx}=\frac{4\pi k}{3}\psi t;$$

ensuite on tirera des deux premières équations (6):

$$\psi t=\frac{4\pi k}{3}\int_0^t\psi\theta f'(t-\theta)d\theta;$$

et l'on démontrera, comme dans le n° précédent, que cette dernière équation n'a pas d'autre solution que $\psi t=0$. Ainsi, l'on aura

$$\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}=0,$$

On prouvera de même que l'on a

$$\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}=0,\quad \frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}=0;$$

ce qui montre que α, β, γ, sont les différences partielles d'une même fonction de x, y, z; en sorte qu'en désignant par φ cette fonction inconnue, nous aurons

$$\alpha=\frac{d\varphi}{dx},\quad \beta=\frac{d\varphi}{dy},\quad \gamma=\frac{d\varphi}{dz}. \qquad (11)$$

L'équation trouvée dans le n° précédent se changera donc en celle-ci

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0; \qquad (12)$$

et la valeur de Q deviendra

$$Q=k\iint\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos.s+\frac{d\varphi'}{dy'}\cos.s'+\frac{d\varphi'}{dz'}\cos.s''\right)\frac{d\omega}{\rho}, \qquad (13)$$

en appelant φ' ce que devient φ quand on y remplace x, y, z, par les coordonnées x', y', z', d'un point de la surface de A.

Après avoir éliminé Θ, Θ', Θ'', des équations (6), au moyen des formules (7) dans lesquelles on fera $t=\theta$, ces trois équations (6) se réduiront à une seule dont elles seront les différences partielles relatives à x, y, z, savoir :

$$\varphi+\int_0^t\left(V_1+Q_1-\frac{4\pi k}{3}\varphi_1\right)f'(t-\theta)\,d\theta=0, \qquad (14)$$

où l'on a représenté par V_1, Q_1 et φ_1, ce que deviennent V, Q et φ quand on y met θ à la place de t.

(17) La solution du problème qui fait l'objet de ce Mémoire, ne dépend donc, comme dans le cas du magnétisme

en repos, que d'une seule inconnue φ, et se trouve ramenée à résoudre l'équation (14) pour en déduire la valeur de cette inconnue en fonction de x, y, z et t. L'équation (12) n'ajoute rien à cette équation (14) : toute valeur de φ qui satisfera à celle-ci, vérifiera aussi l'équation (12) qui en est une conséquence, dont on pourra néanmoins se servir pour faciliter la résolution de l'équation (14).

Lorsque la valeur de φ sera connue, les équations (11) feront connaître immédiatement l'état magnétique du corps A à tel instant et en tel point de sa masse que l'on voudra, c'est-à-dire, la direction et l'intensité d'une petite aiguille aimantée dont l'action magnétique serait équivalente à celle de l'élément de A qui répond à ce point (nº 2). Par une double intégration, étendue à toute la surface de A, on connaîtra aussi la valeur de Q; puis les équations (3) détermineront, en grandeur et en direction, l'action exercée à un instant quelconque par ce corps, sur un point extérieur, situé à une distance sensible de sa surface.

D'après la formule (13), nous voyons que cette action sera équivalente à celle d'une couche de fluide libre, extrêmement mince, qui s'étendrait sur toute la surface de A, et dont l'épaisseur au point qui répond aux coordonnées x, y, z, aurait à chaque instant pour expression :

$$k\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos.s+\frac{d\varphi'}{dy'}\cos.s'+\frac{d\varphi'}{dz'}\cos.s''\right);$$

le fluide étant boréal ou austral selon que cette quantité sera positive ou négative. Cela ne veut pas dire, cependant, que cette couche superficielle existe réellement comme dans le cas de l'électricité : le fluide libre, dans un corps aimanté,

est distribué dans toute sa masse; l'action extérieure de ce corps émane de tous ses points; et s'il ne s'agissait pas d'un corps homogène, cette action ne serait pas équivalente à celle d'une couche superficielle, ainsi qu'on le voit par la seconde valeur de Q du n° 14. Si le corps homogène A était creux, l'intégrale que Q représente s'étendrait à ses deux surfaces, et par conséquent aussi la couche de fluide libre dont l'action pourrait remplacer celle de A.

Les composantes X, Y, Z, données par les équations (3) ne sont que des forces accélératrices : si le point extérieur sur lequel elles agissent était, par exemple, l'un des pôles d'une aiguille aimantée, et qu'on voulût connaître la force motrice de cette aiguille, résultant de l'action de A sur le fluide libre, réuni en ce point, il faudrait multiplier les seconds membres des équations (3) par cette quantité de fluide, positive ou négative, selon la nature du pôle. Dans ce cas, il pourra arriver que ce pôle soit aussi l'un des centres des forces extérieures qui produisent l'aimantation de A, et auxquelles répond la quantité V; la valeur de φ, donnée par l'équation (14), dépendra alors de sa position, et sera fonction de ses coordonnées; mais en différentiant Q pour former les valeurs de X, Y, Z, il faudrait avoir soin de faire seulement varier les coordonnées de ce pôle qui entreront dans sa distance ρ à un point quelconque de A.

(18) Quelles que soient la forme de ce corps et les forces extérieures auxquelles il est soumis, nous pouvons démontrer que l'équation (14) n'est susceptible que d'une seule solution. Supposons, en effet, qu'on y puisse satisfaire au moyen d'une première valeur de φ, et ensuite au moyen de

cette valeur augmentée d'une autre fonction de x, y, z et t; représentons cette fonction par $\mathrm{F}t$, et par $\mathrm{F}'t$ ce qu'elle devient quand on y change x, y, z, en x', y', z'; faisons ensuite

$$\frac{d.\mathrm{F}'t}{dx'}\cos.s + \frac{d.\mathrm{F}'t}{dy'}\cos.s' + \frac{d.\mathrm{F}'t}{dz'}\cos.s'' = \Pi t.$$

Si l'on substitue successivement dans l'équation (14), les deux valeurs de φ, et que l'on retranche l'un de l'autre les résultats de ces substitutions, il suit de sa forme linéaire par rapport à φ, que les termes dépendants de la fonction $\mathrm{F}t$ resteront seuls dans cette différence; et en mettant à la place de Q, l'intégrale que cette lettre représente, nous aurons

$$\mathrm{F}t + k\int_0^t \left(\iint \Pi\theta\frac{d\omega}{\rho} - \frac{4\pi}{3}\mathrm{F}\theta\right) f'(t-\theta)\,d\theta = 0.$$

La question consiste donc à prouver que cette équation n'a d'autre solution que $\mathrm{F}t = 0$, ce qui se démontrera par un raisonnement semblable à celui du n° 15.

D'abord, il est évident qu'on a $\mathrm{F}t = 0$ quand $t = 0$, puisque l'intégrale relative à θ s'évanouit avec t. Admettons pour un moment qu'on ait $\mathrm{F}t = 0$, et par conséquent $\Pi t = 0$, depuis $t = 0$ jusqu'à une certaine valeur $t = a$; et prouvons qu'on aura aussi $\mathrm{F}t = 0$ jusqu'à $t = a + \delta$, δ étant infiniment petit. Or, en négligeant le carré de δ, l'équation précédente donne

$$\mathrm{F}(a+\delta) + k\int_0^a \left(\iint \Pi\theta\frac{d\omega}{\rho} - \frac{4\pi}{3}\mathrm{F}\theta\right) f'(a+\delta-\theta)\,d\theta$$
$$+ k\left(\iint \Pi a\frac{d\omega}{\rho} - \frac{4\pi}{3}\mathrm{F}a\right) f'(\delta)\,\delta = 0;$$

et à cause que, par hypothèse, les fonctions comprises sous l'intégrale relative à θ sont nulles entre ses limites, aussi bien que $\mathrm{F}a$ et Πa, il en résulte qu'on a $\mathrm{F}(a+\delta)=0$; d'où l'on conclura sans difficulté $\mathrm{F}t=0$ pour toutes les valeurs de t.

Ainsi, dans chaque cas particulier, il suffira de trouver une valeur de φ en fonction de x, y, z et t, qui satisfasse à l'équation (14), pour en avoir la solution complète.

§. III.

Application à une sphère homogène, tournant uniformément sur elle-même.

(19) Pour fixer les idées, nous supposerons l'axe de rotation horizontal. Nous placerons l'origine des coordonnées qui entrent dans les formules précédentes, au centre de la sphère. Les x positives seront comptées sur cette droite, du côté du sud; l'axe des z positives sera vertical et dirigé de bas en haut, et celui des y positives, horizontal et tel qu'en tournant, les points de la sphère aillent du premier au second axe. Soit r le rayon vecteur du point M, extérieur ou intérieur, qui répond aux coordonnées x, y, z; à l'origine du mouvement, désignons par u l'angle compris entre cette droite et l'axe des x, et par v l'angle que fait le plan de ces deux droites avec celui des x, z. Si nous représentons par n la vitesse angulaire de la sphère, qu'on suppose constante, l'angle v deviendra $nt+v$ au bout d'un temps quelconque t, compté de cette origine; et à cet instant, nous aurons

$$x=r\cos.u,\quad y=r\sin.u\sin.(nt+v),\quad z=r\sin.u\cos.(nt+v).$$

Soient en outre r', u' et v', ce que deviennent les variables r, u et v, relativement à un point M′ de la sphère dont

x', y', z', sont les trois coordonnées. En appelant δ l'angle compris entre les deux rayons vecteurs r et r', on aura

$$\cos.\delta = \cos.u \cos.u' + \sin.u \sin.u' \cos.(v - v');$$

et la distance ρ de M à M' sera donnée par l'équation :

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos.\delta.$$

Au lieu d'une sphère entièrement pleine, nous considérerons, pour plus de généralité, une sphère creuse dont la partie pleine aura une épaisseur constante. Nous désignerons par a et b, les rayons de ses deux surfaces concentriques, de sorte que $a - b$ soit cette épaisseur. Cela étant, pour former la quantité Q, nous aurons à la surface extérieure :

$$\cos.s = \frac{x'}{r'},\ \cos.s' = \frac{y'}{r'},\ \cos.s'' = \frac{z'}{r'},\ r' = a,$$
$$d\omega = a^2 \sin.u'\,du'\,dv';$$

et à la surface intérieure :

$$\cos.s = -\frac{x'}{r'},\ \cos.s' = -\frac{y'}{r'},\ \cos.s'' = -\frac{z'}{r'},\ r' = b,$$
$$d\omega = b^2 \sin.u'\,du'\,dv';$$

par conséquent l'équation (13) deviendra

$$Q = ka^2 \iint \frac{\alpha' \sin.u'\,du'\,dv'}{\rho_1} - kb^2 \iint \frac{\beta' \sin.u'\,du'\,dv'}{\rho_2}; \quad (15)$$

ρ_1 et ρ_2 étant les valeurs de ρ relatives à $r' = a$ et $r' = b$; α' et β', celles de $\frac{d\varphi'}{dr'}$ qui répondent à ces mêmes valeurs de r'; et les intégrales étant prises depuis $u' = 0$ et $v' = 0$, jusqu'à $u' = \pi$ et $v' = 2\pi$. Pour les effectuer, il sera nécessaire de développer ρ_1 et ρ_2 en séries convergentes, ce qui exigera qu'on ait égard à la position du point M.

Si ce point appartient à la partie pleine de la sphère, en sorte qu'on ait $r > b$ et $< a$, on développera $\frac{1}{\rho_1}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{r}{a}$, et $\frac{r}{\rho_2}$ suivant celles de $\frac{b}{r}$; on aura, de cette manière :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{a} + \frac{r}{a^2}P_1 + \frac{r^2}{r^3}P_2 + \ldots + \frac{r^i}{a^{i+1}}P_i + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{r} + \frac{b}{r^2}P_1 + \frac{b^2}{r^3}P_2 + \ldots + \frac{b^i}{r^{i+1}}P_i + \text{etc.};$$

P_i étant dans les deux séries, la même fonction de cos. δ, rationnelle, entière et du degré i. En appelant Q_i, le terme de Q correspondant à P_i, on aura donc

$$Q_i = \frac{kr^i}{a^{i-1}}\iint \alpha' P_i \sin. u' du' dv' - \frac{kb^{i+2}}{r^{i+1}}\iint \text{ϐ}' P_i \sin. u' du' dv';$$

et il faudra substituer à la place de Q, dans l'équation (14), la somme de ces termes depuis $i=0$ jusqu'à $i=\infty$.

Nous supposerons enfin que la sphère creuse soit aimantée par l'influence d'une force qui soit la même en grandeur et en direction pour tous ses points, telle que l'action magnétique de la terre, par exemple. La quantité V dont les différences partielles prises avec des signes contraires, expriment les composantes de cette force, sera une fonction linéaire de x, y, z; et en y mettant pour ces coordonnées leurs valeurs précédentes, elle prendra la forme :

$$V = -mr\cos. u - m'r\sin. u \sin. v - m''r\sin. u\cos. v;$$

m, m', m'' étant des constantes positives qui dépendront de l'intensité et de la direction du magnétisme terrestre au lieu

et à l'instant de l'observation, et de l'orientation de l'axe de rotation de la sphère. On mettra donc cette valeur de V avec celle de Q dans l'équation (14), ou plutôt dans sa différentielle relative à r, afin d'en déduire, en la résolvant ensuite, la valeur de $\frac{d\varphi}{dr}$ que nous aurons seulement besoin de connaître.

(20) En ayant égard aux propriétés connues des fonctions P_i, on voit immédiatement que la valeur la plus générale de $\frac{d\varphi}{dr}$ qui puisse satisfaire à cette équation, sera de la forme :

$$\frac{d\varphi}{dr} = R\cos.u + R'\sin.u\sin.(nt+v) + R''\sin.n\cos.(nt+v);$$

R, R', R'', étant des fonctions inconnues de r et t dont chacune n'aura qu'une seule valeur possible, d'après la proposition du nº 18.

Si l'on représente ce que ces quantités deviennent, par A, A', A'', quand on fait $r=a$, et par B, B', B'', dans le cas de $r=b$, on aura

$$\alpha' = A\cos.u' + A'\sin.u'\sin.(nt+v') + A''\sin.u'\cos.(nt+v'),$$
$$6' = B\cos.u' + B'\sin.u'\sin.(nt+v') + B''\sin.u'\cos.(nt+v');$$

et d'après les propriétés de P_i, il en résultera

$$\iint \alpha' P_i \sin.u'du'dv' = 0, \quad \iint 6' P_i \sin.u'du'dv' = 0,$$

excepté dans le cas de l'indice $i=1$, pour lequel on aura

$$\iint \alpha' P_1 \sin.u'du'dv' = \frac{4\pi}{3}[A\cos.u + A'\sin.u\sin.(nt+v) + A''\sin.u\cos.(nt+v)],$$

$$\iint \text{б}' P_{1} \sin. u' \, du' \, dv' = \frac{4\pi}{3} [B \cos. u + B' \sin. u \sin. (nt + v) + B'' \sin. u \cos. (nt + v)].$$

La valeur de Q relative à la partie pleine de la sphère ne sera donc composée que du seul terme relatif à cet indice; et en la différentiant par rapport à r, nous aurons

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{4\pi k}{3} \left[\left(A + \frac{2Bb^3}{r^3}\right) \cos. u + \left(A' + \frac{2B'b^3}{r^3}\right) \sin. u \sin. (nt + v) + \left(A'' + \frac{2B''b^3}{r^3}\right) \sin. u \cos. (nt + v) \right].$$

Je substitue actuellement les valeurs de $\frac{d\varphi}{dr}$, $\frac{dQ}{dr}$ et $\frac{dV}{dr}$ dans l'équation (14), différentiée par rapport à r; et en égalant séparément à zéro, les coëfficients de $\cos. u$, $\sin. u \sin. (nt + v)$ et $\sin. u \cos. (nt + v)$, j'obtiens ces trois équations :

$$\left.\begin{aligned} &R + \left[\frac{4\pi k}{3}\left(A + \frac{2Bb^3}{r^3} - R\right) - m\right] q = 0, \\ &R' + \left[\frac{4\pi k}{3}\left(A' + \frac{2B'b^3}{r^3} - R'\right) - m'\right] (N' + q) \\ &\quad + \left[\frac{4\pi k}{3}\left(A'' + \frac{2B''b^3}{r^3} - R''\right) - m'\right] N = 0, \\ &R'' - \left[\frac{4\pi k}{3}\left(A' + \frac{2B'b^3}{r^3} - R'\right) - m''\right] N \\ &\quad + \left[\frac{4\pi k}{3}\left(A'' + \frac{2B''b^3}{r^3} - R''\right) - m''\right] (N' + q) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

dans lesquelles on a fait, pour abréger,

$$\int_0^t f'(t - \theta) \, dt = q,$$

$$\int_0^t \sin. n(t-\theta) f'(t-\theta) d\theta - \mathrm{N},$$

$$\int_0^t [\cos. n(t-\theta) - 1] f'(t-\theta) d\theta = \mathrm{N}'.$$

Dans les premiers instants de la rotation de la sphère, ces trois intégrales q, N et N′ seront variables, et leurs valeurs dépendront de la forme inconnue de la fonction ft du nº 9; mais elles se changeront en des quantités constantes dès que le temps t aura acquis une grandeur sensible. En observant qu'on a $f(t-\theta)=0$, à la limite $\theta=t$, on voit que q ne sera autre chose que la valeur constante de ft qui aura lieu à cette époque. Pour que les éléments de N et N′ ne soient pas nuls à raison du facteur $f'(t-\theta)$, il faudra que θ ait aussi des valeurs qui diffèrent très-peu de celles de t; et si l'on fait $t-\theta=x$, les valeurs constantes de N et N′ seront

$$\mathrm{N}=\int \sin. nx f'x\, dx, \quad \mathrm{N}'=\int (\cos. nx - 1) f'x\, dx;$$

les intégrales étant prises dans la petite étendue des valeurs de x pour lesquelles $f'x$ n'est pas nulle, ou, ce qui reviendrait au même, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$. C'est à partir de cette époque que nous nous bornerons à considérer l'action magnétique de la sphère tournante.

(21) En faisant successivement $r=a$ et $\mathrm{R}=\mathrm{A}$, $r=b$ et $\mathrm{R}=\mathrm{B}$, dans la première équation (16), il en résulte deux autres, d'où l'on tire

$$\frac{4\pi k}{3}\mathrm{A}=\frac{mk_1[(1+k_1)a^3-2k_1b^3]}{(1+k_1)a^3-2k_1^2b^3},$$

$$\frac{4\pi k}{3}\mathrm{B}=\frac{mk_1(1-k_1)a^3}{(1+k_1)a^3-2k_1^2b^3},$$

en posant

$$\frac{4\pi kq}{3}=k_1.$$

De même, si l'on fait dans les deux dernières équations (16), d'abord $r=a$, $R'=A'$, $R''=A''$, et ensuite $r=b$, $R'=B'$, $R''=B''$, on aura ces quatre équations :

$$\left.\begin{aligned}
&A'+\frac{8\pi kb^3}{3a^3}[B'(N'+q)+B''N]=m'(N'+q)+m''N,\\
&A''+\frac{8\pi kb^3}{3a^3}[B''(N'+q)-B'N]=m''(N'+q)-m'N,\\
&B'+\frac{4\pi k}{3}[(A'+B')(N'+q)+(A''+B'')N]=m'(N'+q)+m''N,\\
&B''+\frac{4\pi k}{3}[(A''+B'')(N'+q)-(A'+B')N]=m''(N'+q)-m'N,
\end{aligned}\right\}(17)$$

desquelles on déduira les valeurs de A', B', A'', B''.

Ces constantes, ainsi que A et B, étant connues, les quantités α' et $6'$ le seront aussi. En substituant leurs valeurs dans l'équation (15), et développant $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$ en séries convergentes, on formera la quantité Q relative à un point M qui n'appartient pas à la partie pleine de la sphère creuse. Si le point M est situé dans l'espace vide qu'elle renferme, les développements devront se faire suivant les puissances de $\frac{r}{a}$ et $\frac{r}{b}$, et s'il est extérieur, selon les puissances de $\frac{a}{r}$ et $\frac{b}{r}$. Dans ces deux cas, la valeur de Q se réduira à un seul terme, savoir :

$$Q=\frac{4\pi k}{3}[(A-B)r\cos.u+(A'-B')r\sin.u\sin.(nt+v)$$
$$+(A''-B'')r\sin.u\cos.(nt+v)],$$

dans le premier cas, et dans le second :

$$Q = \frac{4\pi k}{3r^3}\left[(Aa^3 - Bb^3)r\cos.u + (A'a^3 - B'b^3)r\sin.u\sin.(nt+v) + (A''a^3 - B''b^3)r\sin.u\cos.(ut+v)\right];$$

ou bien en remettant les coordonnées $x, y, z,$ du point M à la place de leurs valeurs :

$$Q = \frac{4\pi k}{3}\left[(A-B)x + (A'-B')y + (A''-B'')z\right],$$

$$Q = \frac{4\pi k}{3r^3}\left[(Aa^3 - Bb^3)x + (A'a^3 - B'b^3)y + (A''a^3 - B''b^3)z\right].$$

Le temps n'entrant pas dans ces formules, il en résulte que, passé les premiers moments de la rotation, dont nous avons fait abstraction, l'action de la sphère tournante sur un point donné sera constante en grandeur et en direction. De plus, la première valeur de Q étant linéaire par rapport à $x, y, z,$ cela montre que cette action sera la même pour tous les points de l'espace intérieur. Quant aux points extérieurs, les composantes parallèles aux axes des $x, y, z,$ déterminées par les équations (3), auront pour expressions :

$$X = -\frac{4\pi k}{3r^3}\left[(Aa^3 - Bb^3)\left(1 - \frac{3x^2}{r^2}\right) - 3(A'a^3 - B'b^3)\frac{xy}{r^2} - 3(A''a^3 - B''b^3)\frac{xz}{r^2}\right],$$

$$Y = -\frac{4\pi k}{3r^3}\left[(A'a^3 - B'b^3)\left(1 - \frac{3y^2}{r^2}\right) - 3(Aa^3 - Bb^3)\frac{xy}{r^2} - 3(A''a^3 - B''b^3)\frac{yz}{r^2}\right],$$

$$Z = -\frac{4\pi k}{3r^3}\left[(A''a^3 - B''b^3)\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) - 3(Aa^3 - Bb^3)\frac{xz}{r^2} - 3(A'a^3 - B'b^3)\frac{yz}{r^2}\right].$$

Ces forces varieront avec les coordonnées du point M sur lequel elles agissent, suivant les mêmes lois, soit que la sphère creuse soit en repos, ou qu'elle soit en mouvement; et l'on pourra ramener immédiatement le second cas au premier, en changeant convenablement les composantes perpendiculaires à l'axe de rotation, de la force qui produit l'aimantation.

En effet, supposons qu'on arrête le mouvement de la sphère, ou qu'on fasse $n=0$, et qu'en même temps on substitue des forces m_1 et m_2, aux forces m' et m'' parallèles aux axes des y et z; les valeurs de A et B ne seront pas changées, et celles de A', B', A'', B'', qui se rapportent à ce nouvel état, seront respectivement $A\frac{m_1}{m}$, $B\frac{m_1}{m}$, $A\frac{m_2}{m}$, $B\frac{m_2}{m}$; par conséquent, on aura

$$X=-\frac{4\pi k(Aa^3-Bb^3)}{3mr^3}\left[m\left(1-\frac{3m}{r^2}\right)-\frac{3m_1xy}{r^2}-\frac{3m_2xz}{r^2}\right],$$

$$Y=-\frac{4\pi k(Aa^3-Bb^3)}{3mr^3}\left[m_1\left(1-\frac{3y^2}{r^2}\right)-\frac{3mxy}{r^2}-\frac{3m_2yz}{r^2}\right],$$

$$Z=-\frac{4\pi k(Aa^2-Bb^2)}{3mr^3}\left[m_2\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)-\frac{3mxz}{r^2}-\frac{3m_1yz}{r^2}\right].$$

Or, on fera coïncider ces formules avec les précédentes, en prenant

$$(Aa^3-Bb^3)\frac{m_1}{m}=A'a^3-B'b^3,\ (Aa^3-Bb^3)\frac{m_2}{m}=A''a^3-B''b^3,$$

pour déterminer m_1 et m_2; ou bien, en mettant pour A et B leurs valeurs :

$$\frac{k_1(1+k_1)(a^3-b^3)a^3m_1}{(1+k_1)a^3-2k_1^2b^3}=\frac{4\pi k}{3}(A'a^3-B'b^3),$$

$$\frac{k_1(1+k_1)(a^3-b^3)a^3 m_2}{(1+k_1)a^3-2k_1^2 b^3}=\frac{4\pi k}{3}(A'' a^3 - B' b^3);$$

celles de A′, B′, A″, B″, étant toujours tirées des équations (17).

(22) Pour appliquer ces formules à des exemples simples, supposons d'abord la sphère tournante, entièrement pleine. Nous aurons $b=0$; et les équations (17) donneront

$$A'=(N'+q)m'+Nm'',\quad A''=(N'+q)m''-Nm';$$

d'où l'on conclura, en ayant égard à ce que k_1 représente,

$$m_1-m'=\frac{N' m'}{q}+\frac{N m''}{q},\quad m_2-m''=\frac{N' m''}{q}-\frac{N m'}{q}.$$

Ce sont les forces parallèles aux axes des y et z, qu'il faut ajouter à m' et m'' pour ramener la sphère tournante au cas où elle serait en repos. Or, on voit qu'elles équivalent à deux autres forces parallèles au plan des y, z, l'une ayant la même direction que la résultante de m' et m'', et pour valeur $\frac{N'\sqrt{m'^2+m''^2}}{q}$, l'autre perpendiculaire à cette résultante et égale à $\frac{N\sqrt{m'^2+m''^2}}{q}$. Si l'on considère la petitesse des valeurs de x dans les intégrales N et N′, et si la vitesse n n'est pas extrêmement grande, on pourra développer $\sin. nx$ et $\cos. nx$ sous les signes $\int$, en séries convergentes suivant les puissances de nx; et en négligeant le cube et les puissances supérieures, on aura simplement

$$N=n\int xf'x\,dx,\quad N'=-\tfrac{1}{2}n^2\int x^2 f'x\,dx;$$

où l'on voit que N′ sera très-petite par rapport à N, et par conséquent aussi la première force additive relativement à la seconde. Donc, pour ramener une sphère tournante au cas du repos, il suffira d'ajouter aux forces qui produisent son état d'aimantation, une force à très-peu près normale au plan de leur résultante et de l'axe de rotation.

Ce résultat s'accorde avec la proposition que M. P. Barlow a énoncée, et qu'il a conclue de ses expériences sur l'action d'une sphère de fer fondu, de huit pouces anglais de diamètre, à laquelle il avait imprimé une vitesse de rotation de 720 tours par minute (1). Selon cette proposition, la force additive serait exactement normale au plan dont nous parlons; il en faut donc conclure que malgré la grandeur de la vitesse employée, le rapport de N′ à N est encore insensible dans le fer fondu; ce qui suppose que la décomposition du fluide neutre s'y fait dans un temps x, extrêmement court, et tel que l'arc nx décrit dans ce temps avec une vitesse d'une circonférence par cinquième de seconde, n'a pas néanmoins une grandeur sensible; circonstance qui n'empêche pas que l'intégrale N n'ait une valeur comparable à la quantité q, à cause que les valeurs variables de fx peuvent être extrêmement grandes par rapport à sa valeur finale (nº 9).

Quant au sens dans lequel la sphère tournante exerce son action, pour le fixer clairement, supposons, avec le même physicien, qu'on ait neutralisé les composantes horizontales m et m' du magnétisme terrestre, au moyen de deux aimants convenablement placés; et considérons cette action sur un

(1) Transactions philosophiques, année 1825, deuxième partie.

point M appartenant à l'axe des y. Nous aurons alors $m=0$, $m'=0$, $x=0$, $z=0$; par conséquent

$$A'=Nm'', \quad A''=(N'+q)m'',$$

et ensuite

$$X=0, \; Y=\frac{8\pi k N m'' a^3}{3r^3}, \quad Z=-\frac{4\pi k(N'+q)m'' a^3}{3r^3}.$$

D'après les expériences sur l'action des plaques tournantes, l'intégrale N est positive dans toutes les substances; la force Y l'est donc aussi, c'est-à-dire qu'elle tendra à éloigner du centre de la sphère, les particules boréales situées du côté des y positives, et à en rapprocher celles qui tombent du côté des y négatives. Si donc on a placé sur l'axe des y, le point de suspension d'une boussole rendue indifférente au magnétisme terrestre dans les directions horizontales, comme la sphère que nous considérons, l'action de cette sphère tournante la dirigera suivant cette droite; et son pôle sud, où est concentré le fluide boréal, s'éloignera ou s'approchera de la sphère, selon que l'aiguille sera placée du côté des y positives ou du côté opposé, c'est-à-dire, selon qu'en tournant, la partie supérieure de la sphère s'approchera ou s'éloignera de l'aiguille: résultat entièrement conforme à ce que M. P. Barlow a trouvé par l'expérience.

Observons encore que si la quantité N' n'est pas absolument nulle, la force Z dépendra de la rotation de la sphère; en sorte que si l'aiguille était équilibrée et parfaitement horizontale avant que le mouvement ait commencé, elle prendra une petite inclinaison due à l'action de la sphère tournante; et la grandeur et le sens de cette inclinaison, s'il est possible de l'observer, feront connaître la grandeur et le signe de N'.

(23) En faisant $n=0$, et par suite $N=0$ et $N'=0$, les formules du n° 21 se rapporteront à l'action de la sphère en repos, et elles deviendront (1):

$$X=-\frac{a^3 k_1}{r^3}\left[m\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right)-\frac{3m'xy}{r^2}-\frac{3m''xz}{r^2}\right],$$

$$Y=-\frac{a^3 k_1}{r^3}\left[m'\left(1-\frac{3y^2}{r^2}\right)-\frac{3mxy}{r^2}-\frac{3m''yz}{r^2}\right],$$

$$Z=-\frac{a^3 k_1}{r^3}\left[m''\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)-\frac{3mxz}{r^3}-\frac{3m'yz}{r^2}\right],$$

si la sphère est entièrement pleine. Dans le cas contraire, il y faudra remplacer le facteur k_1 par la quantité :

$$\frac{k_1(1+k_1)(a^3-b^3)}{(1+k_1)a^3-2k_1^2 b^3}.$$

L'expérience a prouvé que la valeur de k_1 relative à la matière du fer est très-peu différente de l'unité; d'où il résulte que cette quantité est aussi à très-peu près égale à un, excepté lorsque l'épaisseur $a-b$ est nulle ou très-petite. En général, l'action d'une sphère creuse, de fer et en repos, est donc à peu près indépendante de son épaisseur, et égale à celle d'une sphère pleine, de la même matière et de même diamètre : il n'y a d'exception que quand l'épaisseur est une certaine fraction du rayon, d'autant plus petite que la différence $1-k_1$ est moins considérable. C'est, en effet, ce que M. P. Barlow

(1) Ces formules sont les mêmes que celles du n° 9 de mon second Mémoire sur le magnétisme ; en observant que α, β, γ, sont égaux et de signes contraires à m, m', m'' ; remplaçant k par k_1, et faisant attention qu'ici les forces X, Y, Z, sont censées agir sur une particule boréale, et, dans ce Mémoire, sur une particule australe.

avait conclu de l'expérience avant que je l'eusse déduit de la théorie dans mon premier Mémoire sur cette matière. Mais on verra tout-à-l'heure que ce résultat singulier ne subsiste plus dans le cas d'une sphère en mouvement.

Si l'on place au point M, le point de suspension d'une boussole horizontale, dont la longueur soit très-petite par rapport à sa distance à la sphère, l'action de ce corps sera à peu près la même en tous les points de cette aiguille, qui se dirigera, par conséquent, suivant la résultante de cette action et de celle de la terre. En menant donc, par le point M, un axe parallèle à celui des x positives, et désignant par ε, l'angle compris entre cette droite et la partie de l'aiguille qui aboutit à son pôle sud, où est concentré le fluide boréal, nous aurons

$$\text{tang.}\,\varepsilon = \frac{Y + m'}{X + m}.$$

De même, s'il s'agit d'une aiguille d'inclinaison dont le point de suspension soit placé au point M, dont la longueur soit aussi très-petite par rapport à son éloignement de la sphère, et, enfin, dont le plan dans lequel elle peut tourner, passe par le centre de ce corps, elle se dirigera dans ce plan, suivant la résultante des forces horizontales $\sqrt{X^2 + Y^2}$ et $\sqrt{m^2 + m'^2}$, et des forces verticales Z et m''. Si donc on désigne par φ l'angle que fait la partie de cette aiguille qui aboutit au pôle sud, avec la verticale tirée de bas en haut par son point de suspension, on aura

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{Z + m''}{\sqrt{(X + m)^2 + (Y + m')^2}}.$$

On rendra ces formules plus exactes, en leur faisant subir

des corrections relatives, soit aux longueurs des aiguilles, soit à leur action sur la sphère.

En désignant par l la demi-longueur de la première aiguille, et supposant qu'elle soit maintenue horizontale malgré l'action de la sphère, z sera l'ordonnée verticale commune à tous ses points, et $x \pm l \cos.\varepsilon$, $y \pm l \sin.\varepsilon$, les coordonnées horizontales de ses deux pôles. On aura donc les composantes horizontales de l'action de la sphère en chacun de ces deux points, en substituant ces coordonnées à la place de x et y dans les expressions de X et Y. Nous prendrons ensuite pour ces forces les demi-sommes des valeurs relatives aux deux extrémités de l'aiguille; et en négligeant les puissances de l supérieures au cube, ces valeurs moyennes seront

$$X + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 X}{dx^2} l^2 \cos.^2\varepsilon + 2\frac{d^2 X}{dx\,dy} l^2 \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon + \frac{d^2 X}{dy^2} l^2 \sin.^2\varepsilon\right),$$
$$Y + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 Y}{dx^2} l^2 \cos.\varepsilon + 2\frac{d^2 Y}{dx\,dy} l^2 \sin.\varepsilon \cos.\varepsilon + \frac{d^2 Y}{dy^2} l^2 \sin.^2\varepsilon\right),$$

qu'il faudra mettre au lieu de X et Y dans l'expression de tang. ε. Soit aussi l' la demi-longueur de l'aiguille d'inclinaison, u la distance de son point de suspension à l'axe des z, λ l'azimut de son plan, en sorte qu'on ait

$$x = u \cos.\lambda, \quad y = u \sin.\lambda;$$

désignons par U la force horizontale $\sqrt{(X+m)^2 + (Y+m')^2}$; on trouvera, en négligeant la quatrième puissance de l', que les forces Z et U doivent être remplacées dans tang. φ par

$$Z + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 Z}{dz^2} l'^2 \cos.^2\varphi + 2\frac{d^2 Z}{dz\,du} l'^2 \sin.\varphi \cos.\varphi + \frac{d^2 Z}{du^2} l'^2 \sin.^2\varphi\right),$$
$$U + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 U}{dz^2} l'^2 \cos.^2\varphi + 2\frac{d^2 U}{dz\,du} l'^2 \sin.\varphi \cos.\varphi + \frac{d^2 U}{du^2} l'^2 \sin.^2\varphi\right).$$

Appelons μ la quantité de fluide boréal, réunie au pôle sud de la première aiguille. Les composantes suivant les axes des x, y, z, de l'action de ce pôle sur une particule boréale située au centre de la sphère, seront respectivement :

$$-\frac{\mu(x+l\cos.\varepsilon)}{\rho^3},\quad -\frac{\mu(y+l\sin.\varepsilon)}{\rho^3},\quad \frac{\mu z}{\rho^3},$$

en faisant, pour abréger,

$$\rho^2=r^2-2xl\cos.\varepsilon-2yl\sin.\varepsilon+l^2.$$

On en déduira l'action du pôle nord, en y changeant les signes de μ et l. Nous supposerons le rayon de la sphère assez petit par rapport à l'éloignement de l'aiguille, pour qu'on puisse regarder l'action de chaque pôle comme constante dans toute son étendue, et la même pour tous ses points, que celle qui a lieu sur son centre. Il faudra alors ajouter aux composantes m, m', m'', de l'action de la terre, la somme des composantes suivant chaque axe, provenant de l'action des deux pôles; et en négligeant le cube de l, on voit que les quantités m, m', m'', comprises dans les expressions de X et Y, devront être diminuées respectivement de

$$\frac{2\mu l}{r^3}\left[\cos.\varepsilon+\frac{3(x^2\cos.\varepsilon+xy\sin.\varepsilon)}{r^2}\right],$$

$$\frac{2\mu l}{r^3}\left[\sin.\varepsilon+\frac{3(y^2\sin.\varepsilon+xy\cos.\varepsilon)}{r^2}\right],$$

$$\frac{6\mu lz(x\cos.\varepsilon+y\sin.\varepsilon)}{r^5},$$

avant de substituer ces deux forces dans tang. ε. On verra de même qu'avant de substituer les forces Z et U dans tang. φ, il faudra diminuer les quantités m, m', m'', contenues dans

leurs expressions, de

$$\frac{2\mu' l'}{r^3}\left[\cos.\lambda \sin.\varphi + \frac{3x(x\cos.\lambda\sin.\varphi + y\sin.\lambda\sin.\varphi + z\cos.\varphi)}{r^2}\right],$$

$$\frac{2\mu' l'}{r^3}\left[\sin.\lambda \sin.\varphi + \frac{3y(x\cos.\lambda\sin.\varphi + y\sin.\lambda\sin.\varphi + z\cos.\varphi)}{r^2}\right],$$

$$\frac{2\mu' l'}{r^3}\left[\cos.\varphi + \frac{3z(x\cos.\lambda\sin.\varphi + y\sin.\lambda\sin.\varphi + z\cos.\varphi)}{r^2}\right];$$

μ' étant la quantité de fluide boréal, réunie au pôle sud de l'aiguille d'inclinaison. On déterminera, comme on sait, les valeurs de μl et $\mu' l'$ que ces formules renferment, d'après les durées des oscillations des deux aiguilles, soumises à la seule action du magnétisme terrestre.

En ayant égard à ces diverses corrections, on pourra calculer avec une grande précision, les déviations d'une boussole horizontale et d'une aiguille d'inclinaison, dues à l'action d'une sphère en repos, aimantée par l'influence de la terre, pourvu que les aiguilles ne soient pas très-rapprochées de la surface de ce corps. Une seule déviation observée suffira pour déterminer la valeur de la constante k_1, relative à la matière dont il est formé, et à son degré de chaleur.

Dans le cas d'une sphère en mouvement, il suffira, comme on l'a vu plus haut, de remplacer dans toutes ces formules, m' et m'' par m_1 et m_2, que l'on regardera comme des quantités inconnues, à raison des intégrales N et N' qu'elles contiennent dans leurs expressions, et dont on déterminera, au moyen de deux déviations observées, les valeurs relatives à la matière et à la vitesse de la sphère tournante. Les valeurs de m_1 et m_2 feront connaître celles de N et N' qui répondent

à la même matière et la même vitesse; et tant que ni l'une ni l'autre ne changeront, on emploiera les mêmes valeurs de N et N', pour calculer, au moyen des formules précédentes, les déviations dues à des sphères d'un diamètre et d'une épaisseur quelconques, et dans telles positions qu'on voudra de l'aiguille aimantée. Lorsque la vitesse de rotation changera, on observera qu'en réduisant chacune des intégrales N et N' au premier terme de son développement, l'une est proportionnelle à la première puissance de cette vitesse, et l'autre à son carré (nº 22), en sorte que leurs valeurs seront connues pour une rotation quelconque, quand elles auront été déterminées pour une vitesse particulière. Mais si l'on veut conserver plusieurs termes dans les développements de N et N', il sera toujours possible de déterminer leurs coëfficients au moyen d'un pareil nombre de déviations observées, et correspondantes à des vitesses de rotation différentes. Tous ces calculs n'auront de difficulté que leur longueur; et l'on pourra leur donner une précision au moins égale à celle que l'on peut attendre des observations.

(24) Il suffira d'un exemple particulier pour montrer que l'action d'une sphère tournante, dont le fer est la matière, n'est pas la même, comme celle d'une sphère immobile, quand elle est entièrement pleine, ou qu'elle renferme un espace vide dans son intérieur. Nous choisirons pour cela l'exemple dont le calcul est le plus facile, et, dans cette vue, nous supposerons qu'on ait $\frac{b^3}{a^3}=\frac{1}{4}$. Nous ferons $k_1=1$, et nous négligerons N'. On a, dans cette hypothèse,

$$\frac{4\pi k A}{3}=m, \quad B=0;$$

et en résolvant les équations (17), on trouve

$$\frac{4\pi k}{3}A' = \frac{m'(3-p^2)+4m''p}{3+p^2},$$
$$\frac{4\pi k}{3}A'' = \frac{m''(3-p^2)-4m'p}{3+p^2},$$
$$\frac{2\pi k}{3}B' = \frac{m'p^2-m''p}{3+p^2},$$
$$\frac{2\pi k}{3}B'' = \frac{m''p^2+m'p}{3+p^2},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\frac{4\pi k}{3}N = p.$$

Au moyen de ces valeurs, les formules du n° 21 deviennent

$$X = X_1 - \frac{9a^3p}{2r^3(3+p^2)}\left[(m'p-3m'')\frac{xy}{r^2}+(m''p+3m')\frac{xz}{r^2}\right],$$
$$Y = Y_1 + \frac{3a^3p}{2r^3(3+p^2)}\left[(m'p-3m'')\left(1-\frac{3y^2}{r^2}\right)-3(m''p+3m')\frac{yz}{r^2}\right],$$
$$Z = Z_1 + \frac{3a^3p}{2r^3(3+p^2)}\left[(m''p+3m')\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)-3(m'p-3m'')\frac{yz}{r^2}\right];$$

X_1, Y_1, Z_1, étant les valeurs de X, Y, Z, qui auraient lieu dans le cas de la sphère immobile.

Maintenant supposons que la sphère soit entièrement pleine, son rayon a, la matière dont elle est formée et sa vitesse, restant les mêmes, et par conséquent aussi la quantité p. On aura toujours

$$\frac{4\pi k}{3}A = m, \quad B = 0.$$

En faisant $b=0$ dans les équations (17), et observant qu'on

suppose $k_1 = 1$ et $N' = 0$, on en déduit

$$\frac{4\pi k}{3} A' = m' + p m'', \quad \frac{4\pi k}{3} A'' = m'' - p m';$$

les formules du nº 21 deviendront donc

$$X = X_1 + \frac{3pa^3}{r^3}\left(m'' \frac{xy}{r^2} - m' \frac{xz}{r^2}\right),$$
$$Y = Y_1 - \frac{pa^3}{r^3}\left[m''\left(1 - \frac{3y^2}{r^2}\right) + 3m' \frac{yz}{r^2}\right],$$
$$Z = Z_1 + \frac{pa^3}{r^3}\left[m'\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) + 3m'' \frac{yz}{r^2}\right].$$

Or, en comparant ces valeurs de X, Y, Z, aux précédentes, on voit que les actions exercées sur un même point, par les deux sphères, formées de fer, du même diamètre, tournant avec la même vitesse, l'une pleine et l'autre creuse, seront très-différentes en grandeur et en direction, tandis qu'elles seraient égales si les deux sphères étaient en repos. Ce résultat remarquable aurait également lieu pour deux sphères creuses dont les épaisseurs différeraient sensiblement : les déviations qu'elles feraient éprouver à la même aiguille, pendant leur rotation, différeraient aussi; et c'est un point de théorie qu'il serait important de vérifier par l'observation directe.

§ IV.

Application à une plaque homogène, tournant uniformément sur elle-même.

(25) Nous supposerons l'axe de rotation vertical; les deux faces de la plaque seront planes et horizontales; nous re-

garderons ses bords comme assez éloignés des points sur lesquels elle agit, pour que leur influence mutuelle soit insensible ; et nous traiterons, en conséquence, son diamètre comme infini. La détermination de l'action des bords, surtout à cause de leurs arêtes, présente des difficultés d'analyse qui peuvent se rencontrer dans d'autres questions, et dont nous renverrons l'examen spécial à un autre Mémoire.

Nous désignerons par $2b$, l'épaisseur constante de la plaque ou la distance mutuelle de ses deux bases, et par n la vitesse angulaire, aussi constante, de son mouvement de rotation. Nous placerons l'origine des coordonnées rectangulaires que comprennent les formules générales, sur l'axe de rotation, à égale distance des deux bases ; l'axe des x positives sera vertical et dirigé de bas en haut ; le plan de x, z, coïncidera avec le méridien magnétique ; l'axe des z positives sera dirigé vers le sud, et celui des y positives, de manière que les points de la plaque, pendant leur rotation, aillent du premier au second axe. Nous appellerons r la perpendiculaire abaissée du point M de la plaque dont les coordonnées sont x, y, z, sur l'axe des x ; avant que le mouvement ait commencé, nous représenterons par u l'angle compris entre cette droite et une parallèle à l'axe des z positives ; au bout du temps quelconque t, cet angle deviendra $nt+u$ par l'effet de la rotation, et les coordonnées horizontales y et z de ce point M auront pour valeurs :

$$y = r\sin.(nt+u), \quad z = r\cos.(nt+u).$$

Soit M' un point appartenant à l'une des deux faces de la plaque ; x', y', z', ses trois coordonnées rectangulaires, et r' et u' les valeurs de r et u qui s'y rapportent. Sa distance ρ au

point quelconque M de la plaque, qui entre dans l'expression de la quantité Q (n° 16), ne dépendra pas du temps t, et la valeur de son carré sera

$$\rho^2 = (x - x')^2 + r^2 - 2rr' \cos.(u - u') + r'^2.$$

Il s'agira, d'après cela, de former l'intégrale que Q représente, et de la substituer dans l'équation (14); mais auparavant nous conviendrons, afin de simplifier les notations, de faire généralement :

$$(\xi^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos.v)^{-\frac{1}{2}} = f(\xi, r, r', \cos.v),$$

en sorte que f indique une fonction indépendante du signe de ξ, symétrique par rapport à r et r', et dont la valeur sera toujours positive.

(26) Pour tous les points des deux bases de la plaque, on aura

$$x' = \pm b, \cos.s = \pm 1, \cos.s' = 0, \cos.s'' = 0, d\omega = r'dr'du';$$

les signes supérieurs ayant lieu pour la face supérieure, et les signes inférieurs pour la face inférieure. Pour chacune de ces deux surfaces planes et indéfinies, l'intégrale double devra être prise depuis $r' = 0$ et $u' = 0$ jusqu'à $r' = \infty$ et $u' = 2\pi$; et puisque l'on fait abstraction des bords de la plaque, la valeur de Q résultant de l'équation (13) sera

$$Q = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(f[b - x, r, r', \cos.(u - u')] \left(\frac{d\varphi'}{dx'}\right) \right.$$
$$\left. - f[b + x, r, r', \cos.(u - u')] \left[\frac{d\varphi'}{dx'}\right] \right) r'dr'du',$$

en désignant par $\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\right)$ et $\left[\frac{d\varphi'}{dx'}\right]$ les valeurs de $\frac{d\varphi'}{dx'}$ dans lesquelles on fera, après les différentiations, $x'=b$ pour avoir $\frac{d\varphi'}{dx'}$, et $x'=-b$ pour obtenir $\left[\frac{d\varphi'}{dx'}\right]$.

Si l'on substitue cette valeur de Q dans l'équation (14), et que l'on différentie ensuite par rapport à x, sous les signes d'intégrations qui sont relatifs à r', u' et θ, on aura

$$\frac{d\varphi}{dx}+\int_0^t\left(\frac{dV_1}{dx}+kX-\frac{4\pi k}{3}\frac{d\varphi_1}{dx}\right)f'(t-\theta)d\theta=0; \qquad (a)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned}X=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\Big(&f^3[b-x,r,r',\cos.(u-u')](b-x)\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\right)\\&+f^3[b+x,r,r',\cos.(u-u')](b+x)\left[\frac{d\varphi'}{dx'}\right]\Big)r'dr'du':\end{aligned}\right\}(b)$$

on se souviendra que cette quantité X devra répondre à $t=\theta$, aussi bien que V_1 et φ_1. A la limite où l'on suppose l'épaisseur de la plaque infiniment petite, X conserve une valeur finie que l'on peut déterminer, comme on va le voir, sans connaître celle de la fonction φ.

(27) En ayant égard aux facteurs $b-x$ et $b+x$, compris sous le signe $\iint$, et qui sont infiniment petits dans cette hypothèse, il est évident que cette intégrale double X n'aura de valeurs finies que pour celles des variables r' et u' qui rendront infinie la fonction f, c'est-à-dire, pour des valeurs de r' et u' infiniment peu différentes de r et u. Il suffira donc d'étendre les intégrations à des valeurs de $r'-r$ et $u'-u$,

positives ou négatives, mais infiniment petites; par conséquent dans toute leur étendue, les quantités $\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\right)$ et $\left[\frac{d\varphi'}{dx'}\right]$ pourront être regardées comme constantes et égales à $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ et $\left[\frac{d\varphi}{dx}\right]$ qui répondent à $r'=r$ et $u'=u$. Ainsi nous aurons d'abord, en remettant pour la fonction f, ce qu'elle représente :

$$X=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\iint\frac{(b-x)\,r'\,dr'\,du'}{[(b-x)^2+r^2-2rr'\cos.(u'-u)+r'^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\left[\frac{d\varphi}{dx}\right]\iint\frac{(b+x)\,r'\,dr'\,du'}{[(b+x)^2+r^2-2rr'\cos.(u'-u)+r'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais maintenant les coëfficients de $dr'\,du'$ sous les signes $\iint$ étant infiniment petits dès que l'une des différences $r'-r$ ou $u'-u$ aura acquis une grandeur finie, il en résulte que sans changer les valeurs de ces intégrales, on peut y comprendre des valeurs de r' et u' qui différeront sensiblement de r et u, et rétablir, si l'on veut, leurs limites primitives $r'=0$ et $r'=\infty$, $u'=0$ et $u'=2\pi$. Cela étant, si l'on fait

$$u'=u+v,\quad du'=dv,$$

les limites relatives à v seront toujours $v=0$ et $v=2\pi$; et en désignant par ω une constante positive, qui représentera $b-x$ ou $b+x$, on trouvera par les règles ordinaires :

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{\omega r'dr'dv}{[\omega^2+r^2+r'^2-2rr'\cos.v]^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{2\pi}\frac{\omega\sqrt{\omega^2+r^2}\,dv}{\omega^2+r^2\sin.^2v}.$$

On peut réduire ces dernières limites à $v=0$ et $v=\frac{1}{2}\pi$,

pourvu que l'on quadruple le résultat de l'intégration; faisant ensuite

$$\text{tang.}\, v = z, \quad dv = \frac{dz}{1+z^2},$$

les limites relatives à la nouvelle variable seront $z=0$ et $z=\infty$, et l'on aura

$$\int_0^{2\pi} \frac{\omega\sqrt{\omega^2+r^2}\,dv}{\omega^2+r^2\sin.^2 v} = 4\int_0^{\infty} \frac{\omega\sqrt{\omega^2+r^2}\,dz}{\omega^2+(\omega^2+r^2)z^2} = 2\pi.$$

Dans l'hypothèse d'une épaisseur infiniment petite, nous aurons donc

$$X = 2\pi\left(\int\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]\right); \quad (c)$$

et au moyen de ce résultat, nous pourrons, dans la même supposition, résoudre l'équation (a) de la manière suivante.

(28) Faisons successivement, dans cette équation, $x=b$ et $x=-b$, et prenons la somme et le différence des résultats. Soit, pour abréger,

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \left[\frac{d\varphi}{dx}\right] = \psi t, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) - \left[\frac{d\varphi}{dx}\right] = \psi' t,$$

et, en outre,

$$\int_0^t \left(\left(\frac{dV_1}{dx}\right) + \left[\frac{dV_1}{dx}\right]\right) f'(t-\theta)\,d\theta = \Psi t,$$

$$\int_0^t \left(\left(\frac{dV_1}{dx}\right) - \left[\frac{dV_1}{dx}\right]\right) f'(t-\theta)\,d\theta = \Psi' t,$$

$\left(\frac{dV_1}{dx}\right)$ et $\left[\frac{dV_1}{dx}\right]$ étant les valeurs $\frac{dV_1}{dx}$ qui répondent à $x=b$

et $x = -b$; nous aurons

$$\psi t + \Psi t = -\frac{8\pi k}{3}\int_0^t \psi\theta f'(t-\theta)d\theta,$$

$$\psi' t + \Psi' t = \frac{4\pi k}{3}\int_0^t \psi'\theta f'(t-\theta)d\theta.$$

Ces deux équations sont de la même forme, et les inconnues ψt et $\psi' t$ y sont séparées; il suffira donc d'en considérer une seule; la première, par exemple, dans laquelle nous mettrons a à la place de $\frac{8\pi k}{3}$, en sorte que l'équation à résoudre sera

$$\psi t + \Psi t = -a\int_0^t \psi\theta f'(t-\theta)d\theta. \qquad (d)$$

En négligeant d'abord son second membre, on a

$$\psi t = -\Psi t.$$

Faisons ensuite

$$\psi t = -\Psi t + \delta\psi t,$$

et négligeons $\delta\psi t$ dans ce même second membre; nous aurons

$$\delta\psi t = a\int_0^t \Psi\theta f'(t-\theta)d\theta.$$

Soit encore

$$\delta\psi t = a\int_0^t \Psi\theta f'(t-\theta)d\theta + \delta_1\psi t;$$

en substituant la valeur correspondante de ψt dans le premier membre de l'équation (d), et négligeant $\delta_1\psi t$ dans son second membre, on en conclura

$$\delta_1 \psi t = -a^2 \int_0^t \left(\int_0^\theta \Psi t' f'(t-\theta) dt' \right) f'(t-\theta) d\theta.$$

Si l'on ajoute un nouveau terme $\delta_2 \psi t$ à cette valeur approchée de $\delta_1 \psi t$, et que l'on forme la valeur approchée de $\delta_2 \psi t$, en négligeant cette quantité dans le second membre de l'équation (d), on trouvera

$$\delta_2 \psi t = a^3 \int_0^t \left(\int_0^\theta \left(\int_0^{t'} \Psi t'' f'(t'-t'') \mathrm{d}t'' \right) f'(\theta - t') dt' \right) f'(t-\theta) d\theta.$$

En continuant ainsi, et prenant la somme des valeurs approchées de ψt, $\delta \psi t$, $\delta_1 \psi t$, $\delta_2 \psi t$, etc., on aura en série infinie la valeur de ψt qui satisfait à l'équation (d), savoir :

$$\left.\begin{aligned} \psi t = -\Psi t + a \int_0^t \Psi \theta f'(t-\theta) d\theta - a^2 \int_0^t \left(\int_0^\theta \Psi t' f'(\theta - t') dt' \right) f'(t-\theta) d\theta \\ + a^3 \int_0^t \left(\int_0^\theta \left(\int_0^{t'} \Psi t'' f'(t'-t'') dt'' \right) f'(\theta - t') dt' \right) f'(t-\theta) d\theta - \text{etc.} \end{aligned}\right\} (e)$$

On en déduira la valeur de $\psi' t$, en y changeant Ψ en Ψ', et mettant $-\frac{4\pi k}{3}$ à la place de a.

Les valeurs de ψt et $\psi' t$ subsisteront dès que le mouvement de la plaque aura commencé, et pour des valeurs de t aussi petites qu'on voudra. Dans les premiers moments de sa rotation, la plaque acquerra un degré d'aimantation sensible, qui variera très-rapidement en même temps que la fonction ft. La durée de cet état initial sera très-courte (nº 9); et pendant cet intervalle de temps, nous regarderons comme insensibles, les vitesses communiquées par la plaque aux

points extérieurs sur lesquels elle agit, ainsi que les déplacements qu'elle leur fait éprouver. C'est pourquoi nous ferons abstraction, comme dans le cas d'une sphère tournante (n° 20), de tout ce qui se passe dans les premiers instants du mouvement ; et nous allons chercher ce que devient la formule précédente, pour une valeur sensible de t qui rend ft constante, et par conséquent $f't$ nulle.

(29) Désignons à cette époque par Πt la valeur donnée de Ψt. Puisque la variable t a acquis une grandeur sensible, il faudra ne donner à θ, dans le second terme de la formule (e), que de pareilles valeurs, telles que $t-\theta$ soit insensible, sans quoi le facteur $f'(t-\theta)$ serait insensible ou nul. On y mettra donc $\Pi\theta$ à la place de $\Psi\theta$; alors cette fonction ne variant plus très-rapidement, on pourra la développer suivant les puissances de $t-\theta$, ce qui donnera

$$\Psi\theta = \Pi t - (t-\theta)\frac{d\Pi t}{dt} + \frac{1}{2}(t-\theta)^2\frac{d^2\Pi t}{dt^2} - \text{etc.}$$

A cause que $f(t-\theta)$ est nulle à la limite $\theta = t$, on aura

$$\int_0^t f'(t-\theta)\,d\theta = q;$$

q étant la valeur constante de ft, relative à la matière et à la température de la plaque. Les intégrales $\int_0^t (t-\theta)f'(t-\theta)\,d\theta$, $\int_0^t (t-\theta)^2 f'(t-\theta)\,d\theta$, etc., auront aussi des valeurs indépendantes de t, et les mêmes que si on les prenait depuis $t-\theta=\infty$ jusqu'à $t-\theta=0$. Si donc on fait $t-\theta=x$,

$d\theta = -dx$, et généralement

$$\frac{1}{1.2.3\ldots i}\int_0^\infty x^i f'x\,dx = q_i,$$

i étant un nombre entier quelconque, on aura

$$\int_0^t \Psi\theta f'(t-\theta)\,d\theta = q\,\Pi t - q_1\frac{d\Pi t}{dt} + q_2\frac{d^2\Pi t}{dt^2} - \text{etc.}$$

Par conséquent le second terme de la série (e) sera

$$a\nabla\Pi t,$$

en faisant, pour abréger,

$$q\,\Pi t - q_1\frac{d\Pi t}{dt^2} + q_2\frac{d^2\Pi t}{dt^2} - q_3\frac{d^3\Pi t}{dt^3} + \text{etc.} = \nabla\Pi t.$$

Si l'on passe actuellement au troisième terme de cette série, on voit d'abord que t ayant une valeur sensible, il faut qu'il en soit de même à l'égard de θ, pour que $f'(t-\theta)$ ne soit pas nulle, et par suite à l'égard de t', afin que $f'(\theta-t')$ ne s'évanouisse pas. On aura donc, d'après l'équation que l'on vient de trouver,

$$\int_0^\theta \Psi t' f'(\theta-t')\,dt' = \nabla\Pi\theta;$$

et si l'on convient de désigner par $\nabla^2\Pi t$, ce que devient $\nabla\Pi t$ quand on y met $\nabla\Pi t$ à la place de Πt, on en conclura

$$\int_0^t\left(\int_0^\theta \Psi t' f'(\theta-t')\,dt'\right)f'(t-\theta)\,d\theta = \nabla^2\Pi t;$$

et, par conséquent,

$$-a^2\nabla^2\Pi t,$$

pour le troisième terme de la série (e).

Examinons encore le quatrième terme de cette série. Il faudra que θ ne reçoive que des valeurs sensibles et très-peu différentes de t; il en sera de même à l'égard de t' par rapport à θ, et ensuite, à l'égard de t'' par rapport à t'. On aura donc successivement :

$$\int_0^{t'} \Psi t'' f'(t'-t'')dt'' = \nabla\Pi t',$$

$$\int_0^{\theta}\left(\int_0^{t'} \Psi t'' f'(t'-t'')dt''\right)f'(\theta-t')dt' = \nabla^2\Pi\theta,$$

$$\int_0^{t}\left(\int_0^{\theta}\left(\int_0^{t'} \Psi t'' f'(t'-t'')dt''\right)f'(\theta-t')dt'\right)f'(t-\theta)d\theta = \nabla^3\Pi t;$$

et le quatrième terme de la série (e) sera

$$a^3\nabla^3\Pi t,$$

en convenant de représenter par $\nabla^3\Pi t$, ce que devient $\nabla^2\Pi t$, lorsqu'on y remplace Πt par $\nabla\Pi t$, ou $\nabla\Pi t$, quand on y met $\nabla^2\Pi t$ au lieu de cette même fonction Πt.

Sans aller plus loin, nous voyons que pour des valeurs sensibles de t, l'équation (e) prendra la forme :

$$\psi t = -\Pi t + a\nabla\Pi t - a^2\nabla^2\Pi t + a^3\nabla^3\Pi t - \text{etc.}$$

Quant à la fonction Πt qu'elle renferme, elle se déduira de Ψt en y supposant que t ait acquis une grandeur sensible. Or, si l'on développe V_1 suivant les puissances de $t-\theta$,

ce qui donne

$$V_1 = V - (t-\theta)\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}(t-\theta)^2\frac{d^2V}{dt^2} - \text{etc.},$$

et que l'on représente par Ft la somme des valeurs de $\frac{dV}{dx}$ qui répondent à $x=b$ et $x=-b$, on en conclura

$$\Pi t = \int_0^t \left(\left(\frac{dV_1}{dx}\right) + \left[\frac{dV_1}{dx}\right]\right) f'(t-\theta)\,dt = \nabla F t.$$

La formule précédente se changera donc en celle-ci :

$$\psi t = -\nabla F t + a\nabla^2 F t - a^2\nabla^3 F t + a^3\nabla^4 F t - \text{etc.},$$

dont on ne devra toutefois faire usage que quand elle formera une série convergente.

(30) Nous pouvons ordonner ses termes suivant les différentielles croissantes de Ft. En effet, nous avons d'abord

$$\nabla F t = qFt - q_1\frac{dFt}{dt} + q_2\frac{d^2Ft}{dt^2} - q_3\frac{d^3Ft}{dt^3} + q_4\frac{d^4Ft}{dt^4} - \text{etc.};$$

en mettant ∇Ft à la place de Ft, il vient

$$\nabla^2 Ft = q^2 Ft - 2q_1 q\frac{dFt}{dt} + (2q_2 q + q_1^2)\frac{d^2Ft}{dt^2} - (2q_3 q + 2q_2 q_1)\frac{d^3Ft}{dt^3}$$
$$+ (2q_4 q + 2q_3 q_1 + q_2^2)\frac{d^4Ft}{dt^3} - \text{etc.};$$

par la même substitution, on obtient

$$\nabla^3 Ft = q^3 Ft - 3q_1 q^2\frac{dFt}{dt} + (3q_2 q^2 + q_1^2 q)\frac{d^2Ft}{dt^2} - (3q_3 q^2 + 6q_2 q_1 q + q_1^3)\frac{d^3Ft}{dt^3}$$
$$+ (3q_4 q^2 + 6q_3 q_1 q + 3q_2^2 q)\frac{d^4Ft}{dt^4} - \text{etc.};$$

et ainsi de suite. La loi de formation des quantités $\nabla \mathrm{F}t$, $\nabla^2 \mathrm{F}t$, $\nabla^3 \mathrm{F}t$, etc., n'est pas difficile à saisir : le coëfficient de $\frac{d^i \mathrm{F}t}{dt^i}$ dans $\nabla^{i'} \mathrm{F}t$ se compose de tous les produits de i' facteurs q, q_2, q_2, q_3, etc., dans lesquels la somme des indices inférieurs est égale à i ; chaque produit étant répété autant de fois que ses facteurs peuvent subir de permutations différentes. Ainsi, par exemple, le coëfficient de $\frac{d^4 \mathrm{F}t}{dt^4}$ dans $\nabla^3 \mathrm{F}t$ se compose de tous les produits de trois facteurs dans lesquels la somme des indices est égale à quatre : le produit $q_3 q_1 q$ s'y trouve répété six fois, parce que ses facteurs inégaux peuvent subir six permutations différentes ; et le produit $q_4 q^2$ n'y entre que trois fois, parce que ses facteurs ne sont susceptibles que de ce nombre de permutations différentes, à cause de l'égalité de deux d'entre eux. Or, en substituant les valeurs de ces quantités $\nabla \mathrm{F}t$, $\nabla^2 \mathrm{F}t$, etc., dans l'expression de ψt, on trouve

$$\psi t = -\frac{1}{1+aq}\left(q \mathrm{F}t - h_1 \frac{d\mathrm{F}t}{dt} + h_2 \frac{d^2 \mathrm{F}t}{dt^2} - h_3 \frac{d^3 \mathrm{F}t}{dt^3} + \text{etc.}\right), (f)$$

où l'on a fait, pour abréger :

$$\frac{q_1}{1+aq} = h_1,$$

$$\frac{q^2}{1+aq} - \frac{aq_1^2}{(1+aq)^2} = h_2,$$

$$\frac{q_8}{1+aq} - \frac{2aq_2 q_1}{(1+aq)^2} + \frac{a^2 q_1^3}{(1+aq)^3} = h_3,$$

$$\frac{q_4}{1+aq} - \frac{a(2q_3 q_1 + q_2^2)}{(1+aq)^2} + \frac{3a^2 q_2 q_1^2}{(1+aq)^3} - \frac{a^3 q_1^4}{(1+aq)^4} = h_4,$$

etc. ;

et la loi de formation de ces coëfficients h_1, h_2, h_3, etc., est

facile à déduire de celle des quantités $\nabla \mathrm{F}t$, $\nabla^2 \mathrm{F}t$, $\nabla^3 \mathrm{F}t$, etc., que nous venons d'indiquer.

Les expressions numériques de ces coëfficients dépendent de l'unité de temps que l'on choisit; mais en faisant attention aux intégrales que q_1, q_2, q_3, etc., représentent, il est aisé de voir que si l'on multiplie h_1, h_2, h_3, etc., par les puissances d'une vitesse angulaire, marquées par leurs indices respectifs, les produits seront des nombres abstraits, indépendants de toute unité particulière. Par les différentiations de la fonction $\mathrm{F}t$, les termes de la série (f) acquièrent effectivement pour facteurs, ces puissances de la vitesse n de la plaque. Cette série sera donc d'autant plus convergente que les nombres nh_1, $n^2 h_2$, $n^3 h_3$, etc., décroîtront plus rapidement. Les expériences que l'on a faites sur les plaques de cuivre, montrent que leurs principaux effets magnétiques ne dépendent que des deux ou trois premières puissances de la vitesse, lors même que la plaque tourne avec une très-grande rapidité; cela indique que dans cette matière, les nombres dont il est question sont très-décroissants : il est naturel de penser que la même chose a lieu dans les autres substances, qui ne deviennent magnétiques comme le cuivre, que sous l'influence de forces variables; lors donc que la plaque tournante sera formée de ces sortes de matières, nous admettrons la convergence de la série (f), du moins pour des vitesses du même ordre que celles dont les physiciens ont fait usage dans leurs expériences.

Mais s'il s'agit d'une plaque de fer, et qu'on fasse $a = -\frac{4\pi k}{3}$, pour que la série (f) exprime $\psi' t$ (nº 28), la quantité $1 + aq$ deviendra $1 - k_1$, k_1 étant la même constante que dans le

n° 21, laquelle est à très-peu près égale à l'unité; cette quantité $1 + aq$ sera donc presque nulle, ce qui rendra la série (f) divergente. On ne devra donc plus s'en servir; et pour appliquer nos formules générales à une plaque de fer, il faudra résoudre l'équation (d) d'une autre manière. C'est ce que nous pourrons faire dans une autre occasion; mais maintenant il ne sera plus question que de plaques de cuivre, ou de matières analogues, tournant avec des vitesses qui ne rendent pas la série (f) divergente.

(31) Lorsque les forces extérieures qui produisent l'aimantation de la plaque sont constantes, la fonction Ft l'est aussi, et la série (f) se réduit à son premier terme. C'est donc de ce terme que dépendent les effets magnétiques des plaques aimantées par l'influence de forces invariables; par conséquent on pourra le supprimer comme étant insensible dans les substances que nous voulons considérer, et réduire en même temps la quantité $1 + aq$ à l'unité dans les équations précédentes. Cela étant, faisons

$$\frac{4\pi k}{3} q_1 = p,$$

et généralement

$$\frac{4\pi k}{3} q_{i+1} = p_i;$$

multiplions les équations précédentes par $\frac{4\pi k}{3}$, puis mettons-y successivement à la place de a ses valeurs $\frac{8\pi k}{3}$ et $-\frac{4\pi k}{3}$ qui répondent à ψt et $\psi' t$; soit dans le premier cas:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 - 2p^2 = pg_1, \\ p_2 - 4p_1 p + 4p^3 = pg_2, \\ p_3 - 4p_2 p - 2p_1^2 + 12 p_1 p^2 - 8p^4 = pg_3, \end{array}\right\} (g)$$

etc.;

et dans le second :

$$\left.\begin{array}{l} p_1+p^2=pg'_1, \\ p_2+2p_1p+p^3=pg'_2, \\ p_3+2p_2p+p_1^2+3p_1p^2+p^4=pg'_3, \\ \quad\text{etc.}; \end{array}\right\} (h)$$

on conclura de l'équation (f) :

$$\psi t=\frac{3p}{4\pi k}\left(\frac{d\mathrm{F}t}{dt}-g_1\frac{d^2\mathrm{F}t}{dt^2}+g_2\frac{d^3\mathrm{F}t}{dt^3}-g_3\frac{d^4\mathrm{F}t}{dt^4}+\text{etc.}\right),$$

$$\psi' t=\frac{3p}{4\pi k}\left(\frac{d\mathrm{F}'t}{dt}-g'_1\frac{d^2\mathrm{F}'t}{dt^2}+g'_2\frac{d^3\mathrm{F}'t}{dt^3}-g'_3\frac{d^4\mathrm{F}'t}{dt^4}+\text{etc.}\right),$$

en supposant qu'on ait

$$\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)+\left[\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right]=\mathrm{F}t,\quad \left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)-\left[\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right]=\mathrm{F}'t,$$

et désignant toujours par $\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)$ et $\left[\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right]$, les valeurs de $\frac{d\mathrm{V}}{dx}$ qui répondent à $x=b$ et $x=-b$.

Si les coëfficients $1, g_1, g_2, g_3$, etc., et $1, g'_1, g'_2, g'_3$, etc., forment deux progressions géométriques, et que l'on représente le rapport d'un terme à celui qui le précède, par g dans la première progression et par g' dans la seconde, les valeurs de ψt et $\psi' t$ seront la même chose que :

$$\left.\begin{array}{l} \psi t=\frac{3p}{4\pi k}\int_0^\infty \frac{d\mathrm{F}(t-gz)}{dt}e^{-z}dz, \\ \psi' t=\frac{3p}{4\pi k}\int_0^\infty \frac{d\mathrm{F}'(t-g'z)}{dt}e^{-z}dz; \end{array}\right\} (i)$$

e désignant la base de logarithmes népériens : c'est ce qu'on vérifiera sans peine, soit par des intégrations par parties, soit en développant suivant les puissances de g et g', et effectuant ensuite les intégrations relatives à z. Mais quelles que soient les quantités g_1, g_2, etc., g'_1, g'_2, etc., nous pourrons toujours employer ces formules pour exprimer d'une manière simple, les valeurs de ψt et $\psi' t$, pourvu que l'on convienne de remplacer dans leurs développements selon les puissances de g et g', les puissances quelconques g^n et g'^n, par g_n et g'_n, c'est-à-dire, les exposants des indéterminées g et g' par des indices inférieurs qui leur soient égaux. Ces expressions seront surtout utiles, pour faciliter les intégrations dans lesquelles ψt et $\psi' t$ se trouveront engagées, lorsqu'elles pourront s'effectuer sans donner des valeurs particulières à g et g'; ce qui permettra de ne développer les résultats suivant les puissances de g et g', et de n'y remplacer les exposants par des indices inférieurs, qu'après ces intégrations.

(32) Ces valeurs de ψt et $\psi' t$ et l'équation (c) dont elles dérivent, ne seront exactes qu'à la limite où l'épaisseur de la plaque serait infiniment petite : dans la réalité, cette épaisseur ne pourra être que très-petite, et ces valeurs ne seront qu'approchées. Si l'on en veut calculer de plus exactes, on ajoutera aux formules (i), de nouveaux termes $\psi_1 t$ et $\psi_1' t$; puis on substituera dans l'équation (b), les valeurs de $\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\right)$ et $\left[\frac{d\varphi'}{dx'}\right]$ qui en résulteront. La partie de X qui répondra à ces nouveaux termes, pourra se calculer dans l'hypothèse d'une épaisseur infiniment petite ; on la trouvera, par l'analyse du nº 27, égale à $2\pi\psi_1 t$; et la seconde valeur appro-

chée de X, sera de la forme :

$$X = 2\pi\psi' t + X_1,$$

X_1 étant une quantité connue. Au moyen de cette valeur et de l'équation (a), on déterminera les inconnues $\psi_1 t$ et $\psi_1' t$; d'où l'on conclura une troisième valeur approchée de X, et ensuite de nouveaux termes $\psi_2 t$ et $\psi_2' t$ à ajouter aux formules (i). En continuant ainsi, on obtiendra, par la méthode des approximations successives, des valeurs de ψt et $\psi' t$, exprimées par des séries dont les premiers termes seront les formules (i), et les autres auront pour facteurs, les puissances b, b^2, b^3, etc., indépendamment de la quantité b que renfermeront Ft et $F't$, c'est-à-dire, par des séries telles que

$$\psi t = A + bA_1 + b^2 A_2 + b^3 A_3 + \text{etc.},$$
$$\psi' t = A' + bA_1' + b^2 A_2' + b^3 A_3' + \text{etc.};$$

A, A_1, A_2, etc., A', A_1', A_2', etc., étant des quantités connues qui renfermeront la demi-épaisseur b, provenant des valeurs données de $F't$ et Ft.

Les premiers termes A et A' sont les seconds membres des équations (i). J'ai aussi formé les seconds termes bA_1 et bA_1'; mais je n'en donne point ici les expressions à cause de leur complication, et de la longueur des calculs qu'il faudrait faire pour les réduire en nombres dans chaque cas particulier. Il convient toutefois d'observer que le coëfficient A_1' s'évanouit comme A', quand $b = 0$, en sorte qu'en s'en tenant au premier terme de la valeur de $\psi' t$, la partie négligée a b^2 pour facteur, tandis qu'en s'arrêtant au premier terme de la valeur de ψt, la partie négligée a seulement pour facteur la première puissance de l'épaisseur.

(33) Supposons maintenant qu'il s'agisse de déterminer l'action de la plaque tournante que nous considérons, sur un système de particules magnétiques, situées en dehors et données de position. Soit U la somme de ces particules, positives ou négatives, divisées par leurs distances respectives au point de la plaque dont les coordonnées sont x, y, z, ou qui répond aux trois variables x, r et u. Cette quantité U ne serait autre chose que la fonction V, si ces particules étaient les centres des forces extérieures qui ont produit l'aimantation de la plaque, et qu'il fût question de calculer la réaction qu'elles en éprouvent. Dans tous les cas, U sera une fonction donnée de x, r et u; et nous représenterons par U_1 et U_2, ses valeurs relatives à $x=b$ et $x=-b$, ou aux deux faces de la plaque. D'après ce qu'on a vu précédemment (nº 26), la quantité Q donnée par l'équation (13), et relative aux points extérieurs, aura pour expression :

$$Q = k\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(U_1 \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) - U_2 \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]\right) r\,dr\,du,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$Q = \frac{k}{2}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} (U_1 + U_2)\psi' t\, r\,dr\,du + \frac{k}{2}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} (U_1 - U_2)\, \psi t\, r\,dr\,du.$$

Comme la différence $U_1 - U_2$ s'évanouit avec b, il en résulte qu'en substituant dans cette formule, les valeurs de ψt et $\psi' t$ auxquelles nous nous sommes arrêtés et qui sont données par les équations (i), la partie négligée dans chacune des deux intégrales dont elle se compose, aura pour facteur le carré de b. La substitution faite, on aura

$$Q=\frac{3p}{8\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\left[(U_1+U_2)\frac{dF'(t-g'z)}{dt}\right. \qquad (k)$$
$$\left.+(U_1-U_2)\frac{dF(t-gz)}{dt}\right]e^{-z}dzdrdu.$$

Si h, h', h'', sont les trois coordonnées parallèles aux axes des x, y, z, de l'un des points extérieurs, les trois composantes parallèles aux mêmes axes, de l'action de la plaque sur ce point, seront, d'après les équations (3) :

$$-\frac{dQ}{dh},\quad -\frac{dQ}{dh'},\quad -\frac{dQ}{dh''},$$

en ne faisant varier, suivant la remarque du n° 17, que les h, h', h'', qui entreront dans U_1 et U_2. Soit l la perpendiculaire abaissée du même point sur l'axe des x, et ψ l'angle compris entre le plan de ces deux droites et celui des x, z, de sorte qu'on ait

$$h'=l\sin.\psi,\quad h''=l\cos.\psi.$$

Si l'on remplace ces coordonnées horizontales h' et h'', par les variables l et ψ, on aura

$$\frac{dQ}{dl}=\frac{h'}{l}\frac{dQ}{dh'}+\frac{h''}{l}\frac{dQ}{dh''},\qquad \frac{dQ}{d\psi}=h''\frac{dQ}{dh'}-h'\frac{dQ}{dh''};$$

d'où l'on peut conclure que les composantes horizontales seront aussi

$$-\frac{dQ}{dl},\quad -\frac{dQ}{ld\psi};$$

la première tendant à augmenter la distance l, et la seconde l'angle ψ. Le moment de l'action de la plaque sur le même point, rapporté à son axe de rotation, sera $-\frac{dQ}{d\psi}$.

On ne pourra faire usage de ces formules, que quand la plaque sera formée de cuivre, ou de toute autre matière très-peu susceptible d'aimantation sous l'influence de forces constantes; que son épaisseur sera très-petite, soit par rapport à son diamètre, soit relativement aux distances à son plan, des centres de forces extérieures et des points sur lesquels elle réagit; et qu'enfin, ces différents points seront assez éloignés des bords de la plaque, pour que l'influence des bords soit insensible.

§. III.

Action d'une plaque tournante sur une aiguille parallèle.

(34) Supposons qu'on ait placé au-dessus de la plaque que nous venons de considérer, une aiguille horizontale aimantée de manière que la distribution des deux fluides y soit permanente, et ne puisse être changée par l'action résultante de la rotation de la plaque. Nous regarderons le fluide libre comme concentré à chacun de ses pôles; supposition qui n'est pas rigoureusement exacte, mais dont on diminuera l'erreur en prenant, pour chaque pôle, le centre d'inertie de la portion de fluide que l'on y réunit. En calculant dans cette hypothèse l'action et la réaction de l'aiguille et de la plaque, l'erreur que l'on commettra sera du même ordre de grandeur que le carré de la petite portion d'aiguille sur laquelle s'étend le fluide libre, divisé par le carré de sa distance à la plaque; ainsi pour l'exactitude des calculs, il faudra que cette distance soit toujours très-grande, eu égard à celle de chaque pôle à l'extrémité correspondante de l'aiguille. Nous supposerons aussi les deux pôles également éloignés

du point de suspension de l'aiguille, et ce point situé dans le prolongement de l'axe de rotation de la plaque, ce qui rendra possibles sous forme finie, les intégrations relatives à r et u, indiquées dans les formules dont nous allons faire l'application.

Cela posé, les axes des coordonnées étant les mêmes que précédemment, désignons par h la hauteur de l'aiguille au-dessus du plan des y, z; par l la distance de chacun de ses pôles à son point de suspension, ou à peu près sa demi-longueur; par μ la quantité de fluide boréal réunie à son pôle sud, et conséquemment par $-\mu$ la quantité de fluide austral concentrée à son pôle nord; par ψ l'angle compris au bout du temps t, entre la partie de l'aiguille qui aboutit au premier pôle, et une droite menée par son point de suspension suivant la direction des z positives; par conséquent, par $\psi+\pi$ l'angle compris au même instant, entre cette droite et la partie de l'aiguille qui aboutit au pôle nord. Le carré de la distance du pôle sud au point M de la plaque qui répond aux coordonnées x, r et u, aura pour expression :

$$(h-x)^2+l^2-2rl\cos.(nt+u-\psi)+r^2;$$

le carré de la distance du pôle nord au même point, s'en déduira en y mettant $\psi+\pi$ à la place de ψ; si donc nous conservons la notation du nº 25, et que nous fassions,

$$nt+u-\psi=v,$$

la fonction V relative à ces deux centres de forces sera

$$V=\mu f(h-x,r,l,\cos.v)-\mu f(h-x,r,l,-\cos.v).$$

Les points de la plaque seront, en outre, soumis à l'in-

fluence du magnétisme terrestre; mais nous ferons abstraction des termes de V qui en résulteraient, parce qu'ils disparaîtraient, comme il est aisé de s'en assurer, dans les différences partielles de la quantité Q, d'où dépend l'action extérieure de la plaque; ce qui tient à ce que nous avons supposé son diamètre infini, et n'aurait plus lieu si l'on voulait avoir égard à l'influence de ses bords. Nous supposerons qu'aucune autre force n'agisse sur la plaque, et qu'il soit question de déterminer sa réaction sur les deux pôles de l'aiguille, auquel cas les deux fonctions U et V auront la même valeur.

(35) Désignons encore par λ^2 le moment d'inertie de l'aiguille, rapporté à l'axe vertical passant par son point de suspension. Lorsqu'elle ne sera soumise qu'à l'action de la terre, on aura

$$\lambda^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} = -2m\mu l \sin.\psi,$$

pour l'équation de son mouvement horizontal; m étant une constante positive, telle que le produit $m\mu$ soit, abstraction faite du signe, la composante horizontale de cette action sur chacun des deux pôles. En appelant θ la durée de chacune des petites oscillations de l'aiguille, de part et d'autre du méridien magnétique, on en conclura, d'après la théorie ordinaire du pendule,

$$2m\mu = \frac{\pi^2 \lambda^2}{l\theta^2}.$$

La valeur de θ fera donc seulement connaître le produit $m\mu$; la valeur de μ se déduira de la déviation que l'aiguille horizontale ferait éprouver à une autre aiguille, située dans son voisinage et soumise à l'action de la terre.

Imaginons, par exemple, qu'on ait une aiguille d'inclinaison, située dans le plan du méridien magnétique; plaçons au-dessous et dans le même plan, l'aiguille horizontale que nous considérons; supposons que par son action opposée à celle de la terre, elle ramène l'aiguille d'inclinaison à la direction verticale, et qu'alors les deux pôles de celle-ci, et le pôle sud de l'aiguille horizontale, soient dans une même droite verticale. Appelons l_1 la distance de chaque pôle de l'aiguille d'inclinaison à son point de suspension, et c_1 la distance de son pôle inférieur au pôle contraire, ou au pôle sud de l'aiguille horizontale : on formera aisément l'équation d'équilibre de l'autre aiguille dans sa direction verticale; quelle que soit son intensité magnétique, on trouvera

$$2ml_1 = \mu(c_1 + l_2)\left(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{(c_1+2l_1)^2} - \frac{1}{c_1^2+4l^2} + \frac{1}{(c_1+2l_1)^2+4l^2}\right).$$

On tirera de là

$$\mu = 2mc^2;$$

c étant une ligne d'une longueur connue: par conséquent on aura

$$\mu^2 = \frac{\pi^2\lambda^2 c^2}{l\theta^2}.$$

Dans chaque cas particulier, les constantes b, n, h, l, λ, c et θ devront être données en nombres; et il s'agira de calculer tous les effets produits sur l'aiguille horizontale par la réaction de la plaque tournante, en employant, toutefois, la grandeur observée d'un ou plusieurs de ces effets, pour déterminer les valeurs des quantités p, p_1, p_2, etc. (n° 31), relatives à la matière et à la température de la plaque, dont ils dépendront.

(36) Si l'on appelle P l'action verticale de la plaque sur les deux pôles de l'aiguille, qui ont, dans ce sens, la même ordonnée h, on aura

$$P = -\frac{dQ}{dh}.$$

Ce sera la diminution ou l'augmentation apparente du poids de l'aiguille, selon que cette valeur de P sera positive ou négative.

De même, en désignant par Ψ la somme des moments des forces provenant de l'action de la plaque, qui tendent à faire tourner l'aiguille autour de l'axe vertical mené par son point de suspension, et à augmenter l'angle ψ, nous aurons

$$\Psi = -\frac{dQ}{d\psi}.$$

Par conséquent l'équation complète de son mouvement horizontal, sera

$$\lambda^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} = -2m\mu . l \sin. \psi + \Psi. \qquad (l)$$

Il s'agira donc de former les valeurs de P et Ψ d'après celle de Q qui est donnée par l'équation (k); et comme on ne doit différentier que par rapport aux variables h et ψ qui sont comprises dans U_1 et U_2 on aura

$$\left.\begin{aligned} P = \frac{-3p}{8\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\Big[\Big(\frac{dU_1}{dh}+\frac{dU_2}{dh}\Big)F'(t-g'z) \\ + \Big(\frac{dU_1}{dh}-\frac{dU_2}{dh}\Big)F(t-gz)\Big]rdrdu\Big)e^{-z}dz, \\ \Psi = \frac{-3pd.}{8\pi\, dt}\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\Big[\Big(\frac{dU_1}{d\psi}+\frac{dU_2}{d\psi}\Big)F'(t-g'z) \\ + \Big(\frac{dU_1}{d\psi}-\frac{dU_2}{d\psi}\Big)F(t-gz)\Big]rdrdu\Big)e^{-z}dz. \end{aligned}\right\} (m)$$

Quoique nous ayons fait passer en dehors des signes $\int$, la différentiation relative à t, il faudra, cependant, ne pas faire varier le temps qui entre dans U_1 et U_2; c'est pourquoi, nous le désignerons par t', avant cette différentiation, de sorte que U_1 et U_2 seront les valeurs de V qui répondent à $x=b$ et $x=-b$, et l'une et l'autre à $t=t'$.

D'après ce que représentent Ft et $F't$ (n° 31), nous aurons

$$\frac{dU_1}{dh}+\frac{dU_2}{dh}=-Ft',\quad \frac{dU_1}{dh}-\frac{dU_2}{dh}=-F't'.$$

En faisant usage de la valeur de V, il vient

$$\begin{aligned}
Ft&=\mu(h-b)[f^3(h-b,r,l,\cos.v)-f^3(h-b,r,l,-\cos.v)]\\
&\quad+\mu(h+b)[f^3(h+b,r,l,\cos.v)-f^3(h+b,r,l,-\cos.v)],\\
F't&=\mu(h-b)[f^3(h-b,r,l,\cos.v)-f^3(h-b,r,l,-\cos.v)]\\
&\quad-\mu(h+b)[f^3(h+b,r,l,\cos.v)-f^3(h+b,r,l,-\cos.v)],\\
\frac{dU_1}{d\psi}&=\mu rl\sin.v'[f^3(h-b,r,l,\cos v')+f^3(h-b,r,l,-\cos.v')],\\
\frac{dU_2}{d\psi}&=\mu rl\sin.v'[f^3(h+b,r,l,\cos.v')+f^3(h+b,r,l,-\cos.v')];
\end{aligned}$$

v' étant ce que devient l'angle v quand on y change t en t'. Au moyen de ces différentes valeurs, on peut effectuer les intégrations relatives à r et u qui sont indiquées dans les équations (m).

(37) Pour cela, soit généralement

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{kk'rdrdu}{[(k^2+l^2+r^2-2rl\cos.(u+\omega))(k'^2+l^2+r^2-2rl\cos.(u+\omega'))]^{\frac{3}{2}}}=\varphi(k,k'),$$

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{klr^2\sin.(u+\omega')drdu}{[(k^2+l^2+r^2-2rl\cos.(u+\omega))(k'^2+l^2+r^2-2rl\cos.(u+\omega'))]^{\frac{3}{2}}}=\varphi'(k,k');$$

k, k', l, ω et ω' étant des quantités indépendantes de r et u. En prenant $h-b$ et $h+b$ pour k et k', et des valeurs convenables pour les angles ω et ω', l'intégrale relative à r et u comprise dans la première équation (m), se composera de parties telles que :

$$\varphi(k,k)-\varphi(k',k'), \quad \varphi(k,k')-\varphi(k',k),$$

et celle que renferme la seconde équation (m), de parties telles que :

$$\varphi'(k,k)-\varphi'(k',k'), \quad \varphi'(k,k')-\varphi'(k',k).$$

Faisons d'abord

$$u+\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')=u', \quad du=du';$$

nous aurons

$$\cos.(u+\omega)=\cos.u'\cos.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')-\sin.u'\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'),$$
$$\cos.(u+\omega')=\cos.u'\cos.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')+\sin.u'\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega');$$

et les limites relatives à u' seront toujours $u'=0$ et $u'=2\pi$. Soit ensuite

$$r\sin.u'=y, \quad r\cos.u'=y',$$

et, pour abréger,

$$l\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')=\alpha, \quad l\cos.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')=\alpha';$$

nous aurons en même temps

$$rdrdu'=dy\,dy';$$

les limites relatives aux nouvelles variables y et y' seront $\pm\infty$, et il en résultera

$$\varphi(k,k')=\int_{\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kk'\,dy\,dy'}{[(k^2+l^2+y^2+y'^2+2y\alpha-2y'\alpha')(k'^2+l^2+y^2+y'^2-2y\alpha-2y'\alpha')]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\varphi'(k,k')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k(y\alpha'-y'\alpha)\,dy\,dy'}{[(k^2+l^2+y^2+y'^2+2y\alpha-2y'\alpha')(k'^2+l^2+y^2+y'^2-2y\alpha-2y'\alpha')]^{\frac{3}{2}}}.$$

Mettons $y'+\alpha'$ à la place de y'; les limites relatives à y' ne changeront pas, et nous aurons plus simplement

$$\varphi(k,k')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kk'\,dy\,dy'}{[(k^2+\alpha^2+y^2+y'^2+2y\alpha)(k'^2+\alpha^2+y^2+y'^2-2y\alpha)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\varphi'(k,k')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\alpha'(y-\alpha)\,dy\,dy'}{[(k^2+\alpha^2+y^2+y'^2+2y\alpha)(k'^2+\alpha^2+y^2+y'^2-2y\alpha)]^{\frac{3}{2}}}:$$

on a supprimé la partie de la seconde intégrale qui contiendrait la première puissance de y' et dont les éléments seraient, deux à deux, égaux et de signes contraires entre les limites $y'=\pm\infty$.

D'après l'expression de $\varphi(k,k')$, on voit que la partie de cette intégrale qui répond aux y négatives, sera la même que la partie de $\varphi(k',k)$ relative aux y positives, et *vice versâ*. On aura donc

$$\varphi(k,k')=\varphi(k',k);$$

ce qui fera disparaître dans l'intégrale que contient la première équation (m), les termes de la forme : $\varphi(k,k')-\varphi(k',k)$, et ne laissera subsister que ceux de la forme : $\varphi(k,k)-\varphi(k',k')$, pour lesquels on aura

$$\varphi(k,k)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k^2\,dy\,dy'}{[(k^2+\alpha^2+y^2+y'^2)^2-4\alpha^2y^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Dans le cas de $k'=k$, nous aurons

$$\varphi'(k,k)=-\frac{\alpha\alpha'}{k}\varphi(k,k)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\alpha' y\,dy\,dy'}{[(k^2+\alpha^2+y^2+y'^2)^2-4\alpha^2y^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette dernière intégrale est nulle, comme étant composée d'éléments, deux à deux, égaux et de signes contraires entre les limites $y=\pm\infty$; il en résultera donc

$$\varphi'(k,k)-\varphi'(k',k')=-\alpha\alpha'\left(\frac{\varphi(k,k)}{k}-\frac{\varphi(k',k')}{k'}\right).$$

Lorsque les constantes k et k' seront différentes, on ne pourra pas obtenir sous forme finie la valeur de l'intégrale $\varphi(k,k')$; mais si l'on prend, comme il a été dit,

$$k=h-b,\quad k'=h+b,$$

pour les valeurs de k et k', et que l'on développe suivant les puissances de b, on obtiendra une série très-convergente, dont nous ne conserverons que les deux premiers termes; ce qui donnera :

$$\varphi'(k,k')=-\frac{\alpha\alpha'(h-b)}{h^2}\varphi(h,h)-12b\alpha\alpha'\mathrm{H},$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{H}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2y^2\,dy\,dy'}{[(h^2+\alpha^2+y^2+y'^2)^2-4\alpha^2y^2]^{\frac{5}{2}}},$$

et supprimant une intégrale dont les élements se détruisent deux à deux entre les limites $y=\pm\infty$. La valeur de $\varphi'(k',k)$

se déduira de celle de $\varphi'(k,k')$, en y changeant le signe de b; on aura ensuite

$$\varphi'(k,k')-\varphi'(k',k)=\frac{2b\alpha\alpha'}{h^2}\varphi(h,h)-24b\alpha\alpha'\text{H}.$$

(38) La question est ainsi réduite à trouver les valeurs des intégrales $\varphi(k,k)$ et H, lesquelles deviendront

$$\varphi(k,k)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{k^2 r\,dr\,du}{[(k^2+\alpha^2+r^2)^2-4\alpha^2r^2\cos.^2u]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{H}=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{k^2 r^3\cos.^2u\,dr\,du}{[(k^2+\alpha^2+r^2)^2-4\alpha^2r^2\cos.^2u]^{\frac{5}{2}}},$$

en y faisant

$$y=r\cos.u,\quad y'=r\sin.u,\quad dy\,dy'=r\,dr\,du,$$

et observant que les limites relatives à r et u seront $r=0$ et $r=\infty$, $u=0$ et $u=2\pi$, comme précédemment.

Si nous faisons, pour un moment,

$$k^2+\alpha^2=a^2,$$

nous aurons

$$\varphi(k,k)=\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{k^2 r\,dr\,du}{[r^4+2(a^2-2\alpha^2\cos.^2u)r^2+a^4]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{H}=\frac{1}{6}\frac{d.\varphi(k,k)}{d.\alpha^2}.$$

Par les règles ordinaires, l'intégration relative à r, et ensuite celle qui répond à u, s'effectuent sous forme finie, et l'on a

$$\varphi(k,k)=\frac{k^2}{4a^2}\int_0^{2\pi}\frac{du}{a^2-\alpha^2\cos.^2u}=\frac{\pi k^2}{2a^3\sqrt{a^2-\alpha^2}},$$

$$\mathrm{H}=\frac{\pi h^2}{24a^3(a^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou bien, en remettant pour a et α leurs valeurs,

$$\varphi(k,k)=\frac{\pi k}{2\left(k^2+l^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathrm{H}=\frac{\pi}{24h\left(h^2+l^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

(39) D'après ces valeurs, si nous réunissons les formules relatives aux fonctions φ et φ' qui devront servir à former par parties les valeurs des intégrales contenues dans les équations (m), et que nous négligions partout le carré et les puissances supérieures de b, nous aurons ces quatre équations :

$$\varphi(k,k')-\varphi(k',k)=0,$$

$$\varphi(k,k)-\varphi(k',k')=-\frac{\pi b}{\left(h^2+l^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{3h^2}{h^2+l^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')}\right),$$

$$\varphi'(k,k')-\varphi'(k',k)=0,$$

$$\varphi'(k,k)-\varphi'(k',k')=-\frac{3\pi bhl^2\sin.(\omega-\omega')}{2\left(h^2+l^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Cela posé, soient ψ', ξ, ξ', ce que devient ψ quand on y met t', $t-gz$, $t-g'z$, à la place de t; prenons successivement $nt'-\psi'$, $nt'-\psi'+\pi$, pour ω'; $nt-ngz-\xi$, $nt-ng'z-\xi'$, et ces valeurs augmentées de π, pour ω; en faisant, pour abréger,

$$n(t-t'-gz)-\xi+\psi'=2\gamma,\quad n(t-t'-g'z)-\xi'+\psi'=2\gamma',$$

nous trouverons que les équations (m) deviennent :

$$P = -\frac{3\mu^2 b p}{4}\frac{d.}{dt}\int_0^\infty \Big[\frac{1}{(h^2+l^2\sin.^2\gamma)^{\frac{3}{2}}}\Big(1-\frac{3h^2}{h^2+l^2\sin.^2\gamma}\Big)$$
$$+\frac{1}{(h^2+l^2\sin.^2\gamma')^{\frac{3}{2}}}\Big(1-\frac{3h^2}{h^2+l^2\sin.^2\gamma'}\Big)-\frac{1}{(h^2+l^2\cos.^2\gamma)^{\frac{3}{2}}}\Big(1-\frac{3h^2}{h^2+l^2\cos.^2\gamma}\Big)$$
$$-\frac{1}{(h^2+l^2\cos.^2\gamma')^{\frac{3}{2}}}\Big(1-\frac{3h^2}{h^2+l^2\cos.^2\gamma'}\Big)\Big]e^{-z}dz,$$

$$\Psi = \frac{9\mu^2 b l^2 h p}{8}\frac{d.}{dt}\int_0^\infty \Big[\frac{\sin.2\gamma}{(h^2+l^2\sin.^2\gamma)^{\frac{5}{2}}}+\frac{\sin.2\gamma'}{(h^2+l^2\sin.^2\gamma')^{\frac{5}{2}}}$$
$$+\frac{\sin.2\gamma}{(h^2+l^2\cos.^2\gamma)^{\frac{5}{2}}}+\frac{\sin.2\gamma'}{(h^2+l^2\cos.^2\gamma')^{\frac{5}{2}}}\Big]e^{-z}dz.$$

Ces résultats pourront s'écrire plus simplement de cette manière :

$$P = -\frac{3\mu^2 b p}{4}\frac{d^2.}{dt\,dh}\int_0^\infty \Big[\frac{1}{(h^2+l^2\sin.^2\gamma)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(h^2+l^2\sin.^2\gamma')^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\frac{1}{(h^2+l^2\cos.^2\gamma)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{(h^2+l^2\cos.^2\gamma')^{\frac{3}{2}}}\Big]he^{-z}dz, \qquad (n)$$
$$\Psi = \frac{3\mu^2 b p}{2}\frac{d^3.}{dt\,dh\,d\psi'}\int_0^\infty \Big[\frac{1}{(h^2+l^2\sin.^2\gamma)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(h^2+l^2\sin.^2\gamma')^{\frac{1}{2}}}$$
$$-\frac{1}{(h^2+l^2\cos.^2\gamma)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{(h^2+l^2\cos.^2\gamma')^{\frac{1}{2}}}\Big]e^{-z}dz.$$

On se souviendra que l'on doit faire $t'=t$, après la différentiation relative à t; et pour employer ces formules, il faudra les développer suivant les puissances de g et g', que l'on remplacera ensuite par les quantités g_1, g_2, g_3, etc., g_1', g_2', g_3', etc., du nº 31.

(40) Lorsque la direction de l'aiguille aimantée sera telle, si cela est possible, que l'action de la terre et celle de la plaque tournante se fassent équilibre, l'angle ψ sera constant, et en appelant δ sa valeur inconnue, on aura $\psi' = \xi = \xi' = \delta$. En mettant θ et θ' à la place de $t - t'$ et $\psi' - \delta$, dans les valeurs de γ et γ', elles deviendront

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(n\theta - ngz + \theta'), \quad \gamma' = \tfrac{1}{2}(n\theta - ng'z + \theta');$$

les différentiations par rapport à t et ψ' s'opéreront sur θ et θ', et après les avoir effectuées, on fera $\theta = 0$, $\theta' = 0$. La valeur de δ s'obtiendra en égalant à zéro le second membre de l'équation (l), en sorte que l'on aura

$$\sin.\delta = \frac{3\mu bp}{4ml}\,\frac{d^3.}{dh\,d\theta\,d\theta'}\int_0^\infty \left[\frac{1}{(h^2 + l^2\sin.^2\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(h^2 + l^2\sin.^2\gamma')^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(h^2 + l^2\cos.^2\gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(h^2 + l^2\cos.^2\gamma')^{\frac{1}{2}}}\right] e^{-z}\,dz.$$

Cette valeur de $\sin.\delta$ ne renfermant pas le temps t, il en résulte que l'équilibre de l'aiguille sera effectivement possible, toutes les fois qu'elle ne surpassera pas l'unité. L'angle δ sera, dans cet état, la déviation de l'aiguille à partir du méridien magnétique; et l'on voit que son sinus sera proportionnel à la quantité μ, ou à l'intensité magnétique de l'aiguille, ce qui tient à ce que cette déviation est l'effet de la réaction de la plaque aimantée par l'influence des pôles de l'aiguille. En déterminant la valeur de n, au moyen de l'équation $\sin.\delta = 1$, on aura la limite de vitesse au-delà de laquelle l'action de la plaque tournante fera prendre à l'aiguille un mouvement continu.

La condition sin. $\delta < 1$ étant remplie, la première équation (n) fera connaître la diminution apparente du poids de l'aiguille dans sa position stationnaire, en y mettant pour γ et γ' leurs valeurs précédentes. En développant, comme il vient d'être dit, les valeurs correspondantes de sin. δ et P par rapport à g et g', et effectuant les intégrations relatives à z, la valeur de sin. δ se trouvera exprimée par une série ordonnée suivant les puissances impaires de la vitesse n, et celle de P, par une série qui procédera suivant les puissances paires et commencera par le carré. Si l'on s'arrête aux deux premiers termes de la première, et que l'on ne conserve que le premier de la seconde; que d'ailleurs on ait égard aux valeurs de μ^2 et $2m\mu$ du n° 35, et que l'on substitue pour les puissances g, g^2, g', g'^2, les quantités g_1, g_2, g'_1, g'_2, du n° 31, on trouve

$$\sin.\delta = \frac{9blc^2}{4h^4}\left[\left(1 + \frac{h^5}{(h^2+l^2)^{\frac{5}{2}}}\right)pn - \left(1 + \frac{h^5}{(h^2+l^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{15\,l^2}{4h^2}\left(1 - \frac{h^7}{(h^2+l^2)^{\frac{7}{2}}}\right)\right)\left(p_2 - p_1 p + \tfrac{5}{3}p^3\right)n^3\right],$$

$$P = \frac{9\pi^2 blc^2\lambda^2}{2\theta^2 h^5}\left(1 + \frac{(4h^2-l^2)h^5}{4(h^2+l^2)^{\frac{7}{2}}}\right)\left(p_1 - \tfrac{1}{2}p^2\right)n^2.$$

Des expériences qui m'ont été communiquées par M. Arago, montrent que le terme proportionnel à la vitesse n dans la valeur de sin. δ, en est la partie principale. La déviation de l'aiguille ayant toujours lieu, d'après l'observation, dans le même sens que le mouvement de la plaque, il faut que ce terme soit positif, et que la quantité p soit par conséquent positive. Relativement aux variations de δ dues à celles de la

vitesse n, ces expériences sont représentées avec une grande exactitude par les deux premiers termes de la série qui représente sin. δ, c'est-à-dire, par une expression de cette forme :

$$\sin.\delta = an - a'n^3;$$

a et a' étant des quantités positives, indépendantes de n, et dont la seconde est peu considérable eu égard à la première. Cela fait voir combien cette série est rapidement convergente, lors même que la vitesse n est très-grande, comme dans ces expériences où la plaque faisait depuis cinq jusqu'à quinze tours par seconde. Mais si l'on veut comparer sous d'autres rapports, l'expression du sin. δ à l'observation, il ne faudra pas perdre de vue les conditions qu'elles supposent, et qui n'étaient pas suffisamment remplies dans les expériences citées : il est nécessaire que les pôles de l'aiguille soient très-éloignés des bords de la plaque ; que b soit très-petit, un ou deux centièmes, par exemple, par rapport à son rayon et à h; et que cette distance h soit assez grande relativement à la distance de chaque pôle à l'extrémité correspondante de l'aiguille (n° 34).

Quant au poids P, on peut s'assurer *à priori* qu'il sera généralement une très-petite partie de celui de l'aiguille. En effet, en appelant celui-ci Π ; désignant par f l'espace qu'un corps pesant parcourrait dans le vide, pendant la durée θ d'une oscillation de l'aiguille ; supposant qu'elle soit prismatique, et ses dimensions en largeur et épaisseur très-petites par rapport à sa longueur, nous aurons

$$\frac{\lambda^2}{\Pi\theta^2} = \frac{4l^2}{3f};$$

d'où il résulte que le rapport de P à Π aura $\frac{l}{f}$ pour facteur; quantité qui sera très-petite dans toutes les expériences que l'on pourra faire. Les effets de la force verticale, dont la théorie a indiqué l'existence, ne seront bien sensibles que dans les déviations de l'aiguille d'inclinaison que nous considérerons bientôt.

(41) Pour effectuer le développement de la quantité Ψ suivant les puissances de g et g', lorsque l'aiguille sera en mouvement, il faudra d'abord développer les fonctions ξ et ξ' de $t-gz$ et $t-g'z$ qu'elle renferme, ce qui donnera

$$\xi=\psi-\frac{d\psi}{dt}gz+\frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{dt^2}g^2z^2-\text{etc.},$$

$$\xi'=\psi-\frac{d\psi}{dt}g'z+\frac{1}{2}\frac{d^2\psi}{dt^2}g'^2z^2-\text{etc.}$$

Le premier terme du développement de Ψ sera de la forme :

$$H\left(n-\frac{d\psi}{dt}\right);$$

H étant une quantité indépendante de t et de n. Les autres termes renfermeront les différentielles de ψ des ordres supérieurs; mais à cause que la série est, en général, très-convergente, d'après ce qu'on vient de dire, on pourra calculer la valeur de ψ en fonction de t, par des approximations successives et en intégrant seulement des équations du second ordre. Après avoir mis dans l'équation (l) à la place de Ψ son premier terme, on en déduira une première valeur approchée de ψ; on la substituera dans le second terme de Ψ, au moyen duquel et de l'équation (l), on déterminera une

seconde valeur de ψ, que l'on substituera ensuite dans le troisième terme de Ψ; et ainsi de suite alternativement. Nous nous bornerons à considérer la valeur de ψ, dépendante du premier terme de Ψ, laquelle sera donnée par l'équation :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{\theta^2}\sin.\psi + \frac{H}{\lambda^2}\left(n - \frac{d\psi}{dt}\right). \qquad (o)$$

Quand l'épaisseur de la plaque sera très-petite par rapport à la distance de l'aiguille, ainsi que nous l'avons supposé jusqu'ici, le coëfficient H sera une quantité connue; on aura alors

$$H = \frac{9\pi^2 b l c^2 \lambda^2 p}{4h^4\theta^2}\left(1 + \frac{h^5}{(h^2+l^2)^{\frac{5}{2}}}\right).$$

Mais lors même que cette condition ne serait pas remplie, le premier terme du développement de Ψ aura toujours la même forme, et l'équation (o) subsistera quelle que soit l'épaisseur de la plaque, pourvu que ses bords continuent d'être très-éloignés des pôles de l'aiguille. Dans le cas général, H sera une quantité inconnue que l'on déterminera par la déviation observée de l'aiguille, correspondante à une vitesse donnée de la plaque; l'équation (o) fera ensuite connaître le mouvement de la même aiguille, à la même distance de la même plaque.

Supposons, par exemple, que la vitesse de la plaque étant n', la déviation de l'aiguille stationnaire soit δ'; on devra donc satisfaire à l'équation (o), en faisant à la fois $\frac{d\psi}{dt} = 0$, $\psi = \delta'$, $n = n'$; d'où l'on conclura

$$H = \frac{\pi^2\lambda^2 \sin.\delta'}{n'\theta^2}.$$

Par conséquent, l'aiguille étant en mouvement, et la plaque tournant avec une vitesse n, cette équation deviendra

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{\theta^2}\left[\sin.\psi - \frac{\sin.\delta'}{n'}\left(n - \frac{d\psi}{dt}\right)\right]. \qquad (p)$$

Soit δ la déviation de l'aiguille dans sa position d'équilibre, lorsque la vitesse de la plaque est n; supposons qu'on ait écarté l'aiguille un tant soit peu de cette position, et qu'au bout du temps t, on ait

$$\psi = \delta + \varepsilon,$$

ε étant une variable très-petite dont nous ne conserverons que la première puissance : en observant, en outre, que l'équation (p) doit subsister quand $\varepsilon = 0$, nous aurons

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{\pi^2 \sin.\delta'}{\theta^2 n'}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\pi^2 \cos.\delta}{\theta^2}\varepsilon = 0.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\theta' = \frac{\theta}{\sqrt{\cos.\delta - \frac{\pi^2 \sin.^2\delta'}{4n'^2\theta^2}}},$$

et que l'on représente par c et c' deux constantes arbitraires, l'intégrale complète de cette équation linéaire, sera

$$\varepsilon = e^{-\frac{\pi^2 \sin.\delta'}{2\theta^2 n'}t}\left(c\cos.\frac{\pi t}{\theta'} + c'\sin.\frac{\pi t}{\theta'}\right);$$

e étant la base des logarithmes népériens.

Pour déterminer ces constantes, nous supposerons qu'on ait $\varepsilon = \alpha$, $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, quand $t = 0$; la valeur de ε à un instant

quelconque deviendra

$$\varepsilon = \alpha e^{-\frac{\pi^2 \sin. \delta'}{2\theta^2 n'} t}\left(\cos. \frac{\pi t}{\theta'} + \frac{\pi \theta' \sin. \delta'}{2\theta^2 n'} \sin. \frac{\pi t}{\theta'}\right).$$

A la fin de chaque oscillation, on aura $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$, ou

$$\sin. \frac{\pi t}{\theta'} = 0;$$

les oscillations seront donc isochrones, et θ' sera la durée de chaque oscillation entière. Or, à moins que δ n'approche beaucoup de l'angle droit, la valeur de θ' se réduit à très-peu près à

$$\theta' = \frac{\theta}{\sqrt{\cos. \delta}};$$

il s'ensuit donc que la durée des oscillations n'est pas altérée sensiblement par l'action de la plaque, et qu'elle est la même que si l'aiguille oscillait en vertu de la seule action de la terre, de part et d'autre de la direction qui répond à l'angle δ; ce qui est conforme à l'expérience.

Il n'en est pas de même à l'égard de leur amplitude : si l'on appelle α_i, l'amplitude de la demi-oscillation dont le rang est marqué par $2i$, ou qui s'achève au bout de temps $t = i\theta'$, on aura

$$\alpha_i = \alpha e^{-\frac{\pi^2 i \sin. \delta'}{2 n' \theta \sqrt{\cos. \delta}}};$$

d'où il résulte que les amplitudes successives diminueront continuellement; ce qui est aussi conforme à l'observation. Elles formeront une progression géométrique, dans laquelle les termes décroîtront plus rapidement à mesure que la vitesse n de la plaque augmentera et fera croître l'angle δ. Si

la plaque est en repos, et que l'aiguille oscille en conséquence de part et d'autre du méridien magnétique, on aura $\delta = 0$, et

$$\alpha_i = \alpha e^{-\frac{\pi^2 i \sin. \delta'}{2n'\theta}}.$$

Dans le cas de $i = 1$, on pourra développer l'exponentielle en série, et s'arrêter au second terme à cause de la petitesse de l'exposant; il en résultera

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{\alpha \pi^2 \sin. \delta'}{2n'\theta},$$

pour la petite différence de la première à la seconde demi-oscillation. On peut déterminer cette diminution, sans supposer très-petit, comme nous l'avons fait, l'angle α dont l'aiguille a été écartée du méridien, et en admettant seulement qu'elle soit une très-petite partie de cet angle.

(42) Pour cela faisons $n = 0$ dans l'équation (p); multiplions les deux membres par $2d\psi$; puis intégrons de manière qu'on ait $\frac{d\psi}{dt} = 0$ quand $t = 0$; nous aurons

$$\frac{d\psi^2}{dt^2} = \frac{2\pi^2}{\theta^2}(\cos. \psi - \cos. \alpha) - \frac{2\pi^2}{\theta^2}\frac{\sin. \delta'}{n'}\int \frac{d\psi^2}{dt};$$

l'intégrale $\int \frac{d\psi^2}{dt}$ commençant avec t. Puisqu'on suppose l'effet produit par l'action de la plaque, très-peu considérable pendant la première oscillation, on peut, dans une première approximation, négliger le terme qui renferme cette intégrale : on en conclura alors

$$dt = -\frac{\theta\, d\psi}{\pi\sqrt{2(\cos. \psi - \cos. \alpha)}}.$$

Dans une seconde approximation, on substituera cette va-

leur de dt sous ligne $\int$; et l'équation précédente deviendra

$$\frac{d\psi^2}{dt^2}=\frac{2\pi^2}{\theta^2}(\cos.\psi-\cos.\alpha)+\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\theta}\right)^3\frac{\sin.\delta'}{n'}\int\sqrt{\cos.^2\psi-\cos.\alpha}\,d\psi.$$

A la fin de la première oscillation, on aura $d\psi=0$ et $\psi=-\alpha_1$; l'intégrale devra s'étendre depuis $\psi=\alpha$ jusqu'à $\psi=-\alpha_1$, ou depuis $\psi=\alpha$ jusqu'à $\psi=-\alpha$, à cause que α_1 diffère peu de α par hypothèse; ou bien encore depuis $\psi=0$ jusqu'à $\psi=\alpha$, en changeant le signe de l'intégrale et la multipliant par 2; par conséquent nous aurons

$$\cos.\alpha_1-\cos.\alpha=\frac{2\pi\sqrt{2}\sin.\delta'}{\theta n'}\int_0^\alpha\sqrt{\cos.\psi-\cos.\alpha}\,d\psi.$$

En résolvant cette équation par approximation, et négligeant le carré de son second membre, il vient

$$\alpha_1=\alpha-\frac{2\pi\sqrt{2}\sin.\delta'}{\theta n'\sin.\alpha}\int_0^\alpha\sqrt{\cos.\psi-\cos.\alpha}\,d\psi.$$

Il serait facile de vérifier ce résultat par l'expérience, en prenant pour α un grand angle, et plaçant l'aiguille à une assez grande distance de la plaque pour que la diminution d'amplitude, dans une seule oscillation, ne soit que d'un petit nombre de degrés, abstraction faite de celle qui est due à la résistance de l'air. En mettant successivement, dans cette formule, α_1, α_2, etc., à la place de α, on calculera, de proche en proche, les amplitudes des demi-oscillations ascendantes, jusqu'à ce qu'elles soient insensibles. Lorsqu'elles seront devenues très-petites, et qu'on négligera le carré et les puissances supérieures de α, la formule se réduira à

$$\alpha_1=\alpha-\frac{2\pi\sin.\delta'}{\theta n'\alpha}\int_0^\alpha\sqrt{\alpha^2-\psi^2}\,dt=\alpha-\frac{\pi^2\sin.\delta'}{2\theta n'}\alpha;$$

ce qui coïncide avec le résultat du n° précédent.

(43) L'aiguille étant toujours parallèle à la plaque, si la plaque, au lieu d'être horizontale, était perpendiculaire à la direction du magnétisme terrestre, il faudrait supprimer dans toutes les formules précédentes, les termes relatifs à l'action de la terre, dont l'aiguille serait alors indépendante. L'équation (p) se réduirait donc à celle-ci :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=\frac{\pi^2 \sin.\delta'}{\theta^2 n'}\left(n-\frac{d\psi}{dt}\right);$$

δ' désignant toujours la déviation de l'aiguille due à la vitesse n' de la plaque, dans la position horizontale du système. En l'intégrant une première fois, et supposant la vitesse initiale de l'aiguille égale à zéro, il vient

$$\frac{d\psi}{dt}=n\left(1-e^{-\frac{\pi^2 \sin.\delta'}{\theta^2 n'}t}\right);$$

ce qui montre déja que la vitesse de l'aiguille approchera de plus en plus d'être constante et égale à celle de la plaque. Si l'on intègre une seconde fois, et que l'on compte l'angle ψ à partir de la position initiale de l'aiguille, on aura

$$\psi=nt-\frac{nn'\theta^2}{\pi^2 \sin.\delta'}\left(1-e^{-\frac{\pi^2 \sin.\delta'}{\theta^2 n'}t}\right).$$

Supposons qu'on ait marqué par un trait, la projection de l'aiguille sur la plaque avant que le mouvement ait commencé; que l'on marque par un autre trait, cette projection à l'époque où la vitesse de l'aiguille est sensiblement égale à celle de la plaque; et que l'on désigne par δ_1 la quantité angulaire dont le second trait se trouvera en arrière du premier par rapport au sens de la rotation, on aura, d'après cette équation,

$$\delta_1=\frac{nn'\theta^2}{\pi^2 \sin.\delta'}.$$

La vitesse de l'aiguille ayant atteint celle de la plaque, si celle-ci devient tout-à-coup immobile, l'aiguille ne s'arrêtera pas immédiatement, mais son mouvement changera de nature. L'équation différentielle dont il dépendra se déduira de la précédente, en y faisant $n=0$, ce qui la réduit à

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=-\frac{\pi^2 \sin.\delta'}{\theta^2 n'}\frac{d\psi}{dt}.$$

On déterminera les deux constantes arbitraires de son intégrale, de manière qu'on ait $\frac{d\psi}{dt}=n$, $\psi=0$, quand $t=0$, en comptant le temps t à partir de l'instant où la plaque s'est arrêtée, et l'angle ψ à partir de la projection de l'aiguille au même instant. De cette manière, on aura, pendant toute la durée du second mouvement de l'aiguille :

$$\frac{d\psi}{dt}=ne^{-\frac{\pi^2 \sin.\delta'}{\theta^2 n'}t},$$

$$\psi=\frac{nn'\theta^2}{\pi^2 \sin.\delta'}\left(1-e^{-\frac{\pi^2 \sin.\delta'}{\theta^2 n'}t}\right);$$

d'où l'on conclut qu'abstraction faite de la résistance de l'air, la vitesse de l'aiguille diminuera continuellement, en vertu de l'action de la plaque, jusqu'à ce qu'elle soit devenue sensiblement nulle, et qu'à cette époque, on aura

$$\psi=\frac{nn'\theta^2}{\pi^2 \sin.\delta'}=\delta_1;$$

c'est-à-dire qu'à la fin du second mouvement, la projection de l'aiguille répondra sur la plaque, au même trait qu'au commencement du premier ; ce qui ne pourrait toutefois se vérifier que dans le vide.

§ VI.

Action d'une plaque tournante sur une aiguille inclinée.

(44) La plaque est la même que précédemment (n° 25). On place au-dessus une aiguille d'inclinaison; et dans la vue de simplifier la question, on suppose le pôle sud assez élevé pour qu'on puisse négliger l'action mutuelle de ce point et de la plaque, et n'avoir égard qu'au pôle nord qui est le plus abaissé dans nos climats. Ce dernier point sera d'ailleurs très-éloigné des bords de la plaque, dont il n'éprouvera aucune action sensible. Soit γ son ordonnée verticale, α sa distance à l'axe des x, et 6 l'angle que fait le plan de ce point et de l'axe des x avec celui des x, z. Au bout du temps t, le carré de la distance ρ comprise entre ce même point et celui de la plaque qui répond aux trois variables x, r et u, sera

$$\rho^2 = (\gamma - x)^2 + r^2 - 2r\alpha \cos.(nt + u - 6) + \alpha^2.$$

La différence des deux quantités U et V, provenant de l'action de la terre sur la plaque, disparaîtrait, comme nous l'avons déja dit (n° 34), dans les différences partielles de la fonction Q relative à une plaque d'une étendue indéfinie; c'est pourquoi nous regarderons U et V comme égales; et si nous désignons par $-\mu'$ la quantité de fluide austral, réunie au pôle que nous considérons; que nous posions

$$nt + u - 6 = v,$$

et que nous fassions usage de la notation du n° 25, nous

aurons

$$U = V = -\mu' f(\gamma - x, r, \alpha, \cos. v).$$

Ce sont ces valeurs égales de U et de V qu'il faudra substituer dans l'expression de Q donnée par l'équation (k). Les différences partielles de cette quantité prises par rapport aux coordonnées γ, α, β, introduites par la substitution de U, feront connaître les composantes de l'action de la plaque sur le pôle nord ; mais nous supposerons que le plan dans lequel l'aiguille peut tourner, soit vertical et passe par le centre de rotation de la plaque : la force dépendante de la différence partielle de Q relative à β, étant perpendiculaire à ce plan, sera détruite, et nous serons dispensés d'y avoir égard.

Pendant le mouvement de l'aiguille, l'angle β restera constant et représentera l'azimuth de son plan de rotation, compté du méridien magnétique,-et du sud au nord. Les deux autres coordonnées α et γ du pôle nord, varieront avec le temps; et si nous désignons par h l'ordonnée verticale du point de suspension de l'aiguille, par h' sa distance à l'axe des x, par l' la distance du pôle nord à ce point, et par η l'angle compris, au bout du temps t, entre la partie de l'aiguille qui aboutit à ce pôle et la perpendiculaire abaissée du point de suspension sur la plaque, nous aurons

$$\gamma = h - l' \cos. \eta, \quad \alpha = h' - l' \sin. \eta;$$

ce qui suppose que l'on regarde l'angle η comme positif ou comme négatif, selon que le pôle nord de l'aiguille, comparé à son point de suspension, se trouve plus rapproché ou plus éloigné de l'axe des x.

Afin de n'avoir pas à considérer l'action de la pesanteur,

nous supposerons enfin que l'axe de rotation de l'aiguille passe par son centre de gravité, qui sera de plus également éloigné de ses deux pôles.

(45) Pour former d'après ces données l'équation du mouvement de l'aiguille, désignons par Ω le moment rapporté à son axe de rotation, de l'action de la plaque sur son pôle nord; par λ'^2 le moment d'inertie de l'aiguille relatif au même axe; par m et m' deux constantes positives, telles que $m\mu'$ et $m'\mu'$ soient, abstraction faite du signe, les composantes horizontale et verticale de l'action de la terre sur chacun des pôles de l'aiguille : l'équation demandée sera

$$\lambda'^2 \frac{d^2\eta}{dt^2} = -2l'\mu'(m' \sin.\eta - m \cos.\theta \cos.\eta) + \Omega.$$

Soit encore i la valeur de η relative à la position d'équilibre de l'aiguille, soumise à la seule action de la terre, c'est-à-dire, le complément de l'inclinaison magnétique qui répond à l'azimut θ, dans le lieu et à l'instant de l'observation; et soit θ' la durée correspondante de ses petites oscillations. Nous aurons

$$m' \sin.i - m \cos.\theta \cos.i = 0,$$

$$2l'\mu'(m' \cos.i + m \cos.\theta \sin.i) = \frac{\pi^2 \lambda'^2}{\theta'^2};$$

d'où l'on tire

$$2l'\mu'm' = \frac{\pi^2\lambda'^2 \cos.i}{\theta'^2}, \quad 2l'\mu'm \cos.\theta = \frac{\pi^2\lambda'^2 \sin.i}{\theta'^2};$$

ce qui change l'équation précédente en celle-ci :

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{\theta'^2} \sin.(\eta - i) + \frac{\Omega}{\lambda'^2}. \qquad (q)$$

Il en résulte aussi

$$\frac{m}{m'} = \frac{\text{tang.}\, i}{\cos.\, 6},$$

de sorte qu'en appelant j le complément de l'inclinaison magnétique dans le plan du méridien, ou la valeur de i qui répond à $6 = 0$, on aura l'équation connue :

$$\text{tang.}\, i = \text{tang.}\, j \cos.\, 6,$$

qui servira à déterminer l'angle i.

Pour connaître μ' indépendamment de m et m', on fera une expérience semblable à celle que nous avons indiquée dans le n° 35. Après avoir placé dans le plan du méridien magnétique, l'aiguille que nous considérons, on la rendra horizontale, puis on placera au-dessus dans le même plan, une autre aiguille d'inclinaison dont le point de suspension sera situé dans la même verticale que le pôle sud de la première aiguille. Cela étant, on cherchera la distance à laquelle ces deux points doivent être l'un de l'autre, pour que la seconde aiguille soit rendue verticale; d'où l'on conclura, comme dans le n° cité, une équation de cette forme :

$$\mu' = 2 m c'^2,$$

c' étant une ligne donnée par cette expérience. Par conséquent, on aura

$$\mu'^2 = \frac{\pi^2 c'^2 \lambda'^2}{l' \theta'^2} \frac{\sin.\, i}{\cos.\, 6},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\mu'^2 = \frac{\pi^2 c'^2 \lambda'^2 \sin.\, j}{l' \theta'^2 \sqrt{\sin.^2 j \cos.^2 6 + \cos.^2 j}}.$$

Enfin, nous aurons

$$\Omega = -\frac{dQ}{d\eta},$$

et d'après les valeurs de γ et α en fonctions de η,

$$\Omega = \frac{dQ}{d\alpha} l' \cos.\eta - \frac{dQ}{d\gamma} l' \sin.\eta,$$

les différences partielles étant prises par rapport aux variables α et γ qui proviennent de la fonction U.

(46) La question consiste donc à former ces quantités d'après l'équation (k), et la valeur précédente de U et V. Or, si nous supposons qu'on mette t' à la place de t dans U, et que nous représentions, en outre, par U_1 et U_2 les valeurs de cette quantité qui répondent à $x = -b$ et $x = b$, nous aurons, comme dans le nº 36,

$$\frac{dU_1}{d\gamma} + \frac{dU_2}{d\gamma} = -Ft', \quad \frac{dU_1}{d\gamma} - \frac{dU_2}{d\gamma} = -F't';$$

d'où il résultera

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{d\gamma} = -\frac{3p}{8\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \int_0^{2\pi} [Ft'F'(t-g'z) \\ + F't'F(t-gz)]\, r\,dr\,du\Big) e^{-z}\, dz; \end{aligned}\right\} (r)$$

nous aurons de plus

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{d\alpha} = \frac{3p}{8\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \Big[\Big(\frac{dU_1}{d\alpha} + \frac{dU_2}{d\alpha}\Big) F'(t-g'z) \\ + \Big(\frac{dU_1}{d\alpha} - \frac{dU_2}{d\alpha}\Big) F(t-gz)\Big]\, r\,dr\,du\Big) e^{-z}\, dz; \end{aligned}\right\} (s)$$

et dans ces deux équations, il faudra faire $t' = t$, après la

différentiation relative à t, et prendre pour les fonctions qu'elles renferment ces différentes valeurs :

$$\mathrm{F}t = -\mu'(\gamma - b) f^3(\gamma - b, r, \alpha, \cos. v) - \mu'(\gamma + b) f^3(\gamma + b, r, \alpha, \cos. v),$$
$$\mathrm{F}'t = -\mu'(\gamma - b) f^3(\gamma - b, r, \alpha, \cos. v) + \mu'(\gamma + b) f^3(\gamma + b, r, \alpha, \cos. v),$$
$$\frac{d\mathrm{U}_1}{d\alpha} = \mu'(\alpha' - r\cos. v') f^3(\gamma' - b, r, \alpha', \cos. v'),$$
$$\frac{d\mathrm{U}_2}{d\alpha} = \mu'(\alpha' - r\cos. v') f^3(\gamma' + b, r, \alpha', \cos. v');$$

α', γ', v' étant les valeurs de α, γ, v qui répondent à $t = t'$.

Le calcul des intégrales relatives à r et u sera différent selon que l'aiguille se mouvra ou qu'elle sera en repos. Nous supposerons d'abord que l'action de la plaque et de la terre se fassent équilibre, et que l'aiguille soit stationnaire. Les coordonnées α et γ de son pôle nord seront alors indépendantes du temps; on aura donc $\gamma' = \gamma$, $\alpha' = \alpha$; et, dans ce cas, la valeur de $\frac{dQ}{d\gamma}$, donnée par l'équation (r), s'obtiendra par le même calcul que celle de la quantité P du n° 36. On trouvera de cette manière

$$\frac{dQ}{d\gamma} = \frac{3\mu'^2 bp}{4} \frac{d^2.}{dt\,d\gamma} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\left(\gamma^2 + \alpha^2 \sin.^2 \frac{n}{2}(t - t' - gz)\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(\gamma^2 + \alpha^2 \sin.^2 \frac{n}{2}(t - t' - g'z)\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \gamma e^{-z} dz;$$

expression qu'il faudra développer suivant les puissances de g et g', que l'on remplacera ensuite par les quantités g_1, g_2, etc., g_1', g_2', etc., du n° 31; et à cause de $t' = t$, après la différentiation relative à t, il en résultera une série ordonnée suivant les puissances paires de n, et commençant par son

carré. Si l'on s'arrête au premier terme de cette série, on aura simplement :

$$\frac{dQ}{d\gamma} = -\frac{9\mu'^2 b\alpha^2}{2\gamma^5}(p_1 - \tfrac{1}{2}p^2)n^2, \qquad (t)$$

formule dans laquelle on mettra pour μ'^2 sa valeur précédente quand il s'agira de la réduire en nombres.

Cette quantité $\frac{dQ}{d\gamma}$, prise avec un signe contraire, exprimera l'action verticale de la plaque sur le pôle de l'aiguille qui produit son aimantation. On voit qu'elle est proportionnelle au carré $\alpha^2 n^2$ de la vitesse absolue du point de la plaque qui répond à la projection de ce pôle, et en raison inverse de la cinquième puissance de son élévation γ. On voit aussi qu'elle conservera le même signe, qu'elle que soit la position du point sur lequel elle agit; et l'expérience ayant fait voir que cette force est répulsive, il en faut conclure que la constante $p_1 - \frac{1}{2}p^2$ est positive, du moins dans le cuivre et les autres substances soumises à l'observation.

(47) Dans ce même cas de l'aiguille stationnaire, les intégrales relatives à r et u que contient le second membre de l'équation (s), se composeront de parties telles que :

$$\varphi_1(k,k') - \varphi_1(k',k), \quad \varphi_1(k,k) - \varphi_1(k',k'),$$

en supposant qu'on ait

$$\varphi_1(k,k') = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{k(\alpha - r\cos.(u+\omega'))\,r\,dr\,du}{[(k^2+\alpha^2+r^2-2\alpha r\cos.(u+\omega))(k'^2+\alpha^2+r^2-2\alpha r\cos.(u+\omega'))]^{\frac{3}{2}}},$$

prenant

$$k = \gamma - b, \quad k' = \gamma + b, \quad \omega' = nt' - 6,$$

70.

et successivement $n(t-gz)-6$, $n(t-g'z)-6$, pour l'angle ω.

On traitera cette intégrale double comme celles que l'on a considérées dans le n° 37. Ainsi, après avoir fait

$$u+\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')=u',\quad du=du',$$

on fera

$$r\sin. u'=y,\quad r\cos. u'=y';\quad r\,dr\,du'=dy\,dy';$$

il en résultera

$$\varphi_1(k,k')=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k[\alpha-y\sin.\frac{1}{2}(\omega-\omega')-y'\cos.\frac{1}{2}(\omega-\omega')]\,dy\,dy'}{[(k^2+\alpha^2+y^2+y'^2+2y\alpha\sin.\frac{1}{2}(\omega-\omega')-2y'\alpha\cos.\frac{1}{2}(\omega-\omega'))(k'^2+\alpha^2+y^2+y'^2-2y\alpha\sin.\frac{1}{2}(\omega-\omega')-2y'\alpha\cos.\frac{1}{2}(\omega-\omega'))]^{\frac{3}{2}}}.$$

Mettons $y'+\alpha\cos.\frac{1}{2}(\omega-\omega')$ au lieu de y'; en supprimant la partie de cette intégrale dont les éléments se détruisent deux à deux entre les limites $\pm\infty$ de la nouvelle variable y', et faisant, pour abréger,

$$[(k^2+\alpha^2\sin.^2\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')+y^2+y'^2+2y\alpha\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'))(k'^2+\alpha^2\sin.^2\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')+y^2+y'^2-2y\alpha\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'))]^{\frac{3}{2}}=\mathrm{D},$$

nous aurons

$$\varphi_1(k,k')=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(y-\alpha\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'))\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\frac{dy\,dy'}{\mathrm{D}}.$$

Si l'on supprime de même la partie de cette intégrale, qui renferme la première puissance de y à son numérateur, et qui se détruit dans le cas de $k'=k$, on aura simplement :

$$\varphi_1(k,k)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\alpha\sin.^2\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\,dy\,dy'}{[(k^2+\alpha^2\sin.^2\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')+y^2+y'^2)^2-4y^2\alpha^2\sin.^2\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')]^{\frac{3}{2}}};$$

intégrale dont la valeur s'obtiendra sous forme finie, comme celle de $\varphi(k,k)$ du n° 38, et sera

$$\varphi_1(k,k)=\frac{\pi\alpha\sin.^2\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')}{2(k^2+\alpha^2\sin.^2\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'))^{\frac{3}{2}}}.$$

Il n'en sera plus de même lorsque les quantités k et k' seront différentes; mais si l'on désigne par D′ ce que devient D quand on y change le signe de y, on aura

$$\varphi_1(k,k')=-\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(y-\alpha\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'))\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\frac{dy\,dy'}{D}$$
$$+\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(y+\alpha\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'))\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\frac{dy\,dy'}{D'};$$

et en même temps

$$\varphi_1(k',k)=-\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k'(y-\alpha\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'))\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\frac{dy\,dy'}{D'}$$
$$+\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k'(y+\alpha\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega'))\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\frac{dy\,dy'}{D};$$

d'où il résultera

$$\varphi_1(k,k')-\varphi_1(k',k)=-\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(k+k')y\sin.\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{D'}\right)dy\,dy'$$
$$+\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(k-k')\alpha\sin.^2\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')\left(\frac{1}{D}+\frac{1}{D'}\right)dy\,dy'.$$

Or, à cause de $k'-k=2b$, si l'on néglige les puissances de b supérieures à la première, ou seulement supérieures à son carré, la seconde intégrale que renferme cette équation aura pour valeur :

$$-\frac{2b}{\gamma}\varphi_1(\gamma,\gamma);$$

de plus, si l'on développe suivant les puissances de b, en s'arrêtant au premier terme, il vient

$$D-\frac{1}{D'}=-\frac{24b\gamma y\alpha\sin.\frac{1}{2}(\omega-\omega')}{[(\gamma^2+\alpha^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')+y^2+y'^2)^2-4y^2\alpha^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')]^{\frac{5}{2}}};$$

l'équation précédente deviendra donc

$$\varphi_1(k,k')-\varphi_1(k',k)=24b\gamma G-\frac{2b}{\gamma}\varphi_1(\gamma,\gamma),$$

en faisant, pour un moment,

$$G=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma\alpha y^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')dy\,dy'}{[(\gamma^2+\alpha^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')+y^2+y'^2)^2-4\gamma^2\alpha^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')]^{\frac{5}{2}}}.$$

La valeur de cette dernière intégrale s'obtiendra comme celle de la quantité H du n° 37, et l'on aura

$$G=\frac{\pi\alpha\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega')}{24\gamma^2(\gamma^2+\alpha^2\sin.^2\frac{1}{2}(\omega-\omega'))^{\frac{3}{2}}},$$

laquelle valeur étant jointe à celle de $\varphi_1(\gamma,\gamma)$ donnera

$$\varphi_1(k,k')-\varphi_1(k',k)=0.$$

Ainsi, les intégrales relatives à r et u que contient l'équation (s), ne renfermeront que des termes de la forme :

$$\varphi_1(k,k)-\varphi_1(k',k'),$$

dont l'expression sera

$$\frac{3\pi b\gamma\alpha \sin.^2 \frac{1}{2}(\omega-\omega')}{(\gamma^2+\alpha^2 \sin.^2 \frac{1}{2}(\omega-\omega'))^{\frac{5}{2}}},$$

en négligeant toujours les puissances de b supérieures à la seconde.

(48) D'après ce résultat, on trouvera sans difficulté que l'équation (s) devient

$$\frac{dQ}{d\alpha}=-\frac{9\mu'^2 bp}{8}\frac{d.}{dt}\int_0^\infty\left[\frac{\gamma\alpha\sin.^2\frac{n}{2}(t-t'-gz)}{\left(\gamma^2+\alpha^2\sin.^2\frac{n}{2}(t-t'-gz)\right)^{\frac{5}{2}}}\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\alpha\sin.^2\frac{n}{2}(t-t'-g'z)}{(\gamma^2+\alpha^2\sin.^2\frac{n}{2}(t-t'-g'z))^{\frac{5}{2}}}\right]e^{-z}dz;$$

et il ne restera plus qu'à développer par rapport à g et g' dont on remplacera les puissances par les quantités g_1, g_2, etc., g_1', g_2', etc., du nº 31, et à faire $t'=t$ après la différentiation relative à t. On obtiendra, comme dans le cas précédent, une série ordonnée suivant les puissances paires de n, et commençant par son carré. En s'arrêtant au premier terme, il vient

$$\frac{dQ}{d\alpha}=\frac{9\mu'^2 b\alpha}{4\gamma^4}(p_1-\tfrac{1}{2}p^2)n^2. \qquad (u)$$

Cette différence partielle de Q, prise avec un signe contraire, exprime la composante suivant le prolongement du rayon α, de la réaction de la plaque sur le pôle qui répond à ce rayon et à la hauteur γ. Les expériences relatives à la composante verticale ayant fait voir que $p_1-\frac{1}{2}p^2$ est une quantité positive, il en résulte que la valeur de $\frac{dQ}{d\alpha}$

l'est aussi, et que ce pôle sera attiré vers l'axe de rotation de la plaque. L'observation a prouvé, en effet, que la composante centrale est attractive jusqu'à une certaine distance des bords de la plaque; et quant au changement de signe que M. Arago a remarqué dans cette force, lorsqu'on s'approche suffisamment des bords, il ne peut pas être compris dans la formule précédente qui suppose la plaque indéfiniment étendue. La composante centrale et la composante verticale sont, l'une et l'autre, proportionnelles au carré de la vitesse de rotation n, tandis que la troisième composante perpendiculaire au plan des deux autres, c'est-à-dire, la force qui fait tourner l'aiguille horizontale, est seulement proportionnelle à la première puissance de n, en réduisant sa valeur à son premier terme (n° 40). Le rapport de la première à la seconde force est indépendant de la matière et de la vitesse de la plaque; il ne dépend que de la position du point auquel elles sont appliquées, et sa valeur est $\frac{\gamma}{2\alpha}$, abstraction faite du signe: au contraire, le rapport de la seconde à la troisième force serait à peu près indépendant de cette position, et, pour une même plaque, proportionnel à la vitesse n, pourvu qu'elle ne fût pas très-considérable.

(49) Au moyen des équations (t) et (u), la valeur de Ω devient

$$\Omega = \frac{9\mu'^2 b l' \alpha n^2}{2\gamma^5}\left(p_1 - \tfrac{1}{2}p^2\right)\left(\tfrac{1}{2}\gamma \cos.\eta + \alpha \sin.\eta\right).$$

Je la substitue dans l'équation (q), dont j'égale à zéro le second membre; et en ayant égard à la valeur de μ'^2 du n° 45, il vient

$$\sin.(\eta - i) = \frac{9\,b\,c'^2 \alpha\, n^2 \left(p_1 - \frac{1}{2} p^2\right) \sin. j}{2\gamma^5 \sqrt{\sin.^2 j \cos.^2 6 + \cos.^2 j}} \left[\tfrac{1}{2}\gamma \cos.\eta + \alpha \sin.\eta\right];$$

équation qui servira à déterminer, dans un azimut quelconque, l'angle η correspondant à la position d'équilibre de l'aiguille d'inclinaison, après qu'on y aura mis à la place de α et γ leurs valeurs en fonctions de cette inconnue (nº 44).

L'angle $\eta - i$ sera la déviation de l'aiguille produite par l'action de la plaque tournante; quand elle sera peu considérable, on résoudra par approximation l'équation précédente, en mettant i au lieu de η dans son second membre, et prenant dans le premier l'angle $\eta - i$ à la place de son sinus. L'angle i étant donné par l'équation $\text{tang.}\, i = \text{tang.}\, j \cos. 6$ du nº 45, sera de même signe que $\cos. 6$; et comme l'azimut 6 se compte du sud au nord, à partir du méridien magnétique qui passe par l'axe de rotation de la plaque, et s'étend depuis zéro jusqu'à 2π, il s'ensuit que si l'on conçoit par cet axe un plan perpendiculaire au méridien, l'angle i sera positif au sud de ce plan et négatif au nord. De ce changement de signe, il résulte qu'outre le centre de la plaque, il y aura dans chaque azimut une seconde projection du pôle nord, qui répondra à une valeur négative de i, et pour laquelle la déviation de l'aiguille sera nulle : le rayon α de ce point se déterminera en égalant à zéro, le facteur de $\sin.(\eta - i)$ compris entre des crochets, ce qui donnera

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\gamma \cot. i = -\tfrac{1}{2}\gamma \cot. j \sec. 6.$$

Au-delà de ce point, du côté du midi, la déviation de l'aiguille sera positive, et son effet sera de rapprocher du centre de la plaque, la projection du pôle nord; en-deçà, du côté

du nord, elle sera négative, et ce pôle, éloigné du centre.

(50) Maintenant supposons l'aiguille en mouvement, et cherchons à déterminer l'influence de la plaque tournante ou en repos, sur ses oscillations; mais pour ne pas compliquer les calculs, arrêtons-nous, dans le développement des formules (r) et (s) par rapport à g et g', au premier terme de chaque série qui en sera, dans ce cas, la partie indépendante de ces deux quantités. Supprimons donc g et g' dans ces formules, ce qui permettra d'effectuer immédiatement les intégrations relatives à z.

L'équation (r) deviendra d'abord

$$\frac{dQ}{d\gamma} = -\frac{3p}{8\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{d.\mathrm{F}t\,\mathrm{F}'t}{dt} r dr du.$$

Faisons passer la différentiation relative à t, en dehors du signe $\int\int$; puis au lieu de l'angle u, employons la variable v dans l'intégration : à cause de $v = nt + u - 6$, on aura $dv = du$, et les limites relatives à v seront toujours $v = 0$ et $v = 2\pi$. Mettons de plus pour $\mathrm{F}t$ et $\mathrm{F}'t$ leurs valeurs; nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dQ}{d\gamma} = -\dfrac{3\mu'^2 p}{8\pi}\dfrac{d.}{dt}\displaystyle\int_0^\infty \int_0^{2\pi} [(\gamma - b)^2 f^6(\gamma - b, r, \alpha, \cos. v) \\ \qquad\qquad - (\gamma + b)^2 f^6(\gamma + b, r, \alpha, \cos. v)] r dr du. \end{array}\right\} (v)$$

En substituant de même les valeurs de $\mathrm{F}t$, $\mathrm{F}'t$, $\frac{dU_1}{d\alpha}$, $\frac{dU_1}{d\alpha}$, dans la formule (s), et réduisant, on trouve

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -\frac{3\mu'^2 p}{8\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} (\alpha - r\cos.v)\,\frac{d.}{dt}\big[(\gamma - b)f^6(\gamma - b, r, \alpha, \cos.v) - (\gamma + b)f^6(\gamma + b, r, \alpha, \cos.v)\big]\,r\,dr\,du$$
$$-\frac{3\mu'^2 p}{8\pi}\frac{d\gamma}{dt}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \big[f^6(\gamma - b, r, \alpha, \cos.v) - f^6(\gamma + b, r, \alpha, \cos.v)\big](\alpha - r\cos.v)\,r\,dr\,du.$$

On pourra, dans la première intégrale, faire passer le facteur $\alpha - r\cos.v$ sous la différentielle relative à t, en le remplaçant par $\alpha' - r\cos.v'$, α' et v' étant, comme précédemment, les valeurs de α et v relatives à une constante t' qu'on fera égale à t après la différentiation. On fera sortir ensuite cette différentielle hors du signe $\iint$, puis on substituera la variable v à l'angle u. D'ailleurs on a identiquement

$$\alpha' - r\cos.v' = \alpha' - r\cos.v\cos.n(t - t') - r\sin.v\sin.n(t - t');$$

la partie de l'intégrale qui comprendra le dernier terme de ce facteur, sera nulle entre les limites $v = 0$, $v = 2\pi$; et comme il est indifférent de faire $t' = t$ dans $\cos.n(t - t')$ avant ou après la différentiation, on voit qu'il suffira de remplacer α par α'; en sorte que l'on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{d\alpha} = &-\frac{3\mu'^2 p}{8\pi}\frac{d.}{dt}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \big[(\gamma - b)f^6(\gamma, b, r, \alpha, \cos.v) \\ &\quad - (\gamma + b)f^6(\gamma + b, r, \alpha, \cos.v)\big](\alpha' - r\cos.v)\,r\,dr\,du \\ &-\frac{3\mu'^2 p}{8\pi}\frac{d\gamma}{dt}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \big[f^6(\gamma - b, r, \alpha, \cos.v) \\ &\quad - f^6(\gamma + b, r, \alpha, \cos.v)\big](\alpha - r\cos.v)\,r\,dr\,du \end{aligned}\right\} \quad (x)$$

Les intégrales doubles que ces formules renferment peu-

vent s'obtenir sous forme finie par les règles ordinaires. En effet, on a

$$\int_0^\infty \frac{rdr}{(\gamma^2+\alpha^2+r^2-2\alpha r\cos.v)^2}=\frac{1}{2(\gamma^2+\alpha^2\sin.^2v)}$$

$$+\frac{\alpha\cos.v}{2(\gamma^2+\alpha^2\sin.^2v)^{\frac{3}{2}}}\text{ arc}\left(\text{tang.}=\frac{\alpha\cos.v}{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2\sin.^2v}}\right);$$

en intégrant par partie, il vient

$$\int_0^{2\pi}\frac{\alpha\cos.v\,dv}{(\gamma^2+\alpha^2\sin.^2v)^{\frac{3}{2}}}\text{ arc}\left(\text{tang.}=\frac{\alpha\cos.v}{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2\sin.^2v}}\right)=\int_0^{2\pi}\frac{\alpha^2\sin.^2v\,dv}{\gamma^2(\gamma^2+\alpha^2\sin.^2v)};$$

on aura donc

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{rdrdv}{(\gamma^2+\alpha^2+r^2 2\alpha\cos.v)^2}=\frac{\pi}{\gamma^2};$$

d'où l'on conclut, en différentiant successivement par rapport à γ et α, et ayant égard à la notation du nº 25 :

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}f^6(\gamma,r,\alpha,\cos.v')\,rdrdv=\frac{\pi}{2\gamma^4},$$

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}f^6(\gamma,r,\alpha,\cos.v)(\alpha-r\cos.v)\,rdrdv=0.$$

Or, au moyen de ces résultats, et d'après les valeurs de α et γ en fonctions de η, les équations (v) et (x) deviendront

$$\frac{dQ}{d\gamma}=-\frac{3\mu'^2p}{16}\frac{d.}{dt}\left(\frac{1}{(\gamma-b)^2}-\frac{1}{(\gamma+b)^2}\right)=\frac{9\mu'^2bl'}{4\gamma^4}p\frac{d\eta}{dt}\sin.\eta,$$

$$\frac{dQ}{d\alpha}=-\frac{3\mu'^2p}{16}\frac{d.}{dt}\left(\frac{\alpha'-\alpha}{(\gamma-b)^3}-\frac{\alpha'-\alpha}{(\gamma+b)^3}\right)=-\frac{9\mu'^2bl'}{8\gamma^4}p\frac{d\eta}{dt}\cos.\eta,$$

en négligeant les puissances de b supérieures au carré.

Nous aurons par conséquent

$$\Omega = -\frac{9\mu'^2 b l'^2}{4\gamma^4}\left(\tfrac{1}{2}\cos.^2\eta + \sin.^2\eta\right)p\,\frac{d\eta}{dt};$$

valeur que l'on substituera dans l'équation (q) qui servira ensuite à déterminer l'angle η en fonction de t, ou la direction de l'aiguille à chaque instant.

(51) La valeur de η sera indépendante de la vitesse n de la plaque, parce que l'on a négligé dans les développements des formules (r) et (s) par rapport à g et g', les termes dans lesquels cette vitesse entrerait, ce qui n'aurait lieu qu'à partir des premières puissances de g et g'. L'action de la plaque tournante influerait sur la position d'équilibre de l'aiguille, et conséquemment sur la durée des petites oscillations de part et d'autre de cette position. Si la plaque est en repos, cette durée sera sensiblement indépendante de son action, qui n'influera plus que sur l'amplitude, comme dans le cas des oscillations de l'aiguille horizontale. Quelle que soit la quantité dont l'aiguille aura été écartée de sa position d'équilibre, on déterminera, comme dans le n° 42, la diminution d'amplitude de la première oscillation, pourvu qu'elle soit une partie peu considérable de l'écartement primitif. Ainsi, en désignant par $i+\xi$ la valeur de η au bout du t, et supposant qu'on ait à l'origine du mouvement, $\xi = a$ et $\frac{d\xi}{dt} = 0$, on tirera de l'équation (q) :

$$\frac{d\xi^2}{dt^2} - \frac{2\pi^2}{\theta'^2}(\cos.\xi - \cos.a) = -\frac{9\mu'^2 b l'^2}{2\lambda'^2}\int\varphi\frac{d\xi^2}{dt},$$

en faisant, pour abréger,

$$\varphi = \frac{1}{\gamma^4}\left[\tfrac{1}{2}\cos.^2(i+\xi) + \sin.^2(i+\xi)\right],$$

et l'intégrale contenue dans le second membre étant prise de manière qu'elle s'évanouisse quand $t=0$. Si l'on néglige cette intégrale dans une première approximation, on aura d'abord

$$dt = -\frac{\theta' d\xi}{\pi\sqrt{2(\cos.\xi - \cos.a)}}.$$

Je substitue ensuite cette valeur de dt, sous le signe $\int$; il vient

$$\frac{d\xi^2}{dt^2} - \frac{2\pi^2}{\theta'^2}(\cos.\xi - \cos.a) = \frac{9\pi\mu'^2 b l'^2 p}{\sqrt{2}\,\theta'\lambda'^2}\int \varphi\sqrt{\cos.\xi - \cos.a}\,d\xi.$$

Soit $\xi = -a + \varepsilon$, à la fin de la première oscillation, de sorte que ε désigne la diminution d'amplitude demandée; on aura en même temps $\frac{d\xi}{dt} = 0$, et par conséquent

$$\cos.(a-\varepsilon) - \cos.a = -\frac{9\mu'^2 b l'^2 \theta' p}{2\sqrt{2}\,\pi\lambda'^2}\int_a^{-a+\varepsilon} \varphi\sqrt{\cos.\xi - \cos.a}\,d\xi.$$

A cause de la petitesse supposée de ε, on pourra étendre l'intégrale depuis $\xi = a$ jusqu'à $\xi = -a$, ou bien en changer le signe et la prendre depuis $\xi = -a$ jusqu'à $\xi = a$; et si l'on néglige, en outre, le carré de ε dans le premier membre de cette équation, on en conclura

$$\varepsilon = \frac{9\mu'^2 b l'^2 \theta' p}{2\sqrt{2}\,\pi\lambda'^2 \sin.a}\int_{-a}^{a} \varphi\sqrt{\cos.\xi - \cos.a}\,d\xi;$$

c'est-à-dire, en mettant pour μ'^2 sa valeur précédente (n° 45),

$$\varepsilon = \frac{9\pi b l' c'^2 p \sin. j}{2\sqrt{2}\,\theta' \sin. a \sqrt{\sin.^2 j \cos.^2 \beta + \cos.^3 j}} \int_{-a}^{a} \varphi \sqrt{\cos.\xi - \cos. a}\, d\xi.$$

(52) Pour comparer cette diminution d'amplitude, à celle qui a lieu dans le cas des oscillations horizontales, supposons que l'aiguille dont il était question dans le n° 42, soit la même que celle que nous venons de considérer, ou du moins que les quantités l, λ, c, μ, relatives à la première aiguille, soient les mêmes que les quantités l', λ', c', μ', relatives à la seconde; supposons aussi l'élévation de l'aiguille horizontale au-dessus de la plaque, égale à la valeur moyenne de γ que nous représenterons par h_1, en sorte que h, soit l'élévation du pôle nord de l'aiguille inclinée dans sa position d'équilibre; prenons enfin a pour l'angle dont l'aiguille horizontale a été écartée du méridien magnétique, et désignons par ε_1 la diminution d'amplitude de sa première oscillation. D'après le n° 42, on aura

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi\sqrt{2}\sin.\delta'}{\theta n' \sin. a} \int_{-a}^{a} \sqrt{\cos.\xi - \cos. a}\, d\xi;$$

θ étant toujours la durée d'une petite oscillation de cette dernière aiguille soumise à l'action de la terre, dont la valeur sera (n° 35)

$$\theta = \frac{\pi\lambda'}{\sqrt{2m\mu' l'}}.$$

On devra prendre, pour la valeur approchée du rapport $\frac{\sin.\delta'}{n'}$ que l'équation précédente renferme (n° 40),

$$\frac{\sin.\delta'}{u'} = \frac{9bl'c'^2 p}{4h_1^4}\left(1 + \frac{h_1^5}{(h_1^2 + l'^2)^{\frac{5}{2}}}\right);$$

mais l' étant, en général, très-grand par rapport à h_1, on pourra réduire à l'unité le facteur compris entre les parenthèses. D'ailleurs on a (n° 45)

$$\theta' = \frac{\pi\lambda'}{\sqrt{2m\mu' l'}} \cdot \sqrt{\frac{\sin. i}{\cos. 6}} = \theta \sqrt[4]{\frac{\sin.^2 j}{\sin.^2 j \cos.^2 6 + \cos.^2 j}};$$

et de ces différentes formules, on conclura

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \sqrt[4]{\frac{\sin.^2 j}{\sin.^2 j \cos.^2 6 + \cos.^2 j}} \; \frac{\int_{-a}^{a} h_1^4 \varphi \sqrt{\cos. \xi - \cos. a}\, d\xi}{\int_{-a}^{a} \sqrt{\cos. \xi - \cos. a}\, d\xi}.$$

Les intégrales contenues dans cette expression pourront toujours se calculer aussi exactement qu'on voudra. Il serait intéressant de comparer le résultat de ce calcul, au rapport de ε à ε_1 donné par l'observation. Si l'amplitude des oscillations est très-petite, le facteur φ pourra être regardé comme constant, et l'on aura à très-peu près

$$h_1^4 \varphi = \tfrac{1}{2} \cos.^2 i + \sin.^2 i = \frac{\tfrac{1}{2} + \cos.^2 6 \sin.^2 j}{\sin.^2 j \cos.^2 6 + \cos.^2 j};$$

d'où il résultera

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{(1 + 2\cos.^2 6 \sin.^2 j) \sqrt{\sin. j}}{2(\sin.^2 j \cos.^2 6 + \cos.^2 j)^{\frac{5}{4}}};$$

valeur qui ne variera plus, dans un même lieu, qu'avec l'azimut de l'aiguille d'inclinaison. Si elle est située successivement dans le plan du méridien magnétique et dans un plan perpendiculaire, et qu'on prenne, comme à Paris,

$j=22^\circ$ pour le complément de l'inclinaison magnétique, on aura dans le premier cas

$$\varepsilon=\tfrac{1}{2}\varepsilon_1(1+2\sin.^2 j)\sqrt{\sin. j}=(0,3697)\varepsilon_1,$$

et dans le second,

$$\varepsilon=\tfrac{1}{2}\varepsilon_1(1+\text{tang.}^2 j)\sqrt{\text{tang.} j}=(0,3919)\varepsilon_1;$$

ce qui montre que les oscillations de l'aiguille inclinée diminueront, toutes choses d'ailleurs égales, moins rapidement que celles de l'aiguille horizontale.

(53) Nous nous sommes bornés à considérer le cas d'une plaque très-mince; mais en terminant ce Mémoire, nous ajouterons qu'on pourrait aussi résoudre l'équation (a) du n° 26, dans le cas opposé où l'épaisseur de la plaque serait très-grande, et considérée comme infinie, de même que son étendue dans le sens horizontal. En supposant toujours les centres des forces extérieures situés au-dessus de la plaque, et conservant les notations précédentes, l'équation (13) du n° 16 sera simplement, dans ce dernier cas,

$$Q=k\int_0^\infty\int_0^{2\pi}U_1\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)rdrdu.$$

Il suffira donc de connaître la valeur de $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$. Celle de l'intégrale X, contenue dans l'équation (a), sera donnée par l'équation (c) en y supprimant $\left[\frac{d\varphi}{dx}\right]$. En la substituant dans cette équation et faisant $x=b$, on aura, pour déterminer $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$, une équation comprise dans l'équation (d), où l'on pren-

dra $\frac{2\pi k}{3}$ pour a. Si donc on fait

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = F''t,$$

on en conclura, comme dans le n° 31, qu'après un temps très-court, la valeur de $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ sera exprimée par la formule :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{3p}{4\pi}\int_0^\infty \frac{dF''(t-g''z)}{dt}\, e^{-z}\, dz,$$

pourvu qu'on la développe suivant les puissances de g'', que l'on remplace ensuite leurs exposants par des indices inférieurs, et qu'on prenne pour g_1'', g_2'', g_3'', etc., les valeurs données par ces équations :

$$p_1 - \tfrac{1}{2}p^2 = pg_1'',$$
$$p_2 - p_1 p + \tfrac{1}{4}p^3 = pg_2'',$$
etc.,

qui remplacent les équations (g) ou (h) du n° cité. Au lieu de l'équation (k), on aura donc, dans le cas d'une plaque très-épaisse,

$$Q = \frac{3p}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{2\pi} U_1 \frac{dF''(t-g''z)}{dt} e^{-z}\, r\,dz\,dr\,du;$$

et en partant de cette expression de Q, on résoudra sans difficulté tous les problèmes relatifs à une aiguille inclinée ou horizontale, dont nous nous sommes occupés dans ce § et dans le précédent.

MÉMOIRE

Sur le calcul numérique des Intégrales définies.

Par M. POISSON.

Lu à l'Académie des Sciences, le 11 décembre 1826.

Le calcul des intégrales définies est peut-être la partie de l'analyse dont les applications sont les plus nombreuses et les plus variées. Non-seulement elles comprennent la rectification des courbes, l'évaluation des surfaces et des solides, la détermination des centres de gravité, mais encore, la plupart des problèmes de mécanique ou de physique qui se résolvent par le calcul intégral, et conduisent à des expressions des inconnues en intégrales définies. Aussi, depuis Euler et surtout dans ces derniers temps, les géomètres se sont-ils beaucoup occupés d'étendre et de perfectionner cet important calcul. Dans le petit nombre de cas où l'intégrale générale est connue sous forme finie, on en déduit immédiatement l'intégrale définie; dans d'autres cas, beaucoup plus étendus, on parvient à trouver la valeur exacte de l'une sans connaître celle de l'autre; mais le plus souvent on est

obligé de recourir aux méthodes d'approximation. Celles-ci consistent en des moyens particuliers à quelques intégrales, d'après lesquels on parvient à les faire dépendre les unes des autres et à les réduire en tables, ainsi que M. Legendre l'a pratiqué à l'égard des *transcendantes elliptiques* et de deux autres classes d'intégrales que notre confrère a nommées *Eulériennes*. Quelquefois aussi, on peut réduire la quantité soumise à l'intégration, en une série convergente dont les termes sont intégrables par les règles ordinaires. Mais quand toutes ces ressources manquent, on emploie un procédé général de calcul, fondé sur la nature même des intégrales, et que l'on appelle proprement *la méthode des quadratures*; dénomination qui lui vient de ce que le problème est le même que celui de trouver l'aire d'une courbe plane, ou le côté du carré équivalent. C'est cette méthode, envisagée sous un nouveau point de vue, qui est l'objet principal de ce Mémoire.

---

(1) Une intégrale définie est la somme des valeurs de la différentielle, comprises entre les limites de l'intégration, et supposées toutes infiniment petites, ce qui ne souffre d'exception que quand le coëfficient différentiel devient infini entre ces limites. Il en résulte que si l'on prend seulement un grand nombre de ces valeurs, et qu'on y remplace la différentielle de la variable par sa différence finie, on aura une valeur de l'intégrale, d'autant plus approchée que cette différence sera plus petite; et la méthode dont nous allons nous occuper, consiste à trouver, exactement ou par approximation, la correction qu'il faudra faire subir à ce premier résultat.

Nous supposerons les valeurs de la variable qui répondent aux deux limites de l'intégrale, égales et de signes contraires, ce qu'on peut toujours obtenir en augmentant ou diminuant la variable d'une quantité constante. Nous désignerons ces limites par $\pm a$; et pour les indiquer en même temps que l'intégrale, nous emploierons la notation très-commode que M. Fourrier a proposée. Ainsi

$$\int_{-a}^{a} fx\,dx,$$

désignera l'intégrale de $fx\,dx$, prise depuis $x = -a$ jusqu'à $x = +a$; fx étant une fonction donnée qui ne devient pas infinie entre ces limites.

Partageons a en un nombre n de parties égales; soit ω la grandeur de chacune d'elles, en sorte qu'on ait $a = n\omega$; faisons, pour abréger,

$$\tfrac{1}{2}f(-n\omega) + f(-n\omega + \omega) + f(-n\omega + 2\omega) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + f(n\omega - 2\omega) + f(n\omega - \omega) + f(n\omega) = P_n:$$

en remplaçant dx par ω, on pourra prendre, d'après le principe précédent, ωP_n pour la valeur approchée de notre intégrale; et si l'on désigne par Q_n la correction dont elle est susceptible, on aura exactement

$$\int_{-a}^{a} fx\,dx = \omega P_n + Q_n. \qquad (1)$$

Au lieu de ne faire entrer dans P_n, qu'une seule des deux valeurs extrêmes de fx, on a pris, pour la symétrie du calcul, la moitié de chacune d'elles; ce qui est permis tant que

la correction Q_n n'est pas déterminée. Il s'agit maintenant de trouver la valeur inconnue de cette quantité, en fonction du nombre n, ou de la différence ω.

(2) Pour y parvenir, je ferai usage de la formule :

$$fx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} fx'dx' + \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty} \cos.\frac{i\pi(x-x')}{a}\right] fx'dx', \quad (2)$$

qui se trouve dans mon dernier Mémoire sur les intégrales définies, inséré dans le dix-neuvième cahier du journal de l'École Polytechnique. Elle représente fx pour toutes les valeurs de $x > -a$ et $< a$; à chacune des valeurs extrêmes $x = \pm a$, le second membre de cette équation est égal à la demi-somme des valeurs correspondantes de fx, c'est-à-dire, qu'il faut joindre à l'équation (2), celle-ci :

$$\frac{1}{2}[fa + f(-a)] = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} fx'dx' + \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty} \cos.\frac{i\pi(a-x')}{a}\right] fx'dx'. \quad (3)$$

On représente, à l'ordinaire, par π le rapport de la circonférence au diamètre; i est un nombre entier et positif, et la somme comprise sous les signes $\int$, s'étend, comme l'indique la notation $\sum_{1}^{\infty}$, à toutes les valeurs de i depuis $i = 1$ jusqu'à $i = \infty$. Mais avant d'employer ces équations, il convient de rappeler la démonstration que j'en ai donnée, en regardant chacune des séries périodiques qu'elles renferment, comme la limite d'une autre série convergente.

Soit donc α une quantité positive et moindre que l'unité.

Considérons l'expression

$$X = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} fx'\,dx' + \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{1}^{\infty} \alpha^i \cos.\frac{i\pi(x-x')}{a}\right] fx'\,dx';$$

le second membre de l'équation (2) sera la valeur de X qui répond à la limite où la différence $1-\alpha$ est infiniment petite; ainsi il s'agit de faire voir qu'à cette limite on a $X = fx$, pour $x > -a$ et $< a$.

Or, en développant suivant les puissances de α, on a, en série convergente,

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos.\frac{\pi(x-x')}{a}+\alpha^2} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} \alpha^i \cos.\frac{i\pi(x-x')}{a};$$

on aura donc

$$X = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \frac{(1-\alpha^2) fx'\,dx'}{1-2\alpha\cos.\frac{\pi(x-x')}{a}+\alpha^2}.$$

Le coëfficient de dx' sous le signe intégral, devient infiniment petit en même temps que $1-\alpha$, excepté pour les valeurs de x' qui rendent $\cos.\frac{\pi(x-x')}{a}$ infiniment peu différent de l'unité, et, par conséquent, le dénominateur aussi infiniment petit. Mais x étant $> -a$ et $< a$, et la variable x' ne sortant pas non plus de ces limites, cette circonstance ne peut avoir lieu que pour des valeurs de $x'-x$, infiniment petites, positives ou négatives; il suffira donc d'étendre l'intégrale aux valeurs de x' infiniment peu différentes de x; et dans cette étendue, on pourra considérer la fonction fx'

comme constante et égale à fx. Si donc on fait

$$1-\alpha=g,\quad x'=x+h,\quad dx'=dh,$$

et que l'on traite g et h comme des quantités infiniment petites, on aura pour la limite demandée :

$$X=\frac{fx}{a}\int\frac{g\,dh}{g^2+\frac{\pi^2h^2}{a^2}}.$$

Comme cette dernière intégrale est infiniment petite, pour toute valeur finie de la variable, on pourra l'étendre à des valeurs de h aussi grandes que l'on voudra ; en désignant donc par δ une quantité positive et finie, dont la grandeur est arbitraire, et intégrant depuis $h=-\delta$ jusqu'à $h=+\delta$, nous aurons

$$X=\frac{2fx}{\pi}\,\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\delta}{g}\right);$$

quantité qui se réduit à $X=fx$, à cause de g infiniment petit ; ce qu'il s'agissait de démontrer.

Dans le cas de $x=a$, on rendra $\cos.\frac{\pi(x-x')}{a}$ infiniment peu différent de l'unité, en supposant successivement $x'=a+h$ et $x'=-a+h$, et traitant toujours h comme une variable infiniment petite ; mais pour que x' ne sorte pas des limites $\pm a$, il faudra n'intégrer que depuis $h=-\delta$ jusqu'à $h=0$ dans la première hypothèse, et depuis $h=0$ jusqu'à $h=+\delta$ dans la seconde ; ce qui réduira chaque portion d'intégrale à la moitié de la valeur précédente. Alors on aura, dans ce cas,

$$X=\tfrac{1}{2}[fa+f(-a)],$$

pour la limite de X; et l'on trouvera le même résultat dans le cas de $x=-a$; ce qui coïncide avec l'équation (3).

(3) Maintenant, pour faire de l'équation (2) l'usage que nous avons en vue, mettons-y $n\omega$ à la place de a; puis donnons successivement à x, ces $2n-1$ valeurs équi-différentes :

$$-(n-1)\omega, -(n-2)\omega \ldots -\omega, 0, +\omega, \ldots (n-2)\omega, (n-1)\omega,$$

pour lesquelles cette équation subsiste. En prenant la somme des résultats, et ajoutant la demi-somme des valeurs de fx relatives à $\pi=\pm a$, on en conclura

$$\omega P_n = \frac{\omega}{2}[fa+f(-a)] + \frac{2n-1}{2n}\int_{-a}^{a} fx'dx'$$
$$+ \frac{1}{n}\int_{-a}^{a}\left[\sum_{0}^{\infty} p\cos.\frac{i\pi x'}{n\omega}\right]fx'dx',$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$p = 1 + 2\cos.\frac{i\pi}{n} + 2\cos.\frac{2i\pi}{n} + 2\cos.\frac{3i\pi}{n} + \ldots + 2\cos.\frac{(n-1)i\pi}{n}.$$

Cette quantité p est évidemment égale à $2n-1$ toutes les fois que i est un multiple de $2n$. Si on la multiplie par $\cos.\frac{i\pi}{n}$, on trouve, en réduisant,

$$p\cos.\frac{i\pi}{n} = p + \cos.i\pi - \cos.\frac{(n-1)i\pi}{n};$$

d'où l'on tire $p=-\cos.i\pi$, pour les autres valeurs de i. D'après cela, je prends d'abord la somme $\sum_{1}^{\infty}$ en supposant

que cette dernière valeur de p ait lieu sans exception; ensuite, je fais $i=2i'n$, et je prends une seconde somme $\sum_1^\infty$ relative à i', en supposant que $2n-1+\cos.2i'n\pi$, ou $2n$, soit la valeur de p: la série périodique, contenue sous le signe intégral, se composera évidemment de ces deux séries ainsi calculées; et en faisant attention qu'on a

$$\cos.i\pi\cos.\frac{i\pi x'}{n\omega}=\cos.\frac{i\pi(a-x')}{a},$$

on en conclura

$$\sum_1^\infty p\cos.\frac{i\pi x'}{n\omega}=-\sum_1^\infty\cos.\frac{i\pi(a-x')}{a}+2n\sum_1^\infty\cos.\frac{2i'\pi x'}{\omega}.$$

De cette manière, la valeur précédente de ωP_n deviendra

$$\omega P_n=\frac{\omega}{2}[fa+f(-a)]+\left(1-\frac{\omega}{a}\right)\int_{-a}^a fx'dx'$$

$$-\frac{\omega}{a}\int_{-a}^a\left[\sum_1^\infty\cos.\frac{i\pi(a-x')}{a}\right]fx'dx'+2\int_{-a}^a\left[\sum_1^\infty\cos.\frac{2i'\pi x'}{\omega}\right]fx'dx'.$$

En ayant égard à l'équation (3), celle-ci se réduit à

$$\omega P_n=\int_{-a}^a fx'dx'+2\int_{-a}^a\left[\sum_1^\infty\cos.\frac{2i'\pi x'}{\omega}\right]fx'dx';$$

et si l'on y remplace x' et i' par x et i, et qu'on la compare à l'équation (1), il en résultera

$$Q_n=-2\int_{-a}^a\left[\sum_1^\infty\cos.\frac{2i\pi x}{\omega}\right]fx\,dx.$$

Ainsi la correction qu'on doit faire subir à la première valeur approchée de notre intégrale, se trouve exprimée par une autre intégrale définie; mais, par le procédé de l'intégration par partie, celle-ci se réduit en une série ordonnée suivant les puissances de ω, dont il suffira généralement de considérer les premiers termes.

(4) Soit, pour cela,

$$1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m}A_m;$$

la série se prolongeant à l'infini, m étant un nombre entier, et A_m un coëfficient dont la valeur exacte est connue pour toutes les valeurs de m. En intégrant $2m-1$ fois de suite par partie, et observant qu'aux limites $\pm a$, ou $\pm n\omega$, on a

$$\cos.\frac{2i\pi x}{\omega}=1, \quad \sin.\frac{2i\pi x}{\omega}=0,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
Q'_n = &-\omega^2\left(\left[\frac{dfx}{dx}\right]-\left(\frac{dfx}{dx}\right)\right)A_1\\
&+\omega^4\left(\left[\frac{d^3fx}{dx^3}\right]-\left(\frac{d^3fx}{dx^3}\right)\right)A_2\\
&-\omega^6\left(\left[\frac{d^5fx}{dx^5}\right]-\left(\frac{d^5fx}{dx}\right)\right)A_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(-1)^m\omega^{2m}\left(\left[\frac{d^{2m-1}fx}{dx^{2m-1}}\right]-\left(\frac{d^{2m-1}fx}{dx^{2m-1}}\right)\right)A_m+R_m:
\end{aligned}$$

les différentielles comprises entre les parenthèses se rapportent à la première limite $x=-a$, celles qui sont renfermées entre des crochets répondent à la seconde $x=a$, et

l'on a fait, pour abréger,

$$R_m = -2(-1)^m\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m}\int_{-a}^{a}\left[\sum_0^\infty \frac{1}{i^{2m}}\cos.\frac{2i\pi x}{\omega}\right]\frac{d^{2m}fx}{dx^{2m}}dx. \quad (4)$$

Maintenant, si l'on prolonge indéfiniment cette série, et qu'on néglige le reste R_m, l'équation (1) deviendra

$$\left.\begin{aligned}\int_{-a}^{a} fx\,dx = \omega P_n &- \omega^2\left(\left[\frac{dfx}{dx}\right]-\left(\frac{dfx}{dx}\right)\right)A_1\\ &+\omega^4\left(\left[\frac{d^3fx}{dx^3}\right]-\left(\frac{d^3fx}{dx^3}\right)\right)A_2\\ &-\omega^6\left(\left[\frac{d^5fx}{dx^5}\right]-\left(\frac{d^5fx}{dx^5}\right)\right)A_3\\ &+\text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Cette formule ne diffère pas essentiellement de celle qu'Euler a donnée pour le même objet dans son *Traité de calcul différentiel,* et qu'on peut regarder comme une des plus utiles dont il a enrichi l'analyse; mais la manière dont nous y sommes parvenus a l'avantage de faire connaître en même temps l'expression du reste R_m, que l'on néglige quand on s'arrête à un terme quelconque de la série infinie ; expression dont il sera toujours facile d'assigner une limite supérieure à sa valeur exacte; ce qui permettra d'apprécier le degré de l'approximation. Il serait à désirer que l'on eût de semblables limites pour toutes les suites infinies dont on fait usage : Lagrange les a exprimées très-simplement dans le cas du théorème de Taylor; et récemment M. Laplace s'est occupé de questions analogues, relatives aux développements des coordonnées des planètes dans le mouvement elliptique, et d'une autre fonction qui se présente dans la théorie des perturbations.

(5) Les valeurs des coëfficients A_1, A_2, A_3, etc., sont connues, comme nous l'avons dit; mais on peut aussi les déterminer au moyen de l'équation (5), en faisant une supposition sur le nombre n et sur la fonction fx. Le plus simple est de prendre $n=1$. On a alors

$$\omega=a, \quad P_n=\tfrac{1}{2}f(-a)+f0+\tfrac{1}{2}fa.$$

Si l'on désigne par e la base des logarithmes népériens, et qu'on fasse

$$fx=e^x,$$

on aura

$$\int_{-a}^{a} fx\,dx=e^a-e^{-a}, \quad P_n=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}a}+e^{-\frac{1}{2}a}\right)^2,$$

et généralement

$$\left[\frac{d^{2m-1}fx}{dx^{2m-1}}\right]-\left(\frac{d^{2m-1}fx}{dx^{2m-1}}\right)=e^a-e^{-a};$$

au moyen de quoi, en divisant les deux membres de l'équation (5) par e^a-e^{-a}, on en conclura

$$\frac{a\left(e^{\frac{1}{2}a}+e^{-\frac{1}{2}a}\right)}{2\left(e^{\frac{1}{2}a}-e^{-\frac{1}{2}a}\right)}=1+a^2A_1-a^4A_2+a^6A_3-\text{etc.}$$

Or, le premier membre ne changeant pas quand on y change le signe de a, son développement ne renfermera que des puissances paires de a; d'ailleurs, les inconnues A_1, A_2, A_3, etc., sont indépendantes de a; il en résulte donc qu'après avoir développé le premier membre, les coëfficients de

a^2, $-a^4$, a^6, etc., seront les valeurs de ces quantités; ce qui était déja connu.

En supposant toujours $n=1$, $\omega=a$, et prenant

$$fx=x^{2m},$$

on aura, m étant un nombre entier,

$$\int_{-a}^{a} fx\,dx=\frac{2a^{2m+1}}{2m+1};\quad P_n=a^{2m};$$

d'après l'équation (4), le reste R_m sera nul; et en supprimant le facteur a^{2m+1} qui se trouvera commun à tous les termes de l'équation (5), il vient

$$\frac{2m-1}{2(2m+1)}=2m\,A_1-2m.2m-1.2m-2.A_2+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm 2m.2m-1.2m-2\ldots 3.2.A_m.$$

Cette relation connue entre les quantités A_1, A_2, A_3, etc., servira à les déterminer les unes au moyen des autres, en y faisant successivement $m=1$, $=2$, $=3$, etc. On trouve, de cette manière,

$$A_1=\frac{1}{12},\quad A_2=\frac{1}{720},\quad A_3=\frac{1}{30240},\ \text{etc.}$$

(6) Si l'on veut que l'intégrale proposée commence avec la variable, et soit prise depuis zéro jusqu'à une limite donnée c, on diminuera x de a, et l'on fera $2a=c$. Mettons ensuite fx à la place de $f(x-a)$, et n au lieu de $2n$; la différence ω sera la n.ième partie de c; la quantité P_n se composera de $n+1$ termes, savoir :

$$P_n=\tfrac{1}{2}f0+f\omega+f2\omega+\ldots+f(n\omega-\omega)+\tfrac{1}{2}fc;$$

et si l'on substitue à la place de A_1, A_2, A_3, etc., leurs valeurs numériques, l'équation (5) deviendra

$$\left.\begin{aligned}\int_0^c fx\,dx = \omega P_n &- \frac{\omega^2}{12}\left(\left[\frac{dfx}{dx}\right] - \left(\frac{dfx}{dx}\right)\right)\\ &+ \frac{\omega^4}{720}\left(\left[\frac{d^3fx}{dx^3}\right] - \left(\frac{d^3fx}{dx^3}\right)\right)\\ &- \frac{\omega^6}{30240}\left(\left[\frac{d^5fx}{dx^5}\right] - \left(\frac{d^5fx}{dx^5}\right)\right)\\ &+ \text{etc.};\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

les différentielles comprises entre des parenthèses ou entre des crochets, répondant toujours, les premières à la première limite $x = 0$, et les secondes à la seconde limite $x = c$.

A cause que a est un multiple de ω, le cosinus de $\frac{2i\pi n}{\omega}$ reste le même dans le changement de x en $x - a$; le reste R_m donné par l'équation (4), qu'il faut ajouter à cette série quand on s'arrête au n.ième terme inclusivement, aura donc pour expression :

$$R_m = -2(-1)^m \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m} \int_0^c \left[\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2m}} \cos.\frac{2i\pi x}{\omega}\right] \frac{d^{2m}fx}{dx^{2m}}\,dx. \quad (7)$$

En intégrant encore une fois, et observant que $\sin.\frac{2i\pi x}{\omega}$ est nul à la seconde limite $x = c = n\omega$, aussi bien qu'à la première $x = 0$, on peut donner à R_m cette autre forme équivalente :

$$R_m = 2(-1)^m \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m+1} \int_0^c \left[\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2m+1}} \sin.\frac{2i\pi x}{\omega}\right] \frac{d^{2m+1}fx\,dx}{dx^{2m+1}}. \quad (8)$$

Pour obtenir des limites de ces expressions, désignons par B_m et C_m des quantités connues, telles que l'on ait, abstraction faite du signe,

$$\frac{d^{2m} fx}{dx^{2m}} < B_m, \quad \frac{d^{2m+1} fx}{dx^{2m+1}} < C_m,$$

pour toutes les valeurs de x comprises depuis zéro jusqu'à c; soit, en outre,

$$1 + \frac{1}{2^{2m+1}} + \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{4^{2m+1}} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m+1} A'_m :$$

en observant qu'on a évidemmment

$$\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2m}} \cos. \frac{2i\pi x}{\omega} < \tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m} A_m,$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2m+1}} \sin. \frac{2i\pi x}{\omega} < \tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m+1} A'_m,$$

on en conclura, en grandeur absolue,

$$R_m < c\omega^{2m} A_m,$$

d'après la formule (7), et

$$R_m < c\omega^{2m+1} A'_m,$$

d'après la formule (8).

Ces limites montrent que pour une même valeur de m, ou pour un même nombre de termes de la série (6), l'approximation croîtra indéfiniment à mesure que ω diminuera; mais quel que soit ω, l'approximation ne croîtra pas de même

avec le nombre m, et il arrivera très-souvent qu'elle décroîtra au-delà d'un certain nombre de termes. C'est ce qui aura lieu quand les quantités B_m et C_m augmenteront plus rapidement avec m, que ω^{2m} ne diminuera, et alors la série (6), après avoir été convergente dans les premiers termes, deviendra divergente et par conséquent inexacte. Dans le cas de $c=\infty$, ces limites seront illusoires, et il en faudra déterminer d'autres, propres à chaque exemple particulier.

La valeur exacte de la quantité A'_m qui entre dans la seconde limite, n'est pas connue comme celle de A_m. On a fait usage de différentes méthodes pour calculer sa valeur approchée; nous indiquerons celle que fournit l'équation (6), en y faisant

$$fx=\frac{1}{(1+x)^{2m+1}},\quad \omega=1,\quad c=\infty.$$

On a alors

$$\int_0^c fx\,dx=\frac{1}{2m},\quad P_n=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m+1}A'_m;$$

et quel que soit le nombre entier i, on a aussi

$$\left[\frac{d^{2i-1}fx}{dx^{2i-1}}\right]=0,\ \left(\frac{d^{2i-1}fx}{dx^{2i-1}}\right)=-2m+1.2m+2\ldots 2m+2i-1.$$

Au moyen de ces valeurs, on tire de l'équation (6) :

$$(2\pi)^{2m+1}A'_m=\frac{m+1}{m}+\frac{m+1}{6}-\frac{m+1.m+2.m+3}{360}$$
$$+\frac{m+1.m+2.m+3.m+4.m+5}{15120}-\text{etc.}$$

En appelant μ le nombre de termes de cette série que l'on

conservera, à partir du second, et M le reste qu'il y faudrait ajouter, on aura, d'après la formule (7) :

$$M = -(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2\mu}.m+1.m+2\ldots m+2\mu.\int_0^{\infty}\left[\sum \frac{1}{i^{2\mu}}\cos.2i\pi x\right]\frac{dx}{(1+x)^{m+2\mu}}.$$

Il sera alternativement positif et négatif, ce qui montre que la série précédente donnera des valeurs de A'_m, alternativement plus grandes et plus petites que la valeur exacte, et qui en différeront, par conséquent, d'une quantité moindre que le terme où l'on s'arrêtera.

(7) On peut éliminer les différentielles de la fonction fx qui sont contenues dans la formule (6), et les remplacer par ses différences finies.

En effet, soit

$$Fz = fz + f(c-z);$$

désignons par Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc., les différences successives de Fz, qui répondent à $z=0$, et sont prises en supposant $\Delta z = \omega$, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= F2\omega - F0,\\
\Delta_2 &= F2\omega - 2F\omega + F0,\\
\Delta_3 &= F3\omega - 3F2\omega + 3F\omega - F0,\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

nous aurons cette formule d'interpolation :

$$Fz = F0 + \frac{z}{\omega}\Delta_1 + \frac{z(z-\omega)}{2\omega^2}\Delta_2 + \frac{z(z-\omega)(z-2\omega)}{2.3.\omega^3}\Delta_3 + \text{etc.};$$

d'après les notations précédentes, on aura aussi

$$\left(\frac{d^{2m-1}fx}{dx^{2m-1}}\right)-\left[\frac{d^{2m-1}fx}{dx^{2m-1}}\right]=\frac{d^{2m-1}Fz}{dz^{2m-1}},$$

pourvu qu'on fasse $z=0$ après la différentiation : il en résultera

$$\omega\left(\left(\frac{dfx}{dx}\right)-\left[\frac{dfx}{dx}\right]\right)=\Delta_1-\tfrac{1}{2}\Delta_2+\tfrac{1}{3}\Delta_3-\tfrac{1}{4}\Delta_4+\text{etc.},$$

$$\omega^3\left(\left(\frac{d^3fx}{dx^3}\right)-\left[\frac{d^3fx}{dx^3}\right]\right)=\Delta_3-\tfrac{3}{2}\Delta_4+\text{etc.},$$

etc. ;

et en substituant ces valeurs dans l'équation (6), il vient

$$\int_0^c fx\,dx=\omega P_n+\frac{\omega}{12}\Delta_1-\frac{\omega}{24}\Delta_2+\frac{19\omega}{720}\Delta_3-\frac{3\omega}{160}\Delta_4+\text{etc.}\quad (9).$$

En y faisant $\omega=1$, cette formule coïncide avec celle que M. Laplace a donnée dans le tome IV de la *Mécanique céleste*. Elle ne suppose pas connue l'expression de fx. Pour en faire usage, il suffira d'avoir un nombre $n+1$ de valeurs numériques de cette quantité, correspondantes à autant de valeurs équi-différentes de x : on ne pourra toutefois l'employer utilement que quand les différences Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc., décroîtront très-rapidement.

La formule d'interpolation dont nous sommes partis, ne subsiste pas lorsque fx est une fonction périodique de $\sin. 2\pi x$ et $\cos. 2\pi x$, et que l'on prend $\omega=1$; car alors toutes les différences Δ_1, Δ_2, Δ_3, etc., qu'elle contient, seraient nulles, et l'on aurait $Fz=F0$, ce qui n'est pas vrai. Il en résulte que l'équation (9) que nous en avons déduite, n'aura pas lieu non plus dans ce cas particulier; mais on obvie à cet incon-

vénient en prenant une autre valeur pour la différence ω qui peut être aussi petite que l'on voudra.

(8) La formule d'Euler se trouve en défaut dans un autre cas, ainsi que M. Legendre en a fait la remarque à la fin de son traité des *Fonctions elliptiques* (1). Ce cas a lieu lorsque les différentielles impaires de fx s'évanouissent, ou, plus généralement, sont égales aux deux limites de l'intégrale que l'on considère. Quelle que soit la quantité ω, l'équation (6) se réduirait alors à

$$\int_0^c fx\,dx = \omega P_n;$$

d'où il résulterait que l'intégrale proposée s'exprimerait sous forme finie, et que sa valeur dépendrait du nombre arbitraire n, ce qui serait absurde. Mais ce résultat provient de ce que l'on a négligé le reste R_m, qui, dans ce cas particulier, au lieu de décroître à mesure que m augmente, est au contraire indépendant de la grandeur de ce nombre. En effet, en intégrant par partie, et observant qu'on a, par hypothèse,

$$\left(\frac{d^{2m+1}fx}{dx^{2m+1}}\right) = \left[\frac{d^{2m+1}fx}{dx^{2m+1}}\right],$$

la formule (8) donnera

$$R_m = 2(-1)^m\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m+2}\int_0^c \left[\sum_1^\infty \frac{1}{i^{2m+2}}\cos.\frac{2i\pi x}{\omega}\right]\frac{d^{2m+1}fx}{dx^{2m+1}}dx;$$

et si l'on compare cette expression à la formule (7) dans la-

---

(1) Tome II, page 578.

quelle on augmentera m d'une unité, on en conclura

$$R_{m+1}=R_m;$$

c'est-à-dire, que le reste R_m est constant par rapport au nombre m.

Dans ce cas singulier, si $\frac{\omega}{2\pi}$ est une fraction, le facteur $\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2m}$ que ce reste renferme, diminue indéfiniment à mesure que m augmente; mais en même temps l'autre facteur augmente à raison des différentiations successives de fx, de telle sorte que le produit demeure constant. Cependant, il n'en sera pas de même à l'égard de la limite supérieure à R_m que l'on pourra assigner; elle dépendra de m, et décroîtra d'autant plus rapidement avec ω que ce nombre m sera plus grand.

(9) Nous choisirons pour exemple de cette anomalie, l'intégrale qui donne le quart de la circonférence d'une ellipse, que nous appellerons E. En prenant pour unité le demi-grand axe, et désignant l'excentricité par h, nous aurons alors

$$E=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-h^2\sin.^2 x}\,dx;$$

on fera donc, dans l'équation (6),

$$c=\tfrac{1}{2}\pi,\quad fx=\sqrt{1-h^2\sin.^2 x};$$

et il est évident que toutes les différentielles impaires de fx seront nulles aux deux limites $x=0$ et $x=\frac{1}{2}\pi$, à cause du facteur $\sin.x\cos.x$ dont elles seront affectées.

Le coëfficient différentiel de fx, d'un ordre quelconque, se composera de termes dont les diviseurs seront les puissances impaires de fx, et qui ne renfermeront que des puissances entières de sin. $2x$ et cos. $2x$ à leurs numérateurs; on substituera facilement à chaque numérateur, une plus grande quantité abstraction faite du signe; prenant en outre, pour fx sa moindre valeur $\sqrt{1-k^2}$, on formera ainsi une quantité supérieure au coëfficient différentiel $\frac{d^{2m}fx}{dx^{2m}}$ qui entre dans la formule (7). Soit H cette quantité; en mettant aussi dans cette formule, $\frac{1}{2}(2\pi)^{2m}A_m$ à la place de la série qu'elle renferme, et pour ω sa valeur $\frac{\pi}{2n}$, nous en conclurons

$$R_m < \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2m} H A_m,$$

en grandeur absolue.

Appelons I le rayon du cercle dont la circonférence est équivalente à celle de l'ellipse que nous considérons, de sorte qu'on ait $E = \frac{1}{2}\pi I$. D'après la formule d'Euler, nous aurons cette valeur approchée :

$$I = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f0 + f\frac{\pi}{2n} + f\frac{2\pi}{2n} + f\frac{3\pi}{2n} + \ldots + f\frac{(n-1)\pi}{2n} + \frac{1}{2}f\frac{\pi}{2}\right);$$

et si l'on désigne par δI, l'erreur dont elle susceptible, on aura en même temps

$$\delta I < \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2m} H A_m.$$

En supposant $k = 0,6$, et s'arrêtant à $m = 3$, on trouve qu'on peut prendre pour H, le nombre 40; et si l'on substitue, en outre, pour π et A_3 leurs valeurs numériques, il

vient

$$\delta \mathrm{I} < \frac{0{,}01987}{n^6}.$$

Soit ensuite $n=4$; la valeur approchée de I sera

$$\mathrm{I} = 0{,}9927799272;$$

à quoi il faudra joindre

$$\delta \mathrm{I} < 0{,}0000048311;$$

de sorte que l'erreur sera moindre qu'une demi-unité décimale du 6ᵉ ordre. Elle est, en effet, plus petite; car en calculant, par les méthodes particulières aux transcendantes elliptiques, une valeur de I exacte jusqu'aux décimales du 14ᵉ ordre inclusivement, M. Legendre a trouvé qu'elle ne différait de la précédente que d'une demi-unité du 10ᵉ ordre.

Il est à remarquer que dans ce même exemple, la série des différences, contenue dans la formule (9), n'est pas convergente; et qu'en y ayant égard, on s'écarte plus de la valeur exacte de E, qu'en s'en tenant à la seule partie $\omega \mathrm{P}_n$ de cette formule.

(10) Si l'on supprime en entier dans l'équation (6), la série des différentielles de fx, il faudra ajouter à son second membre la valeur de R_m qui répond à $m=0$. Je fais passer cette quantité dans le premier membre, et je suppose qu'on ait $c=\infty$, ce qui change $\omega \mathrm{P}_n$ en une série infinie; il en résulte cette transformation d'une série dans une autre :

$$\int^{\infty} fx\,dx + 2\sum_{1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} \cos.\frac{2i\pi x}{\omega} fx\,dx\right) = \tfrac{1}{2}f0 + \sum_{1}^{\infty} fi\omega, \quad (10)$$

en déduisant l'expression de R_0, de la formule (7). Mais pour que cette nouvelle formule soit utile, il faudra l'appliquer à des cas dans lesquels les intégrations relatives à x puissent s'effectuer sous forme finie.

Si nous prenons, par exemple,

$$fx = e^{-x^2}\cos.2ax,$$

e désignant la base des logarithmes népériens, et a une constante donnée, nous aurons

$$2\int_0^\infty \cos.\frac{2i\pi x}{\omega} fx\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-\left(a+\frac{i\pi}{\omega}\right)^2} + e^{-\left(a-\frac{i\pi}{\omega}\right)^2}\right];$$

d'où nous conclurons

$$\sqrt{\pi}\,\Sigma e^{-\left(a+\frac{i\pi}{\omega}\right)^2} = \omega\Sigma e^{-i^2\omega^2}\cos.2ia\omega;$$

les sommes Σ s'étendant actuellement à toutes les valeurs de i, entières, positives, négatives ou zéro, depuis $i = -\infty$ jusqu'à $i = \infty$. Cette équation est identique dans le cas de $a = 0$ et $\omega = \sqrt{\pi}$. En faisant $\omega = \sqrt{\pi}$, $a = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, et, pour abréger, $e^{-\pi} = \varepsilon$, on en déduit

$$\Sigma\varepsilon^{\left(\frac{1}{2}+i\right)^2} = \Sigma(-1)^i\varepsilon^{i^2},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{\frac{9}{4}} + \varepsilon^{\frac{25}{4}} + \varepsilon^{\frac{49}{4}} + \text{etc.} = \frac{1}{2} - \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^9 + \text{etc.};$$

équation entre les deux transcendantes e et π, qui mérite

d'être remarquée, quoiqu'elle ne soit pas sous forme finie, et qu'il ne semble pas qu'on puisse l'y ramener.

(11) Soit encore

$$fx=\frac{\cos. ax}{b^2+x^2};$$

a et b étant des constantes que nous regarderons comme positives. On aura, par les formules connues,

$$\int_0^\infty \frac{2\cos. 2i\pi x \cos. ax}{b^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2b}\left(e^{\mp b(2i\pi-a)}+e^{-b(2i\pi+a)}\right); \quad (11)$$

le signe supérieur ou le signe inférieur ayant lieu dans la première exponentielle, selon que l'on a $a <$ ou $> 2i\pi$, afin que son exposant soit toujours négatif. D'après cela, si l'on désigne par $2n\pi$, le plus grand multiple de 2π qui soit contenu dans a, il faudra prendre le premier signe, lorsqu'on aura $i > n$, et le second, dans le cas de $i=n$ ou $< n$.

En partageant la somme $\sum_1^\infty$ en deux autres, dont l'une soit prise depuis $i=1$ jusqu'à $i=n$, et l'autre depuis $i=n+1$ jusqu'à $i=\infty$, et sommant les progressions géométriques qui en résulteront, on en conclura

$$\sum_1^\infty \int_0^\infty \frac{2\cos. 2i\pi x\cos. ax}{b^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2b}\,\frac{e^{-b(2\pi+2n\pi-a)}+e^{-b(2\pi+a)}}{1-e^{-2\pi b}}$$
$$+\frac{\pi}{2b}\,\frac{e^{b(2\pi-a)}-e^{b(2\pi+2n\pi-a)}}{1-e^{2\pi b}}.$$

On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty \frac{\cos. ax}{b^2+x^2}=\frac{\pi}{2b}e^{-ab}\,dx; \quad (12)$$

si donc on prend $\omega=1$, la formule (10) deviendra, toute réduction faite,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\pi\left[e^{-b(a-2n\pi-\pi)}+e^{b(a-2n\pi-\pi)}\right]}{2b\left(e^{\pi b}-e^{-\pi b}\right)}=\\&\frac{1}{2b^2}+\frac{\cos.a}{b^2+1}+\frac{\cos.2a}{b^2+4}+\frac{\cos.3a}{b^2+9}+\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

En différentiant cette équation par rapport à a, on en déduit cette autre :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\pi\left[e^{-b(a-2n\pi-\pi)}-e^{b(a-2n\pi-\pi)}\right]}{2\left(e^{\pi b}-e^{-\pi b}\right)}=\\&\frac{\sin.a}{b^2+1}+\frac{2\sin.2a}{b^2+4}+\frac{3\sin.3a}{b^2+9}+\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Au moyen du nombre n qu'elle renferme, l'équation (13) subsiste pour toutes les valeurs réelles et positives de a, parce qu'en effet, les équations (11) et (12) dont nous sommes partis, ont lieu sans exception. Mais il n'en est pas de même à l'égard de leurs différentielles par rapport à a, et pour cette raison, l'équation (14) est en défaut quand a est zéro ou un multiple de 2π.

Pour la rendre applicable à ces valeurs particulières, j'observe qu'en différentiant l'équation (12), et faisant ensuite $a=0$, on aurait

$$\int_0^\infty \frac{x\sin.ax}{b^2+x^2}dx=\frac{1}{2}\pi,$$

tandis que cette intégrale est évidemment nulle ; dans le cas de $a=0$, il faut donc retrancher du premier membre de

l'équation (14), le terme $\frac{1}{2}\pi$ qu'il renferme de trop; ce qui le réduit effectivement à zéro, comme le second membre. Dans le cas de $a=2n\pi$ et $i=n$, la différentielle de l'équation (11) par rapport à a, donnerait

$$\int_0^\infty \frac{2x\cos.2n\pi x\sin.2n\pi x}{b^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2}\left(1+e^{-4n\pi b}\right);$$

au lieu que la valeur exacte de cette intégrale est seulement $\frac{1}{2}\pi e^{-4n\pi b}$; d'où il résulte que pour la valeur particulière $a=2n\pi$, le premier membre de l'équation (14) renferme aussi un terme $\frac{1}{2}\pi$ qui ne devrait pas s'y trouver : en l'en retranchant, ce premier membre devient nul en même temps que le second.

Les équations (11) et (12), ainsi que leurs différentielles, et, par conséquent, les formules (13) et (14) qui en dérivent, subsistent encore quand on y remplace b par $g+b\sqrt{-1}$; g et b étant des quantités réelles, dont la première est positive, mais aussi petite que l'on voudra. Après cette substitution, si l'on suppose que la partie g devienne infiniment petite, et qu'on la supprime en conséquence, on aura

$$\frac{\pi\cos.b(a-2n\pi-\pi)}{2b\sin.\pi b}=\frac{1}{2b^2}+\frac{\cos.a}{b^2-1}+\frac{\cos.2a}{b^2-4}+\frac{\cos.3a}{b^2-9}+\text{etc.},$$

$$\frac{\pi\sin.b(a-2n\pi-\pi)}{2\sin.\pi b}=\frac{\sin.a}{b^2-1}+\frac{2\sin.a}{b^2-4}+\frac{3\sin.3a}{b^2-9}+\text{etc.}$$

Toutes les formules de ce n° étaient déja connues. Elles se trouvent dans les ouvrages d'Euler et de M. Legendre, et aussi dans mes Mémoires sur les intégrales définies qui font partie du Journal de l'École Polytechnique. On en déduit facilement tous les résultats que l'on a trouvés jusqu'à

75.

présent, et, vraisemblablement, tout ce qu'il est possible d'obtenir, sur les séries de sinus et de cosinus, et sur celles des puissances négatives des nombres naturels.

(12) Soit que l'on forme la valeur exacte d'une intégrale définie ou qu'on la calcule par approximation, il faut avoir égard aux observations suivantes par lesquelles nous terminerons ce Mémoire.

1°. Lorsque l'une des limites de l'intégrale est infinie, la fonction fx comprise sous le signe $\int$, doit décroître à mesure qu'elle s'en approche, et devenir nulle à cette limite. Cela est nécessaire pour que la partie ωP_n de la formule (6), qui se change alors en une suite infinie, soit une série convergente. Néanmoins on a souvent employé des intégrales de fonctions périodiques, prises depuis zéro jusqu'à l'infini; mais les valeurs qu'on leur assigne ne sauraient se vérifier numériquement, ni être données par la formule (6); et l'on doit ne les considérer que comme des limites d'autres intégrales pour lesquelles la fonction fx était décroissante et convergente vers zéro. C'est ainsi qu'en désignant par a une constante réelle et qui ne soit pas nulle, on a

$$\int_0^\infty \cos. ax\,dx = 0, \quad \int_0^\infty \sin. ax\,dx = \frac{1}{a},$$

en regardant ces résultats comme les limites de ceux-ci :

$$\int_0^\infty e^{-gx} \cos. ax\,dx = \frac{g}{g^2 + a^2}, \quad \int_0^\infty e^{-gx} \sin ax\,dx = \frac{a}{g^2 + a^2},$$

dans lesquels g est une constante positive, aussi petite qu'on

voudra, et que l'on fait infiniment petite pour passer aux intégrales précédentes. La première peut encore être considérée comme la limite de l'une ou l'autre de celles-ci :

$$\int_0^\infty e^{-g^2x^2}\cos.\, ax\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2g}\, e^{-\frac{a^2}{4g}},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos.\, ax}{1+g^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2g}\, e^{-\frac{a}{g}},$$

qui s'accordent aussi à donner zéro pour valeur de cette intégrale, à la limite où l'on suppose la quantité g infiniment petite, en exceptant toujours le cas où l'on aurait $a=0$.

A cause de cette exception, si les intégrales que nous citons pour exemples, sont comprises sous d'autres signes $\int$, relatifs à a, il faudra avoir soin de les remplacer par celles dont elles sont les limites. Ainsi, en désignant par $\mathrm{F}a$ et $\mathrm{F}'a$ deux fonctions données de a, si l'on a

$$\int \mathrm{F}a\left(\int_0^\infty \cos.\, ax\,dx\right)da,\ \int \mathrm{F}'a\left(\int_0^\infty \sin.\, ax\,dx\right)da,$$

l faudra prendre

$$\int \frac{g\,\mathrm{F}a\,da}{g^2+a^2},\quad \int \frac{a\,\mathrm{F}'a\,da}{g^2+a^2},$$

et ne faire la constante g infiniment petite qu'après avoir effectué les intégrations relatives à a, lorsque leurs limites comprendront $a=0$. Soit, par exemple,

$$\mathrm{F}a=\cos.\, a,\quad \mathrm{F}'a=\sin.\, a;$$

et intégrons depuis $a = -\infty$ jusqu'à $a = \infty$. Nous aurons πe^{-g} pour la valeur commune aux deux intégrales, laquelle se réduira à π, à la limite où la quantité g est infiniment petite. On peut vérifier que π est, en effet, la véritable valeur de chaque intégrale double, en effectuant les intégrations dans un ordre inverse, c'est-à-dire, en commençant par a et et finissant par x, ce qui n'est sujet à aucune difficulté; ou bien encore, en intégrant d'abord par rapport à x, entre des valeurs indéterminées de cette variable, qu'on ne fera infinies qu'après l'intégration relative à a.

2°. On ne doit pas faire usage de la formule (6), quand la fonction fx passe une ou plusieurs fois par l'infini, entre les limites de l'intégration. Le principe qui en est la base, et l'équation (2) dont nous l'avons déduite, supposent essentiellement que fx est toujours une quantité finie. Si cependant cette fonction devenait infinie à raison d'un diviseur dont l'exposant serait moindre que l'unité, il serait facile de le faire disparaître par un changement de variable. Supposons, par exemple,

$$fx = \frac{\mathrm{F}x}{(x-a)^k};$$

a étant une constante comprise entre les limites de l'intégration, k un exposant > 0 et < 1, et $\mathrm{F}x$ une fonction qui ne devient pas infinie : on fera alors

$$(x-a)^{1-k} = y, \quad (1-k)(x-a)^{-k}dx = dy;$$

d'où l'on conclura

$$fx\,dx = \frac{\mathrm{F}'y}{1-k}dy;$$

$F'y$ étant aussi une fonction qui ne deviendra pas infinie, ce qui permettra d'appliquer la formule (6) à l'intégrale relative à la nouvelle variable y.

Généralement, une intégrale $\int_0^c fx\,dx$ cesse de représenter la somme des valeurs réelles de la différentielle, comprises depuis $x=0$ jusqu'à $x=c$, lorsque fx devient infinie dans cet intervalle. Ainsi, l'on a, par exemple,

$$\int_0^c \frac{dx}{x-a} = \log.\frac{a-c}{a}, \quad \int_0^c \frac{dx}{(x-a)^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a-c};$$

et si l'on suppose $a > 0$ et $< c$, la première valeur est imaginaire, et la seconde négative, tandis que la première différentielle est toujours réelle, et la seconde toujours positive. Mais dans ces sortes de cas, si l'on fait passer la variable, entre les limites données, par des valeurs imaginaires qui ne rendent plus fx infinie, on pourra considérer de nouveau l'intégrale $\int_0^c fx\,dx$, comme la somme des valeurs imaginaires de $fx\,dx$. Dans les exemples précédents, il faudra faire

$$x = \tfrac{1}{2}c(1 - \cos. z + \sin. z\sqrt{-1}), \quad dx = \tfrac{1}{2}c(\sin. z + \cos. z\sqrt{-1}),$$

et intégrer depuis $z=0$ jusqu'à $z=(2n+1)\pi$, n étant un nombre entier quelconque, afin de ne pas changer les limites données $x=0$ et $x=c$. Les intégrales définies ne changeront pas non plus; mais les fonctions de z, comprises sous les signes $\int$, ne devenant pas infinies, chaque intégrale sera

maintenant la somme des valeurs de la différentielle; et ces valeurs étant imaginaires, cela explique comment leur somme peut être imaginaire dans un cas et négative dans l'autre.

Il y a aussi des intégrales dans lesquelles la fonction fx passe une infinité de fois par l'infini, et qu'on peut encore admettre dans l'analyse en les considérant comme les limites d'autres intégrales qui n'ont pas cet inconvénient. C'est dans cette classe qu'on doit ranger celles dont M. Bidone a donné les valeurs dans les Mémoires de Turin pour l'année 1812 (1).

3°. Lorsque fx renferme un radical, il devra conserver le même signe, ou plus généralement, avoir pour facteur la même racine de l'unité, dans toute l'étendue de l'intégration; et de cette manière, l'intégrale aura le même nombre de valeurs différentes, réelles ou imaginaires, dont le radical sera susceptible. Si le radical passe du réel à l'imaginaire, les signes dont il sera affecté dans ces deux périodes de valeurs, n'auront pas de dépendance mutuelle, et la valeur de l'intégrale sera nécessairement ambiguë, c'est-à-dire, qu'après avoir donné un signe déterminé à la partie réelle, on pourra supposer indifféremment que la partie imaginaire soit multipliée par $+\sqrt{-1}$ ou par $-\sqrt{-1}$: il est inutile d'insister sur cette circonstance qu'il suffit d'avoir indiquée. Lorsque le radical sera constamment réel entre les limites de l'intégration, la nécessité d'un signe constant, sera une condition essentielle qui influera sur l'expression de l'intégrale définie. Pour en donner un exemple connu, considérons l'intégrale :

(1) Voyez aussi sur ce point les *Exercices de calcul intégral*, tome II, page 125.

$$\int_0^\pi \frac{\sin. x\,dx}{\sqrt{1-2a\cos. x+a^2}},$$

dans laquelle a est une constante positive ; et convenons de regarder le radical contenu sous le signe $\int$, comme une quantité positive dans toute l'étendue de l'intégration. Il faudra prendre pour sa valeur, $1+a$ à la limite $x=\pi$, et $1-a$ ou $a-1$ à la limite $x=0$, selon qu'on aura $a<1$ ou $a>1$. D'après cela, on trouve ces deux expressions différentes :

$$\int_0^\pi \frac{\sin. x\,dx}{\sqrt{1-2a\cos. x+a^2}}=2, \quad \text{ou} = \frac{2}{a};$$

la première ayant lieu dans le cas de $a<1$, et la seconde dans le cas de $a>1$; et si l'on différentie cette intégrale par rapport à a, on aura, dans les mêmes cas, cet autre exemple :

$$\int_0^\pi \frac{(a-\cos. x)\sin. x\,dx}{(1-2a\cos. x+a^2)^{\frac{3}{2}}}=0, \quad \text{ou} = \frac{2}{a^2}.$$

Il est à remarquer que si l'on fait $a=1$, les deux valeurs de la première intégrale sont égales, mais non pas celles de la seconde. Dans ce cas particulier, la dernière intégrale a pour valeurs zéro ou 2, selon qu'auparavant on regardait a comme plus petit, ou comme plus grand que l'unité. Ce paradoxe tient à ce que les deux valeurs que l'on détermine de cette manière, sont celles qui répondent à la différence $1-a$ infiniment petite, positive ou négative, et qu'à cette limite, un changement infiniment petit dans la valeur de $1-a$, suffit pour produire un changement brusque dans

celle de l'intégrale dont il est question. Dans le cas où l'on aurait rigoureusement $a=1$, la valeur de cette intégrale serait la moyenne des deux valeurs précédentes, ou égale à l'unité; et, en effet, on a, dans cette hypothèse,

$$\int_0^\pi \frac{(a-\cos.x)\sin.x\,dx}{(1-2a\cos.x+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\pi \frac{\sin.x\,dx}{\sqrt{1-\cos.x}}=1.$$

Au reste, il existe beaucoup d'autres intégrales définies, renfermant, comme celle-ci, une constante sous le signe $\int$, qui ont des valeurs différentes, selon que cette constante est positive ou négative, bien qu'elle puisse être infiniment petite. C'est ainsi qu'on a, par exemple,

$$\int_0^\infty \frac{\sin.\alpha x}{x}dx=\tfrac{1}{2}\pi,\ =0,\quad \text{ou}=-\tfrac{1}{2}\pi,$$

selon que la constante α est >0, $=0$, ou <0.

MÉMOIRE

Sur les développements des fonctions en séries périodiques.

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 27 février 1826.

La solution d'un grand nombre de problèmes de physique mathématique exige le développement des fonctions en séries périodiques, par exemple, en séries ordonnées suivant les sinus ou cosinus des multiples d'un même arc. Dans les séries de ce genre, les coëfficients des différents termes sont ordinairement des intégrales définies qui renferment des sinus ou des cosinus; et, lorsque les intégrations peuvent s'effectuer, en raison d'une forme particulière attribuée à la fonction qu'il s'agit de développer, on reconnaît aisément que les séries obtenues sont convergentes. Toutefois il était à désirer que cette convergence pût être démontrée d'une manière générale, indépendamment des valeurs des fonctions. Or, on y parvient facilement en faisant usage des formules que j'ai données dans les Mémoires sur les ondes (1), et sur

(1) Voyez la page 232 du Mémoire sur la théorie des ondes, et la page 29 du Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.

les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, et remplaçant, à l'aide de ces formules, les sinus ou cosinus renfermés sous le signe $\int$ par des exponentielles dans lesquelles les parties variables des exposants sont négatives. Ajoutons que l'emploi des mêmes formules fournit le moyen de substituer, dans certains cas, à la série qui représente le développement d'une fonction une intégrale définie, et que cette substitution produit de nouvelles équations fort remarquables dont on peut se servir avec avantage dans les questions de physique mathématique.

Pour montrer une explication de ces principes, considérons la série

$$(1)\quad \int_0^a f(\mu)\,d\mu + 2\int_0^a \cos.\frac{2\pi}{a}(x-\mu).f(\mu)\,d\mu + 2\int_0^a \cos.\frac{4\pi}{a}(x-\mu).f(\mu)\,d\mu + \text{etc.}$$

Il est facile de reconnaître 1° que la fonction représentée par cette série ne varie pas, quand on fait croître ou diminuer x d'un multiple de a; 2° que cette fonction, entre les limites $x=0$, $x=a$, est équivalente au produit $af(x)$. En effet, si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, et si l'on pose $\theta = 1-\varepsilon$, la série (1) pourra être remplacée par la suivante

$$\int_0^a f(\mu)\,d\mu + \int_0^a e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\,d\mu + \theta\int_0^a e^{\frac{4\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\,d\mu + \text{etc.}$$
$$+\int_0^a e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\,d\mu + \theta\int_0^a e^{-\frac{4\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}} f(\mu)\,d\mu + \text{etc.}$$

$$=\int_0^a f(\mu)d\mu+\int_0^a \frac{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}}{1-\theta e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}}f(\mu)d\mu+\int_0^a \frac{e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}}{1-\theta e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}}f(\mu)d\mu$$

$$=\int_0^a f(\mu)d\mu+\int_0^a \frac{1}{e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta}f(\mu)d\mu+\int_0^a \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta}f(\mu)d\mu$$

$$=\int_0^a \left\{1+\frac{1}{e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta}+\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta}\right\}f(\mu)\,d\mu.$$

Or, θ étant très-rapproché de l'unité, et x étant compris entre zéro et a, l'expression

$$1+\frac{1}{e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta}+\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}-\theta}$$

sera sensiblement nulle, excepté quand μ différera très-peu de x. Par suite, la dernière des intégrales relatives à μ pourra être prise entre deux limites très-rapprochées de x. Or, si l'on fait $\mu=x+\varepsilon\omega$, et $\theta=1-\varepsilon$, cette intégrale sera réduite sensiblement à

$$f(x)\int_{-\frac{x}{\varepsilon}}^{\frac{a-x}{\varepsilon}} \left\{\frac{1}{1+\frac{2\pi}{a}\omega\sqrt{-1}}+\frac{1}{1-\frac{2\pi}{a}\omega\sqrt{-1}}\right\}d\omega=af(x).$$

On aura donc, entre les limites $x=0$, $x=a$,

$$(2)\; f(x)=\frac{1}{a}\int_0^a f(\mu)\,d\mu+\frac{2}{a}\int_0^a \cos.\frac{2\pi}{a}(x-\mu).f(\mu)\,d\mu+\int_0^a \cos.\frac{4\pi}{a}(x-\mu).f(\mu)d\mu$$

$+$ etc.

La série précédente peut être fort utilement employée dans plusieurs circonstances. Mais il importe de montrer sa convergence. Or, pour y parvenir, il suffit de rappeler qu'on a généralement, lorsque la fonction $\varphi(\mu+\nu\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $\nu=\infty$,

$$(3)\quad \int_0^a \varphi(\mu)\,d\mu = \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty [\varphi(a+\nu\sqrt{-1})-\varphi(\nu\sqrt{-1})]\,d\nu + 2\pi\sqrt{-1}\;{}_{0}^{a}\mathcal{E}_{0}^{\infty}((\varphi(z))),$$

et, lorsque la fonction $\varphi(\mu+\nu\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $\nu=-\infty$

$$(4)\quad \int_0^a \varphi(\mu)\,d\mu = \frac{-1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty [\varphi(a-\nu\sqrt{-1})-\varphi(-\nu\sqrt{-1})]\,d\nu - 2\pi\sqrt{-1}\;{}_{0}^{a}\mathcal{E}_{-\infty}^{0}((\varphi(z)))$$

Si, dans la première de ces équations, on pose

$$\varphi(\mu)=e^{b\mu\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(\mu),$$

b étant une quantité positive, et $\mathrm{f}(\mu)$ une fonction qui reste finie pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de μ, on aura

$$(5)\quad \int_0^a e^{b\mu\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(\mu)\,d\mu = \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \left(e^{ab\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(a+\nu\sqrt{-1})-\mathrm{f}(\nu\sqrt{-1})\right)e^{-b\nu}\,d\nu.$$

Si l'on suppose, au contraire,

$$\varphi(\mu)=e^{-\mu\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(\mu),$$

on aura

$$(6)\quad \int_0^a e^{-b\mu\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(\mu)\,d\mu = -\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \left(e^{-ab\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(a-\nu\sqrt{-1})-\mathrm{f}(-\nu\sqrt{-1})\right)e^{-b\nu}$$

Cela posé, revenons à l'équation (2). Cette équation, pouvant s'écrire comme il suit :

$$(7)\quad f(x)=\frac{1}{a}\int_0^a f(\mu)d\mu+\frac{1}{a}\int_0^a e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\sqrt{-1}}f(\mu)d\mu+\text{etc.}$$
$$+\frac{1}{a}\int_0^a e^{\frac{2\pi}{a}(\mu-x)\sqrt{-1}}f(\mu)d\mu+\text{etc.},$$

on en déduira, à l'aide des équations (5) et (6),

$$(8)\quad f(x)=\frac{1}{a}\int_0^a f(\mu)d\mu$$
$$+\frac{1}{a\sqrt{-1}}\int_0^\infty\left\{e^{-\frac{2\pi}{a}(x-a)\sqrt{-1}}f(a+\nu\sqrt{-1}-e^{-\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}f(\nu\sqrt{-1})\right\}e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}d\nu+\text{etc.}$$
$$-\frac{1}{a\sqrt{-1}}\int_0^\infty\left\{e^{\frac{2\pi}{a}(x-a)\sqrt{-1}}f(a-\nu\sqrt{-1})-e^{\frac{2\pi}{a}x\sqrt{-1}}f(-\nu\sqrt{-1})\right\}e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}d\nu+\text{etc.}$$
$$=\frac{1}{a}\int_0^a f(\mu)d\mu+\frac{1}{a\sqrt{-1}}\int_0^\infty\left\{e^{-\frac{2\pi x}{a}\sqrt{-1}}e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}+\text{etc.}\right\}[f(a+\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})]d\nu$$
$$-\frac{1}{a\sqrt{-1}}\int_0^\infty\left\{e^{\frac{2\pi x}{a}\sqrt{-1}}e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}+\text{etc.}\right\}[f(a-\nu\sqrt{-1})-f(-\nu\sqrt{-1})]d\nu,$$

et par suite

$$(9)\quad f(x)=\frac{1}{a}\int_0^a f(\mu)d\mu$$
$$+\frac{1}{a\sqrt{-1}}\int_0^\infty\left\{\frac{f(a+\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})}{e^{-\frac{2\pi x}{a}\sqrt{-1}}e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}-\frac{f(a-\nu\sqrt{-1}-f(-\nu\sqrt{-1})}{e^{-\frac{2\pi x}{a}\sqrt{-1}}e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}\right\}d\nu.$$

La série comprise dans le dernier membre de la formule (8) a évidemment pour terme général

$$(10)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a\sqrt{-1}}e^{-\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu}\left[f(a+\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})\right]d\nu\\ &-\frac{1}{a\sqrt{-1}}e^{\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-\frac{2n\pi}{a}}\left[f(a+\nu\sqrt{-1})-f(-\nu\sqrt{-1})\right]d\nu,\end{aligned}\right.$$

ou, si l'on fait $\frac{2n\pi}{a}\nu=z$,

$$(11)\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2n\pi\sqrt{-1}}e^{-\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-z}\left[f\left(a+\frac{az}{2n\pi}\sqrt{-1}\right)-f\left(\frac{az}{2n\pi}\sqrt{-1}\right)\right]dz\\ &-\frac{1}{2n\pi\sqrt{-1}}e^{+\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-z}\left[f\left(a-\frac{az}{2n\pi}\sqrt{-1}\right)-f\left(-\frac{az}{2n\pi}\sqrt{-1}\right)\right]dz.\end{aligned}\right.$$

Or, pour des valeurs très-grandes de n, chacune des intégrales comprises dans l'expression (11) se réduira sensiblement à

$$f(a)-f(0),$$

et cette expression elle-même à

$$(12)\qquad -\frac{1}{2n\pi}[f(a)-f(0)]\sin.\frac{2n\pi}{a}.$$

Or, il est clair que la série qui aura pour terme général l'expression (12), sera une série convergente.

Il est essentiel de remarquer que la formule (9) peut se déduire immédiatement des équations (3) et (4). En effet, on a, en vertu de ces équations, en supposant x renfermé

entre les limites o et a,

$$(13)\begin{cases} \displaystyle\int_0^a \frac{f(\mu)\,d\mu}{e^{-\frac{2\pi}{a}(\mu-x)\sqrt{-1}}-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{f(a+\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})}{e^{\frac{2\pi x}{a}\sqrt{-1}}\,e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}\,d\nu - \frac{a}{2}f(x), \\ \displaystyle\int_0^a \frac{f(\mu)\,d\mu}{e^{\frac{2\pi}{a}(\mu-x)\sqrt{-1}}-1} = -\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{f(a-\nu\sqrt{-1})-f(-\nu\sqrt{-1})}{e^{-\frac{2\pi x}{a}\sqrt{-1}}\,e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}\,d\nu - \frac{a}{2}f(x). \end{cases}$$

Or, il suffit d'ajouter ces dernières équations pour retrouver la formule (10).

Si l'on remplace x par a, dans les intégrales relatives à μ que renferment les équations (13), on tirera des formules (3) et (4),

$$(14)\begin{cases} \displaystyle\int_0^a \frac{f(\mu)\,d\mu}{e^{-\frac{2\pi}{a}\mu\sqrt{-1}}-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{f(a-\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})}{e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}\,d\nu - \frac{a}{4}[f(a)+f(0)] \\ \displaystyle\int_0^a \frac{f(\mu)\,d\mu}{e^{\frac{2\pi}{a}\mu\sqrt{-1}}-1} = -\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{f(a-\nu\sqrt{-1})-f(-\nu\sqrt{-1})}{e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}\,d\nu - \frac{a}{4}[f(a)+f(0)], \end{cases}$$

puis, en ajoutant,

$$(15)\begin{cases} \displaystyle -\int_0^a f(\mu)\,d\mu = \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{f(a+\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})-f(a-\nu\sqrt{-1})+f(-\nu\sqrt{-1})}{e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1}\,d\nu \\ \qquad\qquad \displaystyle -\frac{a}{2}[f(a)+f(0)]. \end{cases}$$

On aura donc

$$(16)\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{f(a+\nu\sqrt{-1})-f(a-\nu\sqrt{-1})-f(\nu\sqrt{-1})+f(-\nu\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}\,\frac{d\nu}{e^{\frac{2\pi}{a}\nu}-1} = a\frac{f(a)+f(0)}{2} \\ \qquad\qquad \displaystyle -\int_0^a f(\mu)\,d\mu. \end{cases}$$

La formule (16) paraît mériter l'attention des géomètres. Elle comprend, comme cas particuliers, des formules connues. Si l'on fait, par exemple, $f(x)=x^2$, elle donnera

$$\int_0^\infty \frac{v\,dv}{e^{\frac{2\pi}{a}v}-1}=\frac{a^2}{24},$$

puis, en prenant $a=2\pi$,

$$\int_0^\infty \frac{v\,dv}{e^{v}-1}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Nous terminerons en observant que la théorie des intégrales singulières suffit pour déduire la formule (16) de la formule (9), quoique au premier abord ces deux formules ne paraissent pas d'accord entre elles.

Post-Scriptum. Dans les formules (3) et (4), le signe $\mathcal{E}$, placé devant la fonction $\varphi(z)$, indique, conformément aux notations adoptées pour le calcul des résidus des fonctions, la somme de plusieurs résidus de la fonction $\varphi(z)$, c'est-à-dire en général, la somme de plusieurs des valeurs du produit $\varepsilon\varphi(z+\varepsilon)$ correspondantes à des valeurs infiniment petites de ε, et à des valeurs infinies, réelles ou imaginaires de z, qui vérifient l'équation

$$(17) \qquad \frac{1}{\varphi(z)}=0.$$

Les limites placées à droite et à gauche du signe $\mathcal{E}$ sont les quantités entre lesquelles doivent rester comprises 1° les parties réelles, 2° les coëfficients de $\sqrt{-1}$ dans les diverses va-

leurs de z tirées de l'équation (17). Ajoutons que la démonstration donnée ci-dessus de la convergence de la série (1) suppose évidemment 1° que l'équation (2) peut être remplacée par l'équation (8), ce qui a effectivement lieu quand la fonction $f(\mu)$ conserve une valeur finie pour toutes les valeur finies réelles ou imaginaires de μ; 2° que l'expression (11) ne devient pas indéterminée pour des valeurs infinies de x, ce qui arriverait, par exemple, si l'on prenait $f(z)=e^{z^2}$. Si ces conditions n'étaient pas remplies, la série (1) pourrait devenir divergente. C'est, en particulier, ce qui aurait lieu, si l'on prenait

$$f(x)=\frac{1}{(a-2x)^2},$$

puisque alors le temps général de la série (1), ou l'intégrale

$$2\int_0^a \cos.\frac{2\pi}{a}(x-\mu)\frac{d\mu}{(a-2\mu)^2},$$

aurait une valeur infinie.

Observons encore que, si l'on veut obtenir sous forme finie le reste de la série comprise dans l'équation (2), il suffira de remplacer, dans la formule (10), les produits

$$e^{-\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}}e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu},\quad e^{\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}}e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu},$$

par les fractions

$$\frac{e^{-\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}}e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu}}{1-e^{-\frac{2\pi x}{a}\sqrt{-1}}e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}},\quad \frac{e^{\frac{2n\pi x}{a}\sqrt{-1}}e^{-\frac{2n\pi}{a}\nu}}{1-e^{\frac{2\pi x}{a}\sqrt{-1}}e^{-\frac{2\pi}{a}\nu}}.$$

Après ce remplacement, il deviendra facile, quand la série (1) sera convergente, d'assigner des limites entre lesquelles soit renfermé le reste dont il s'agit.

Fig. 1.

Fig. 8

Fig. 9.

Fig. 12.

Fig. 13.

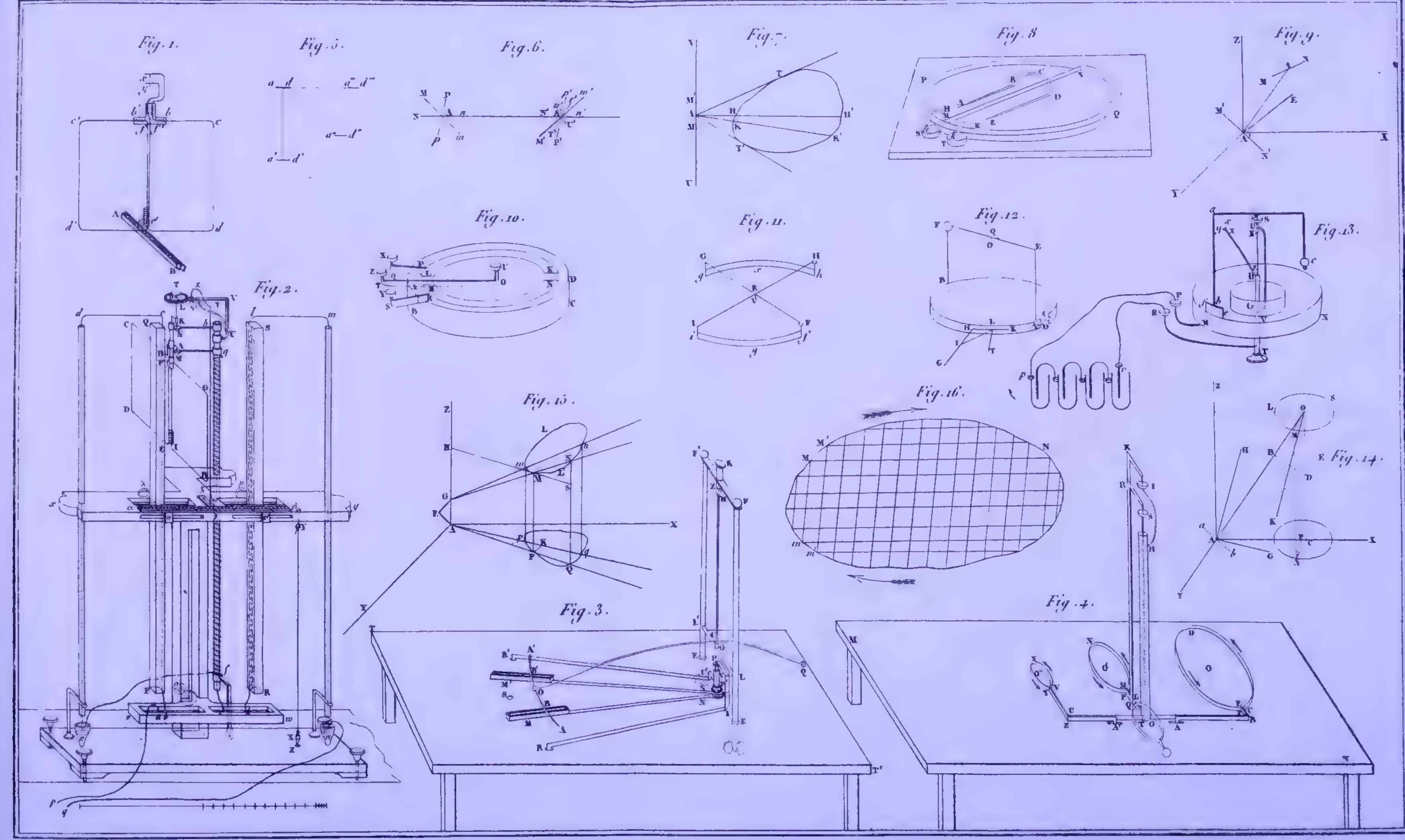
Fig. 14.

Fig. 4.

1823. Tom. 6. Acad. des Sciences.

Théorie des Phénomènes Electro-dynamiques.

Pl. 1.



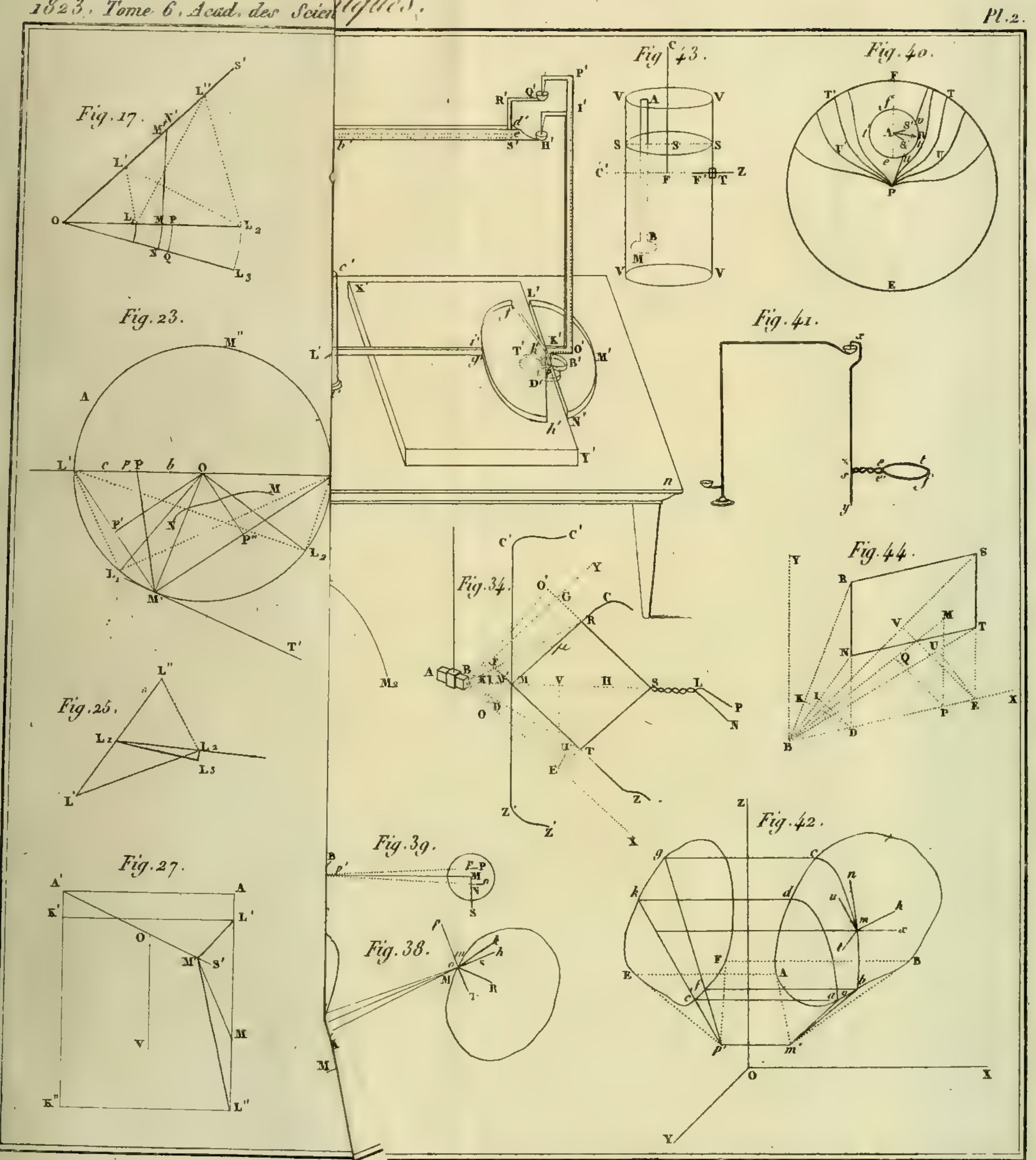


Fig. 17.
Fig. 23.
Fig. 25.
Fig. 27.
Fig. 34.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.

Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques.



XI. — COMITÉ DE COGNAC (Station viticole. Séance du 21 mars 1875). Exposé des expériences faites à Cognac et des résultats obtenus par M. MAX. CORNU et M. MOUILLEFERT. In-4; 1875. 1 fr.

XII. — DUMAS, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Note sur la composition et les propriétés physiologiques des produits du goudron de houille.** In-4; 1875. . . . . 50 c.

XIII. — DUCLAUX, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon. — **Études sur la nouvelle Maladie de la Vigne dans le sud-est de la France.** In-4, avec une planche représentant, coloriés en rouge, les pays vignobles atteints par le Phylloxera en 1874. . . . . 75 c.

XIV. — BOULEY, Membre de l'Institut. — **Rapport** sur les réclamations dont a été l'objet le décret relatif à l'importation en Algérie des plants d'arbres fruitiers ou forestiers venant de France. In-4; 1875. . . . . 75 c.

XV. — DUMAS, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, et MAX. CORNU. — **Instruction pratique sur les moyens à employer pour combattre le Phylloxera, et spécialement pendant l'hiver.** In-4; 1876. . . . . 75 c.

XVI. — MILLARDET, *Délégué de l'Académie.* — **Études sur les Vignes d'origine américaine qui résistent au Phylloxera.** In-4; 1876. . . . . 2 fr.

XVII. — GIRARD (Maurice), *Délégué de l'Académie.* — **Indications générales sur les vignobles des Charentes**; avec 3 planches représentant, teintes en rouge, les portions du territoire des Charentes où le Phylloxera a été reconnu à la fin de chacune des années 1872, 1873 et 1874. In-4; 1876. 2 fr. 50 c.

XVIII. — CORNU (Maxime) et MOUILLEFERT, *Délégués de l'Académie.* — **Expériences faites à la station viticole de Cognac dans le but de trouver un procédé efficace pour combattre le Phylloxera.** In-4; 1876 . . . . 5 fr.

XIX. — AZAM, Docteur en Médecine. — **Le Phylloxera dans le département de la Gironde.** In-4, avec une grande planche représentant, au moyen de teintes noires, rouges et bleues, l'état du fléau en 1873 et son développement en 1874 et en 1875; 1876. . . . . 75 c.

XX. — BALBIANI. — **Sur l'éclosion de l'œuf d'hiver du Phylloxera de la Vigne.** In-4; 1876. (*Voir* nº XXIII.)

XXI. — **Extraits des Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.** (Séances des 2 novembre 1875 et 2 juillet 1876). . . . . 1 fr.

SOMMAIRE : Sur la parthénogénèse du Phylloxera comparée à celle des autres Pucerons; par M. BALBIANI. — Résultats obtenus, au moyen du sulfocarbonate de potassium, sur les vignes phylloxérées de Mézel, par M. AUBERGIER. — Observations sur la lettre de M. Aubergier; par M. DUMAS. — Sur le mode d'emploi des sulfocarbonates, par M. J.-B. JAUBERT. — État actuel des vignes soumises au traitement du sulfocarbonate de potassium depuis l'année dernière; par M. P. MOUILLEFERT. — Résultats obtenus à Cognac avec les sulfocarbonates de sodium et de baryum appliqués aux vignes phylloxérées; par M. P. MOUILLEFERT. — Expériences relatives à la destruction du Phylloxera; par M. MARION.

XXII. — BOUTIN (aîné), *Délégué de l'Académie.* — **Études d'analyses comparatives sur la vigne saine et sur la vigne phylloxérée.** In-4; 1877. . . . . 1 fr.

XXIII. — BALBIANI, Délégué de l'Académie des Sciences, Professeur au Collége de France. — **Mémoires sur le Phylloxera**, présentés à l'Académie des Sciences, en 1876. In-4; 1876. . . . 2 fr.

SOMMAIRE : Sur l'éclosion prochaine des œufs d'hiver du Phylloxera (mars 1876). — Sur l'éclosion de l'œuf d'hiver du Phylloxera (avril 1876). — Sur la parthénogénèse du Phylloxera comparée à celle des autres Pucerons. — Nouvelles observations sur le Phylloxera du chêne comparé au Phylloxera de la vigne. — Remarques au sujet d'une Note récente de M. Lichtenstein sur la reproduction des Phylloxeras. — Recherches sur la structure et sur la vitalité des œufs du Phylloxera.

XXIV. — DUCLAUX, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon, délégué de l'Académie. — **Études sur la nouvelle Maladie de la Vigne dans le sud-est de la France.** Pays vignobles atteints par le Phylloxera en 1875 et 1876. In-4, avec 2 planches; 1876. . . . . 1 fr. 25 c.

XXV. — COMMISSION DU PHYLLOXERA. — **Avis sur les mesures à prendre pour s'opposer à l'extension des ravages du Phylloxera.** In-4; 1877. . . . . 75 c.

XXVI. — CORNU (Maxime), *Délégué de l'Académie.* — **Études sur le Phylloxera vastatrix.** In-4 de 358 pages, avec 24 planches en couleur. 1878 . . . . 10 fr.

INSTITUT DE FRANCE. — Instruction sur les paratonnerres, adoptée par l'Académie des Sciences (Iʳᵉ Partie, 1823, par *Gay-Lussac*. — IIᵉ Partie, 1854, par M. *Pouillet*. — IIIᵉ Partie, 1867, par M. *Pouillet*). In-18 jésus, avec 58 figures dans le texte et une planche; 1874. . . . . 2 fr. 50 c.

PRÉFECTURE DE LA SEINE. — Assainissement de la Seine. Épuration et utilisation des eaux d'égoût, 4 beaux volumes in-8 jésus; avec 17 pl., dont 10 en chromolithographie; 1876-1877. 26 fr.

PRÉFECTURE DE LA SEINE. — Assainissement de la Seine. Épuration et utilisation des eaux d'égoût. — Rapport de la Commission d'études chargée d'étudier les procédés de culture horticole à l'aide des eaux d'égout. In-8 jésus avec pl.; 1878. . . . . 1 fr. 50

RAPPORT DE LA COMMISSION D'ÉTUDES chargée d'étudier l'influence exercée dans la presqu'île de Gennevilliers par l'irrigation en eau d'égoût, sur la valeur vénale et locative des terres de culture. In-8 jésus avec 3 planches en chromolithographie; 1878 . . . . 3 fr.
